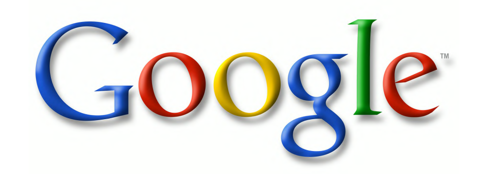
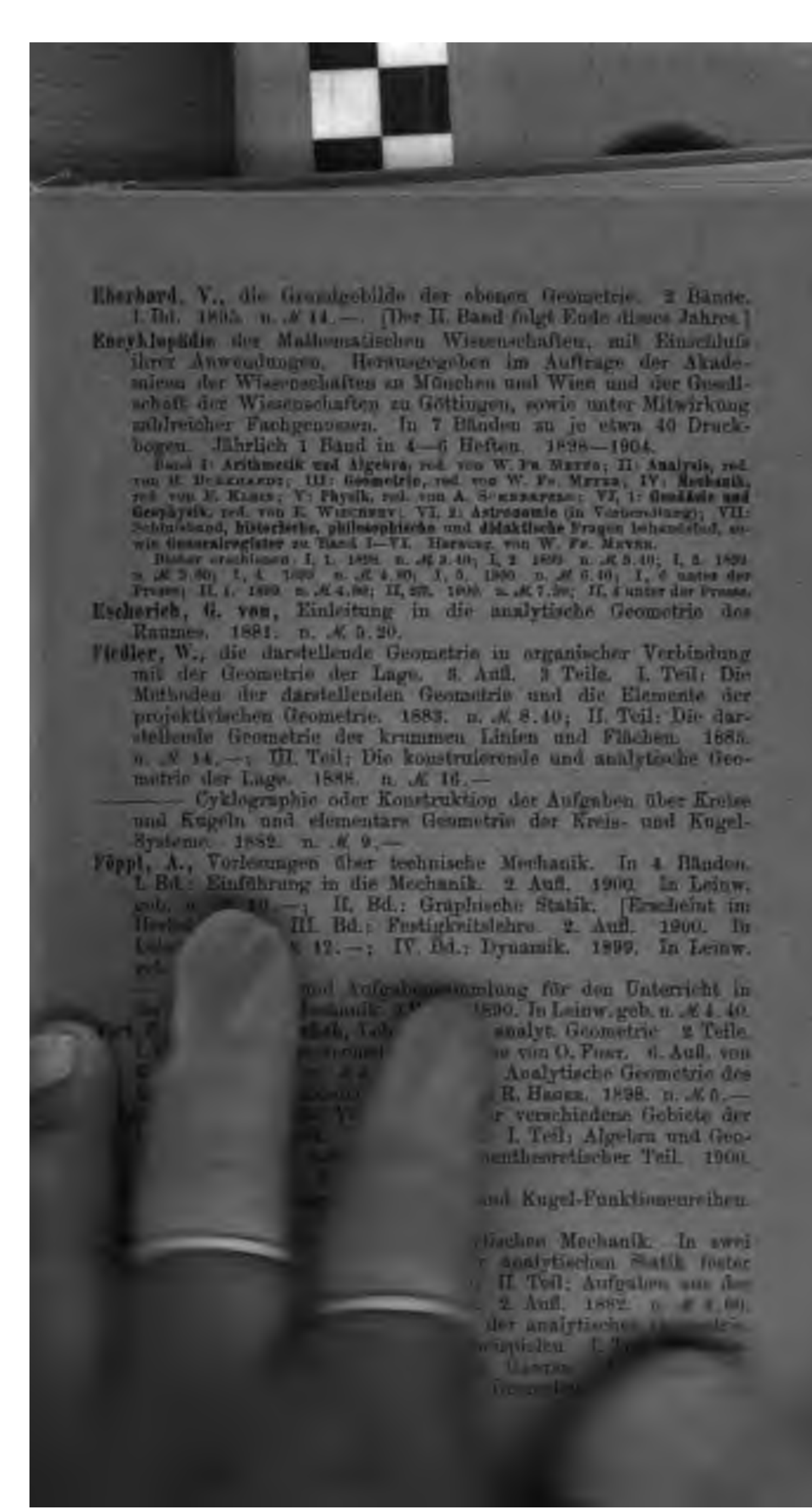






Eberhard, V., die Grundgebilde der ebenen Geometrie. 2 Bände. I. Bd. 1895. n. ℳ 14.—. [Der II. Band folgt Ende dieses Jahres.]

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluß ihrer Anwendungen. Herausgegeben im Auftrage der Akademieen der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je etwa 40 Druckbogen. Jährlich 1 Band in 4—6 Heften. 1898—1904.

Band I: **Arithmetik und Algebra,** red. von W. Fr. Meyer; II: **Analysis,** red. von H. Burkhardt; III: **Geometrie,** red. von W. Fr. Meyer; IV: **Mechanik,** red. von F. Klein; V: **Physik,** red. von A. Sommerfeld; VI, 1: **Geodäsie und Geophysik,** red. von E. Wiechert; VI, 2: **Astronomie** (in Vorbereitung); VII: Schlußband, **historische, philosophische** und **didaktische** Fragen behandelnd, sowie **Generalregister** zu Band I—VI. Herausg. von W. Fr. Meyer.

Bisher erschienen: I, 1. 1898. n. ℳ 3.40; I, 2. 1899. n. ℳ 5.40; I, 3. 1899. n. ℳ 3.80; I, 4. 1899. n. ℳ 4.80; I, 5. 1900. n. ℳ 6.40; I, 6 unter der Presse; II, 1. 1899. n. ℳ 4.80; II, 2/3. 1900. n. ℳ 7.20; II, 4 unter der Presse.

Escherich, G. von, Einleitung in die analytische Geometrie des Raumes. 1881. n. ℳ 5.20.

Fiedler, W., die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 3. Aufl. 3 Teile. I. Teil: Die Methoden der darstellenden Geometrie und die Elemente der projektivischen Geometrie. 1883. n. ℳ 8.40; II. Teil: Die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen. 1885. n. ℳ 14.—; III. Teil: Die konstruierende und analytische Geometrie der Lage. 1888. n. ℳ 16.—

——— Cyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugel-Systeme. 1882. n. ℳ 9.—

Föppl, A., Vorlesungen über technische Mechanik. In 4 Bänden. I. Bd.: Einführung in die Mechanik. 2. Aufl. 1900. In Leinw. geb. n. ℳ 10.—; II. Bd.: Graphische Statik. [Erscheint im Herbst [illegible]] III. Bd.: Festigkeitslehre. 2. Aufl. 1900. In Leinw. [illegible] ℳ 12.—; IV. Bd.: Dynamik. 1899. In Leinw. geb. [illegible]

——— [illegible] und Aufgabensammlung für den Unterricht in [illegible] Mechanik. [illegible] 1890. In Leinw. geb. n. ℳ 4.40.

[illegible] analyt. Geometrie. 2 Teile. [illegible] von O. Fort. 6. Aufl. von [illegible] Analytische Geometrie des [illegible] R. Heger. 1898. n. ℳ 6.—

[illegible] verschiedene Gebiete der [illegible] I. Teil: Algebra und Geo[illegible] [illegible] theoretischer Teil. 1900.

[illegible] und Kugel-Funktionenreihen.

[illegible] Mechanik. In zwei [illegible] analytischen Statik fester [illegible] II. Teil: Aufgaben aus der [illegible] 2. Aufl. 1882. n. ℳ [illegible]

[illegible] der analytischen [illegible] [illegible] Beispielen. I. [illegible]

Genocchi, A., Differentialrechnung und Anfangsgründe der Integralrechnung, herausgegeben von Giuseppe Peano. Autoris. deutsche Übersetzung von G. Bohlmann und A. Schepp. Mit einem Vorwort von A. Mayer. 1899. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

Gordan, P., über das Formensystem binärer Formen. 1875. n. ℳ 2.—

——— Vorlesungen über Invariantentheorie, herausgegeben von G. Kerschensteiner. I. Bd.: Determinanten. 1886. n. ℳ 6.40; II. Bd.: Binäre Formen. 1887. n. ℳ 11.60. [Der dritte (Schluß-) Band erscheint im nächsten Jahre.]

Graefe, F., Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen mit Anwendung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. 1883. n. ℳ 3.60.

——— Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Punktes, der geraden Linie, des Kreises und der Kegelschnitte. 1885. n. ℳ 2.40. Auflösungen und Beweise dazu. 1886. n. ℳ 4.80.

——— Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Raumes, insbesondere der Flächen zweiten Grades. 1888. n. ℳ 3.—. Auflösungen und Beweise dazu. 1890. n. ℳ 8.—

Gundelfinger, S., Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von F. Dingeldey. Mit einem Anhange, enthaltend Aufgaben und weitere Ausführungen. 1895. n. ℳ 12.—

——— Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinometrischer Gleichungen. Hinzugefügt sind vierstellige Additions-, Subtraktions- und Briggische Logarithmen sowie eine Interpolationstafel für alle Differenzen unter Hundert. 1897. Steif geh. n. ℳ 1.40.

Harnack, A., die Elemente der Differential- und Integralrechnung. 1881. n. ℳ 7.60.

Heffter, L., Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen. 1894. n. ℳ 6.—

Helmert, F. R., die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie. 2 Teile. I. Teil: Die mathematischen Theorieen. 1880. n. ℳ 18.—; II. Teil: Die physikalischen Theorieen. 1884. n. ℳ 20.—

Heſs, E., Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung auf die Theorie der gleichflächigen und der gleicheckigen Polyeder. 1883. n. ℳ 14.—

Holzmüller, G., die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung. I. Teil, enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye. Mit zahlreichen Übungsaufgaben. 1897. In Leinw. geb. n. ℳ 5.—; II. Teil, enthaltend das Potential und seine Anwendung auf die Theorieen der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik. Mit zahlreichen Übungsbeispielen und einem Anhange über Maſseinheiten. 1898. In Leinw. geb. n. ℳ 6.—



ERNST PASCAL,
ORDENTLICHER PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU PAVIA.

REPERTORIUM DER HÖHEREN MATHEMATIK

(DEFINITIONEN, FORMELN, THEOREME, LITERATUR)

AUTORISIRTE DEUTSCHE AUSGABE
NACH EINER NEUEN BEARBEITUNG DES ORIGINALS
VON

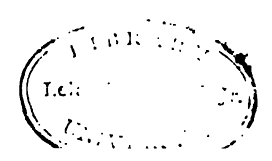
A. SCHEPP
OBERLEUTNANT A. D. ZU WIESBADEN.

ANALYSIS UND GEOMETRIE.

I. THEIL: DIE ANALYSIS.



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.





Vorwort.

Der Titel des italienischen Originals lautet:

Repertorio di matematiche superiori (definizioni, formole, teoremi, cenni bibliografici) per Ernesto Pascal, prof. ordinario nella R. Università di Pavia, I. Analisi, Ulrico Hoepli, editore-librajo della real casa, Milano 1898.

Der Herr Verfasser, der in sehr dankenswerther Weise sein Buch für die deutsche Ausgabe[1]) mit vielen Zusätzen und Abänderungen versehen und es zum Theil ganz neu bearbeitet hat, wünscht, dass aus der Vorrede zum 1. und 2. Theil des Originals die folgenden Stellen hervorgehoben werden:

„Gerade bei einem Buch, wie demjenigen, welches wir hiermit dem mathematischen Publikum vorlegen, scheint es nothwendig zu sein, vor allen Dingen über die Absicht, in welcher es geschrieben ist, Aufklärung zu geben, damit Missverständnisse unter allen Umständen ausgeschlossen sind."

„Das Buch hat den Zweck, auf einem möglichst kleinen Raum die wichtigsten Theorien der neueren Mathematik zu vereinigen, von jeder Theorie nur so viel zu bringen, als nöthig ist, damit der Leser sich in ihr orientiren könne und auf die Bücher zu verweisen, in welchen er Ausführlicheres finden kann."

„Es soll für den Studirenden, welcher während seiner Universitätszeit sich mit verschiedenen Zweigen der Mathematik beschäftigt hat, ein 'Vademecum', ein Taschenbuch sein, in welchem er, kurz zusammengefasst, alle jene mathematischen Begriffe und Resultate wiederfindet, die er während seiner Studien sich nach und nach angeeignet hat oder doch hätte aneignen sollen. Man würde sich daher irren, wenn man der Ansicht wäre, wir hätten eine Encyklopädie der Mathematik schreiben wollen; für eine solche Arbeit würden weder unsere Kräfte ausgereicht haben, noch hätte der verhältnissmässig geringe Umfang dieses Buches genügt. Wir haben weiter nichts

---

1) Eine polnische Ausgabe ist von Herrn S. Dickstein besorgt worden und in Warschau erschienen.

a*

als ein bescheidenes *Repertorium* abfassen wollen, welches, wie wir glauben, den Studirenden der Mathematik Dienste zu leisten im Stand ist."

„Das Buch kann den jungen Mathematikern auch insofern von grossem Nutzen sein, als es ihnen die Möglichkeit bietet, ihre Kenntnisse mit verhältnissmässig geringer Mühe auch auf andere Gebiete der Mathematik auszudehnen, wenn sie, wie es so oft vorkommt, das grosse Unrecht begehen, sich zu ausschliesslich in Einzelheiten einzulassen, d. h. sich mit zu grosser Abschliessung einem speciellen Theil der Wissenschaft zu widmen und alle übrigen Theile darüber zu vernachlässigen."

„Dieses Cultiviren einzelner Theile ist allmählich als nothwendige Folge der ungeheueren Entwickelung eingetreten, welche in diesem Jahrhundert die verschiedenen Zweige der Wissenschaft erlebt haben. Aber auch in der Specialisirung ist Masshalten von Nöthen und wir haben immer geglaubt, dass es nicht schön ist, wenn man sieht, wie Mathematiker, man könnte sagen absichtlich, die eigene Ausbildung auf ein eng begrenztes Gebiet beschränken und sich für berechtigt halten, den benachbarten Gebieten keinen einzigen Blick zu schenken. Am wenigsten schön aber ist es, wenn junge Leute zu früh sich solchen Neigungen hingeben."

„Wir sind der Meinung, dass man mit allen Kräften eine so gefährliche Tendenz bekämpfen sollte. Eine geistige Diät, welche mit einer einzigen Speise beginnt und endet, kann Niemandem zum Vortheil gereichen und nur grosse Uebel zur Folge haben. Denn, wie Gladstone sehr richtig in einer Rede sagte, die er im Jahr 1879 an die Studenten der Universität Glasgow richtete, bei solcher Exclusivität beraubt man sich des Vorzugs des Seitenlichts, welches die Reiche der Wissenschaft gegenseitig aufeinander werfen und man wird dazu neigen, den Werth und den Einfluss des eigenen beschränkten Verdienstes zu überschätzen. Wenn dieses Urtheil nun für die Verhältnisse berechtigt ist, welche zwischen den verschiedenen Wissenschaften bestehen, um wie viel mehr wird es nicht für die verschiedenen Abtheilungen und Unterabtheilungen einer und derselben Wissenschaft gelten? Und muss es nicht noch viel mehr gerade bei den mathematischen Wissenschaften anerkannt werden, deren neueste Fortschritte immer deutlicher gezeigt haben, wie gebrechlich die Schranken sind, welche die verschiedenen Theile zu trennen schienen?"

„Die Anordnung des Stoffes ist bei jeder Theorie fast immer dieselbe; zuerst werden die Definitionen und Grundbegriffe der Theorie gegeben, alsdann die Theoreme und Formeln ohne Beweis aufgestellt, welche die Verbindung zwischen den durch die vorhergehenden Definitionen eingeführten Dingen oder Grössen bilden, und schliesslich ein kurzer Hinweis auf die Literatur über die betreffende Theorie gebracht."

„Da es nicht möglich war, Alles zu bringen, haben wir uns sehr oft auf das Wichtigste beschränken müssen, und die Schwierigkeiten, bei der Auswahl des Stoffes den richtigen Principien zu folgen, sind nicht geringe und nicht wenige gewesen; wir glauben auch nicht, dass es uns immer gelungen ist, sie auf die beste Art zu überwinden; jedenfalls bitten wir den Leser bei der Beurtheilung aller Einzelheiten unseres bescheidenen Buches, die grösste ihm mögliche Nachsicht zu üben."

„Man glaube nicht, dass wir alle Literaturangaben gemacht hätten, die zu machen möglich waren; das wäre übertrieben und nutzlos gewesen; es war, wie uns scheint, nur geboten, die wichtigsten Arbeiten, die einen bestimmten Gegenstand betreffen, hervorzuheben, d. h. diejenigen, welche den grössten Eindruck hinterlassen haben und als die Grundlagen der übrigen zu betrachten sind; denn wollte man sich von der Sucht, möglichst viel zu citiren, beherrschen lassen, so würde dem Leser schliesslich die natürlichste und einfachste Orientirung verloren gehen."

„Bei der allgemeinen Anordnung der verschiedenen Theile waren wir manchmal gezwungen, um eine gewisse Symmetrie einhalten zu können, von der logischen Aufeinanderfolge abzuweichen und Theorien vorauszuschicken, zu deren Beweis (aber wohlverstanden nicht zum Verständniss der Resultate) Begriffe nöthig sind, die erst später gebrachten Theorien angehören. Bei dem Charakter unseres Buches scheint uns dies kein Missstand zu sein."

„Der Verfasser hofft, dass die mühsame Arbeit bei der Herstellung des Buches nützlich und nicht umsonst gewesen sei, und dass der nachsichtige Leser berücksichtigen werde, dass dieses Werk, in welchem die sämmtlichen so verschiedenartigen Theile der reinen Mathematik behandelt werden, nicht das Resultat des Zusammenwirkens vieler Verschiedener, sondern die Arbeit eines Einzigen ist."

An der Durchsicht der Druckbogen haben sich die Herren Professor Dr. Engel in Leipzig, Dr. Loewy in Freiburg im Breisgau, sowie der Herr Verfasser Professor Pascal in Pavia betheiligt. Herrn Dr. Loewy ist der Herausgeber ausserdem für zahlreiche briefliche Mittheilungen verpflichtet. Er spricht diesen Herren für ihre Liebenswürdigkeit und die grosse Mühe, die sie sich bei der Herstellung der deutschen Ausgabe gütigst haben machen wollen, auch hier seinen verbindlichsten Dank aus.

Die sehr ausführlichen alphabetischen Register am Ende eines jeden Theils sollen die Benutzung des Werkes erleichtern und werden dem Leser willkommen sein.

Der II. Theil des Repertoriums, der die Geometrie behandelt, wird gegen Ostern nächsten Jahres erscheinen.

Wiesbaden, im Mai 1900.

A. Schepp.



Inhaltsverzeichniss.

Kapitel IX. **Die Lehre von den Transformationsgruppen.**

Kapitel X. **Die Differenzenrechnung.**

Kapitel XI. **Die Variationsrechnung.**

Kapitel XII. **Die Invariantentheorie der algebraischen Formen.**

Kapitel XVII. **Die hyperelliptischen und die Abel'schen Functionen.**

Kapitel XVIII. **Specielle Functionen.**

Kapitel XIX. **Die analytische Darstellung der Functionen.**

Kapitel XX. **Theorie der ganzen rationalen oder complexen Zahlen.**



Kapitel I.

Einleitende Lehren.

§ 1. Irrationale Zahlen.

Wir wollen annehmen, zwei Klassen *rationaler Zahlen, die Klasse A und die Klasse B*, seien dadurch definirt, dass jede Zahl von A stets kleiner als jede Zahl von B ist, und dass sich ferner, wenn σ beliebig klein genommen wird, immer zwei Zahlen a in A und b in B derart finden lassen, dass $b - a$ kleiner als σ aber nicht Null ist.

Die beiden Klassen A und B individualisiren eine Zahl, die einer einzigen der beiden Klassen angehören oder auch zu keiner von ihnen gehören aber *rational* sein kann; trifft keiner dieser beiden Fälle zu, so sagt man, *die beiden Klassen A, B bestimmen eine irrationale Zahl.*

Die irrationale Zahl stellt sich mithin dar als die Trennungszahl zwischen den Zahlen der Klasse A und denen der Klasse B; sie wird mit $\alpha = (A, B)$ bezeichnet.

Eine rationale Zahl n heisst *kleiner* als α, wenn in der Klasse A Zahlen vorkommen, die grösser als n sind; sie heiſst *grösser* als α, wenn in der Klasse B Zahlen existiren, die kleiner als n sind.

Zwei irrationale Zahlen α, α' heissen *gleich*, wenn jede rationale Zahl, die kleiner als α, auch kleiner als α' ist, und jede rationale Zahl, die grösser als α, auch grösser als α' ist.

Sollen zwei irrationale Zahlen

$$\alpha = (A, B), \quad \alpha' = (A', B')$$

gleich sein, so ist dazu nothwendig und ausreichend, wenn jede Zahl von A kleiner als eine gewisse Zahl von A' und jede Zahl von A' kleiner als eine gewisse Zahl von A ist.

Soll eine Zahl α grösser als α' sein, so ist dazu nothwendig und ausreichend, dass eine Zahl von A existire, die grösser als alle Zahlen von A' ist.

Eine Zahl β wird die Summe der Zahlen

$$\alpha = (A, B), \quad \alpha' = (A', B')$$

genannt, wenn sie durch die beiden Klassen von Zahlen definirt wird, die man durch Addition aller Zahlen von A auf jede nur mögliche Weise zu allen Zahlen von A' und ebensolche Addition aller Zahlen von B zu allen von B' erhält. Man schreibt in Symbolen

$$\beta = \alpha + \alpha' = (A + A', B + B').$$

Sind α und α' gleich, so sind es auch

$$\alpha + \gamma, \quad \alpha' + \gamma,$$

worin γ ebenfalls eine durch Klassen bestimmte Zahl ist und $\alpha + \gamma$, $\alpha' + \gamma$ wie oben definirt werden.

Der *Unterschied* zweier mit Hülfe von Klassen bestimmter Zahlen wird auf ähnliche Art gefunden, indem man diese Operation auf alle mögliche Weise an den Zahlen ausführt, welche die Klassen bilden; man erhält in Symbolen

$$\alpha - \alpha' = (A - A', B - B').$$

Um die Multiplication und Division zu definiren, setzen wir zunächst voraus, $\alpha = (A, B)$ und $\alpha' = (A', B')$ seien positive Zahlen. Man kann dann alle Zahlen der Klassen A, B, A', B' positiv und von Null verschieden wählen. Die Multiplication wird durch

$$\alpha\alpha' = (AA', BB')$$

definirt; die Division durch

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \left(\frac{A}{B'}, \frac{B}{A'}\right).$$

Um diese Definition der Multiplication und Division auf den Fall auszudehnen, in welchem einer der Factoren oder beide negativ sind, bedient man sich der gewöhnlichen Zeichenregel.

Endlich gilt bei der Multiplication noch der Satz, dass ein Product Null ist, wenn einer der Factoren Null ist.

Das Potenziren und Wurzelausziehen lässt sich ebenso erklären, doch muss man vorher zeigen, dass die neuen Definitionen sich nicht im Widerspruch mit der oben gegebenen Definition des Productes befinden.

Man erhält in Symbolen

$$\alpha^n = (A^n, B^n)$$

$$\sqrt[n]{\alpha} = (\sqrt[n]{A}, \sqrt[n]{B}).$$

Wir wollen nun zu dem *irrationalen* Exponenten übergehen. n sei eine beliebige Zahl und α eine irrationale Zahl $\alpha = (A, B)$.

Wenn man n auf sämmtliche Potenzen erhebt, die durch alle Zahlen der Klasse A und dann der Klasse B gegeben sind, so heisst die durch diese so erhaltenen Klassen definirte Zahl die α^{te} Potenz von n; das ist in Symbolen:

$$n^\alpha = (n^A, n^B) \text{ für } n > 1$$
$$n^\alpha = (n^B, n^A) \text{ für } n < 1.$$

Die Grundeigenschaften der rationalen Zahlen und der Operationen mit ihnen erleiden durch die neuen Definitionen keine Aenderung.

Die Gesammtheit aller rationalen und irrationalen Zahlen bildet das Gebiet *der reellen Zahlen.*

Es gibt drei Haupttheorien über die irrationalen Zahlen: die hier vorgetragene stammt von Dedekind, *Stetigkeit und irration. Zahlen,* Braunschweig 1872; seiner Darstellung folgen Pasch, *Diff.-Rechn.*, Leipzig 1882; Bachmann, *Irrationalzahlen,* 1892; C. Jordan, *Cours d'analyse,* Paris, 2. Aufl. 1893, (Bd. 1, S. 1—7 sind die Irrationalzahlen behandelt); Capelli-Garbieri, *Anal. alg.,* Padua 1886; Bettazzi, *Teoria delle grandezze,* Pisa 1890; *Periodico di mat.*, 1887; Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable,* Paris 1886. Vergl. hierzu auch Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?,* Braunschweig 1888, Vorrede; Ricci, *Istituto Veneto,* 1893; *Della teoria dei numeri reali secondo il concetto di Dedekind,* Giornale di Battagl. 1897 und Capelli, ib. 1897.

Eine zweite Definition ist die Georg Cantor'sche; sie wurde zuerst von Heine, *Crelle,* 74 unter Berufung auf Mittheilungen von Cantor veröffentlicht, etwas später von ihrem Verfasser, *Math. Ann.*, Bd. 5; *Acta math.,* Bd. 2; siehe die Darstellung von Stolz, *Arithmetik*, Leipzig 1885, Bd. 1, § 7; ferner: Dini, *Grundlagen für die Theorie der Functionen* etc., Leipzig 1892; Harnack, *Elemente der Diff.- und Integralrechnung,* Leipzig 1881.

Eine dritte Theorie der Irrationalzahlen hat Weierstrass in seinen Vorlesungen auseinandergesetzt; über diese siehe Kossak, *Programmabhandlung des Werder'schen Gymnasiums,* Berlin 1872 und Pincherle, *Giorn. di Batt.*, Bd. 18.

Eine vergleichende Besprechung der drei Theorien findet man bei G. Cantor, *Math. Ann.*, Bd. 21, S. 564. Paul du Bois-Reymond hat diese formalen Theorien in seiner

Functionentheorie, Tübingen 1882 bekämpft. Schliesslich möchten wir auch noch auf Biermann, *Höhere Mathematik,* 1895 verweisen.

Die irrationalen Zahlen werden in zwei Kategorien getheilt: in die sogenannten *algebraischen,* welche die reellen Wurzeln von Gleichungen sind, in denen die Coefficienten aus *ganzen Zahlen* bestehen, und die *nicht algebraischen* oder *transcendenten.* Zahlen der zweiten Art sind z. B. die Zahl π und die Zahl e. Die Existenz der transcendenten Zahlen wurde zuerst von Liouville, später von Cantor nachgewiesen. Wir werden in der Folge den algebraischen und transcendenten Zahlen noch besondere Paragraphen widmen.

§ 2. Complexe Zahlen.

Wenn man die *imaginäre Einheit* i durch die Formel $i^2 = -1$ definirt, so hat eine complexe Zahl die Gestalt $a + ib$, worin a, b *reelle* Zahlen sind; a heisst *der reelle Theil,* b *der Coefficient des imaginären Theils.*

Um nicht gegen die Grundregeln des Rechnens zu verstofsen, muss man die folgenden Sätze gelten lassen:

Sollen zwei complexe Zahlen gleich sein, so müssen es die reellen und imaginären Theile getrennt sein.

Dazu, dass eine complexe Zahl Null sei, gehört, dass der reelle Theil und der imaginäre, jeder für sich, Null sei.

Zwei complexe Zahlen werden addirt oder subtrahirt, indem man die reellen und imaginären Theile getrennt addirt oder subtrahirt.

Die Zahl $a - ib$ heisst *conjugirt* zu $a + ib$.

Die Summe zweier complexen conjugirten Zahlen ist reell.

Das Product zweier complexen Conjugirten ist eine reelle Grösse und heisst das Quadrat des *Moduls* (nach Cauchy) oder auch *des absoluten Betrages* (nach Weierstrass) der complexen Zahl.

Die complexe Zahl kann man in der *(trigonometrischen)* Form

$$\varrho\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

schreiben, worin ϱ *der Modul* ist und als eine reelle stets positive Grösse angesehen werden kann, während α das *Argument* genannt wird.

Die complexen Zahlen lassen sich geometrisch durch die Punkte der Ebene darstellen, indem man der Complexen $a + ib$

den Punkt P mit der Abscisse a und der Ordinate b (rechtwinklige Coordinaten) entsprechen lässt. Gauss, Werke, Bd. 2, S. 171; Bd. 3, S. 6; vergl. Weierstrass, *Crelle*, Bd. 52, S. 289 und Pincherle, *Saggio* etc., *Giorn. di Battaglini*, Bd. 18, S. 211.

Bei der geometrischen Darstellung der complexen Zahl stellt der Modul ϱ den Abstand des Punktes P vom Coordinatenanfang O dar und das Argument α den Winkel, welchen die Gerade OP mit der x-Axe bildet.

Der Modul der Summe zweier complexen Zahlen ist kleiner als die Summe und grösser als die Differenz der Moduln.

Der Modul des Products oder des Quotienten ist dem Product bez. dem Quotienten der Moduln gleich.

Das Argument des Products oder des Quotienten ist der Summe bez. der Differenz der Argumente gleich.

Wenn n eine ganze Zahl ist, so erhält man die n^{te} Potenz einer in trigonometrischer Form ausgedrückten complexen Zahl, indem man den Modul auf die n^{te} Potenz erhebt und das Argument mit n multiplicirt (die Moivre'sche Formel).

Ist dagegen n eine rationale aber gebrochene Zahl von der Form $\frac{p}{q}$, so ist die n^{te} Potenz der complexen Zahl $\varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *gleich*

$$\varrho^{\frac{p}{q}}\left\{\cos\frac{p}{q}(\alpha + 2k\pi) + i\sin\frac{p}{q}(\alpha + 2k\pi)\right\},$$

worin k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Dieser Ausdruck hat jedoch nur eine endliche Anzahl verschiedener Werthe und zwar q Werthe, die man erhält, indem man k die Werthe $0, 1, 2, \cdots (q-1)$ *beilegt.*

Ist schliesslich n eine irrationale durch die beiden Klassen A, B definirte Zahl $n = (A, B)$, so hat die n^{te} Potenz der complexen Zahl zum Modul $\varrho^n = (A^n, B^n)$ (siehe § 1) *und zum Argument die durch die beiden Klassen von im Allgemeinen irrationalen Zahlen*

$$\{A(\alpha + 2k\pi),\quad B(\alpha + 2k\pi)\}$$

definirte Zahl, worin k, wie gewöhnlich, eine beliebige ganze Zahl bedeutet. In diesem Fall gibt es *unendlich viele Auflösungen.* Die Auflösung, welche dem k entspricht, für welches $\alpha + 2k\pi$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt, heisst *die Hauptauflösung.*

Die Definition *complexer Exponenten und Logarithmen* findet man in dem Kap. 13: über die Functionen complexer Variabeln.

Mittelst der geometrischen Darstellung der complexen Zahlen kann man geometrisch die Grundoperationen an den complexen Zahlen ausführen.

Wenn A, A' *die Punkte der Ebene sind, welche zwei complexe Zahlen darstellen, so erhält man ihre Summe, indem man das Parallelogramm mit den Seiten* OA, OA' *bildet, wobei* O *der Coordinatenanfang ist. Die dem Punkt* O *gegenüberliegende Ecke dieses Parallelogramms stellt die complexe Summe dar.*

Die Differenz ergibt sich auf dieselbe Art, wenn man statt der Punkte A, A' *den Punkt* A *und den in Bezug auf* O *symmetrisch zu* A' *gelegenen Punkt nimmt.*

Um das Product zweier durch die Punkte A, A' *dargestellten Zahlen zu bilden, nehme man auf der reellen Axe den Punkt* 1 *an, ziehe das Dreieck* $OA1$ *und mache das Dreieck* $OA'P$ *dem vorigen auf die Art ähnlich, dass die Seite* PA', *wenn man* $OA'P$ *so lange um den Eckpunkt* O *dreht, bis* OA' *mit* $O1$ *zusammenfällt, parallel zur Seite* $A1$ *wird. Der Punkt* P *stellt alsdann das Product der beiden complexen Zahlen dar.*

Den Quotienten schliesslich zweier durch A, A' dargestellten Zahlen erhält man auf folgende Art: *Man bilde das Dreieck* $OA1$, *nehme auf* OA *eine Strecke gleich* OA' *und ziehe von dem Endpunkt* K *dieser Strecke eine Gerade parallel zu* $A1$, *die* $O1$ *in* Q *trifft. Dreht man nun das Dreieck* OKQ *um* O, *bis* OK *mit* OA' *zusammenfällt, so ist die von dem Punkt* Q *alsdann eingenommene Lage der gesuchte Punkt, der den Quotienten* A' *dividirt durch* A *darstellt.*

Mit der geometrischen Darstellung der complexen Zahlen hängt die *Aequipollenzenrechnung* zusammen.

Die Darstellung des Imaginären durch Punkte einer Ebene findet man in der schon 1799 publicirten aber völlig unbeachtet gebliebenen und in Vergessenheit gekommenen Arbeit von C. Wessel. Vergl. die von der dänischen Akademie in französischer Uebersetzung besorgte Ausgabe: *Essai sur la représentation analytique de la direction,* Kopenhagen 1897. Bis diese Publication ans Licht gezogen wurde, galt als Begründer der Darstellung des Complexen in der Ebene: Argand, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires,* Paris 1806; *Gergonne Ann.*, 5, S. 208. Mit derselben Theorie trat 1828 Mourey hervor: *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires,* Paris, neu abgedruckt 1861. Durch Gauss a. a. O. wurde diese Theorie Gemeingut der Mathematiker; jedoch kommt ihm keine Priorität zu.

Die Hauptarbeiten sind ausser den bereits citirten:

Cauchy, *Mém. sur les quantités géométriques, Exerc. d'Analyse et de phys. math.*, 4, 1847; Bellavitis, *Opere sul calcolo delle equipollenze,* 1833—1874 (ein Verzeichniss derselben findet man in dem unten citirten Laisant); Hankel, *Vorlesungen über die complexen Zahlen,* Leipzig 1867; Hoüel, *Théorie des quantités complexes,* Paris 1874; Laisant, *Équipollences,* Paris 1887; Tannery, *Introd. à la théorie d. fonct.,* Paris 1886; Stolz, *Arithm.,* Bd. 2, Leipzig 1886.

§ 3. **Die Quaternionen.**

Eine der Verallgemeinerungen der complexen Zahlen bildet die sogenannte *Quaternionen*rechnung; ausser der gewöhnlichen Einheit der reellen Zahlen benutzt man noch drei andere Einheiten i_1, i_2, i_3 und bildet so die *Quaternion*

$$a_0 + i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3 .$$

Man muss suchen der allgemeinen Eigenschaft, dass das Product zweier Quaternionen wieder eine Quaternion sei, ihre Gültigkeit zu wahren und es daher so einrichten, dass das Product zweier Einheiten linear durch die Einheiten selbst sich ausdrücken lässt. Man setzt also

$$\begin{aligned} i_1^2 &= -1, & i_1 i_2 &= -i_2 i_1 = i_3, \\ i_2^2 &= -1, & i_2 i_3 &= -i_3 i_2 = i_1, \\ i_3^2 &= -1, & i_3 i_1 &= -i_1 i_3 = i_2. \end{aligned}$$

Schon daraus erkennt man, dass das Commutationsgesetz des Products für die neuen Zahlen im Allgemeinen nicht mehr gilt. Wenn $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ist, so heisst die Quaternion *scalar* oder ein *Scalar;* ist $a_0 = 0$, so nennt man sie einen *Vector;* der *Modul* der Quaternion ist

$$\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

und sowohl reell wie positiv.

Die Zahl

$$i_1 \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} + i_2 \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} + i_3 \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

heisst die *Axe* der Quaternion.

Jeder Quaternion kann man die Gestalt

$$\varrho(\cos\alpha + \lambda \sin\alpha)$$

geben, worin ϱ *der Modul,* α *das Argument und* λ *die Axe heisst.*

Von der Quaternion $\varrho(\cos\alpha - \lambda\sin\alpha)$ sagt man, sie sei zu $\varrho(\cos\alpha + \lambda\sin\alpha)$ *conjugirt.*

Das Quadrat der Axe ist der negativen Einheit gleich.

Das Product zweier conjugirten Quaternionen ist dem Quadrat des Moduls gleich.

Das Product zweier Quaternionen, welche dieselbe Axe haben, erhält man durch Multiplication der Moduln und Addition der Argumente. In diesem Falle ist das Product von der Reihenfolge der Factoren nicht abhängig.

Sind die zu multiplicirenden Quaternionen gleich, so besteht eine Formel, die der Moivre'schen ähnlich ist.

Die Quaternion $z = a_0 + i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3$ *genügt der Gleichung*

$$z^3 - (3a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)z + 2a_0(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 0.$$

Man kann sich allgemeiner complexe Zahlen von n Einheiten vorstellen, d. h. Zahlen von der Form

$$a = i_1 a_1 + i_2 a_2 + \cdots + i_{n-1} a_{n-1} + i_n a_n,$$

worin $i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}, i_n$ die n Einheiten sind.

Bei den complexen Zahlen, zu deren Bildung mehr als zwei Einheiten verwendet werden und mit denen sich bereits Gauss, *ges. Werke,* 2, S. 178 beschäftigte, ohne etwas hierüber zu publiciren, können, wie auch das Beispiel der Quaternionen lehrt, nicht mehr alle für die Grundoperationen: Addition, Subtraction, Multiplication und Division bei den reellen und den gemeinen complexen Zahlen gültigen Gesetze ausnahmslos aufrecht erhalten werden.

Näheres über die allgemeineren complexen Zahlen und die Quaternionen findet man bei:

Grassmann, *Ausdehnungslehre,* Stettin 1862; Hamilton, *Quaternions,* London 1866; Hankel, *Th. der complexen Zahlensysteme,* 1867; Tait, *elementares Handbuch der Quaternionen,* deutsche Uebers. von G. v. Scherff, Leipzig 1880; Hoüel, *Théorie des quaternions,* Paris 1874; Laisant, *Méthode des quaternions,* Paris 1881.



Ueber die aus n Einheiten gebildeten Grössen vergl. die Untersuchung von Weierstrass, *Gött. Nachr.*, 1884; Schwarz, Dedekind, Hölder, *Gött. Nachr.*, 1884, 85, 86; Berloty, *Th. des quant. complexes à n unités principales*, Pariser Doctordissertation 1886 und die Darstellung bei Stolz, *Arithm.*, Bd. 2, Leipzig 1886; ferner Study, *Leipz. Berichte*, 1889; Scheffers und Mollien, *Math. Ann.* 1891, 1893.

§ 4. Die Lehre von den Punktmengen (Aggregaten, Gesammtheiten etc.).

Hat man eine Masseinheit festgesetzt und auf einer Geraden (im Allgemeinen auf irgend einer Mannigfaltigkeit von einer einzigen Dimension) einen Anfangspunkt (Nullpunkt) angenommen, so kann man jedem reellen Werth einer Variabelen einen Punkt der Geraden entsprechen lassen und umgekehrt. Unendlich vielen oder endlich vielen Punkten der Geraden werden dann unendlich viele oder endlich viele Werthe der Variabelen entsprechen und umgekehrt. Die Gesammtheit dieser unendlich oder endlich vielen Punkte bildet das, was man *eine unendlich grosse bez. endliche Punktmenge einer Dimension oder lineare Punktmenge* nennt.

Wenn man dagegen statt einer einzigen Variabelen, deren zwei betrachtet und ein Cartesisches Coordinatensystem in einer Ebene annimmt, wie es in der analytischen Geometrie geschieht, und wenn man jedem in unendlich oder endlich grosser Anzahl auftretenden Werthepaar der beiden Variabelen einen Punkt der Ebene entsprechen lässt, so erhält man *eine unendlich bez. endlich grosse Punktmenge von zwei Dimensionen*. So lassen sich weiter Mengen von 3, $\cdots$ n Dimensionen definiren.

Grenzpunkte einer Menge heissen diejenigen, in deren Umgebung, sie möge so klein sein, wie sie wolle, immer Punkte der Menge fallen.

Jede unendlich grosse Punktmenge hat stets wenigstens einen Grenzpunkt. Eine endliche Menge hat keinen.

Wenn eine Punktmenge mehr als einen Grenzpunkt hat, *so bildet die Gesammtheit derselben die erste Ableitung der Menge.* Aehnlich erhält man aus ihr die übrigen *Ableitungen der Menge,* wenn die erste Ableitung eine *unendlich grosse* Menge ist.

Beisp. Die Menge $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$ hat zum Grenzpunkt den Punkt *Null.*

Die Menge, deren Punkte vom Typus $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$ $(n, m = 1, 2, 3, \cdots)$

sind, hat zu Grenzpunkten die Punkte vom Typus $\frac{1}{n}$, die selbst wieder eine unendlich grosse Menge bilden.

Die Menge der rationalen Punkte hat zur ersten Ableitung die Gesammtheit aller Punkte.

Jede Ableitung einer Menge enthält alle folgenden Ableitungen.

Wenn eine der abgeleiteten Mengen *endlich* ist, so hört mit ihr die Reihe der Ableitungen auf und die ursprüngliche Menge heisst eine solche von der ersten Gattung. Ist keine der abgeleiteten Mengen endlich, so ist sie von der zweiten Gattung.

Eine Menge heisst in einem Intervall *überall dicht* oder *pantachisch,* wenn in jedem beliebig kleinen in dem ersteren enthaltenen Intervall stets unendlich viele Punkte der Menge existiren.

Zwei Mengen heissen *von derselben Mächtigkeit,* wenn jedem Punkt der einen Menge eindeutig *ein* Punkt der zweiten Menge zugeordnet werden kann und umgekehrt. Wenn man die Punkte einer Menge eindeutig der aus der Reihe der natürlichen Zahlen gebildeten Menge zuordnen kann, so sagt man die Menge sei *abzählbar.*

Wenn die erste Ableitung einer linearen Punktmenge abzählbar ist, so lassen sich alle Punkte der Menge in Strecken vereinigen, deren Summe sich beliebig klein machen lässt.

Eine Menge heisst *perfect,* wenn sie mit ihrer ersten Ableitung und folglich auch mit allen folgenden identisch ist.

Hier wurden nur die Grundbegriffe der Lehre von den Mengen gegeben. Die Lehre selbst hat Georg Cantor begründet, *Math. Ann.,* Bd. 5, S. 123, 1872; Bd. 15, 17, 20, 21, 23; *Crelle,* Bd. 77, S. 258; Bd. 84, S. 242.

Die citirten Arbeiten sind theilweise wieder abgedruckt in den *Acta math.,* Bd. 2; vergl. auch Cantor, *Acta math.,* Bd. 4 und 7. Eine Aufzählung der zahlreichen Arbeiten, die sich mit der Cantor'schen Theorie der Punktmengen beschäftigen, gibt Vivanti, *Notice historique sur la théorie des ensembles,* Biblioth. math. Bd. 6, 1892, S. 9 und *Teoria degli aggregati,* Riv. di mat., Bd. 3, 1893, S. 189; vergl. auch Dini, *Grundlagen für eine Theorie der Funct.* etc., Leipzig 1892, S. 20.

§ 5. Allgemeiner Begriff der Function.

Wenn eine Variabele y derart an eine andere Variabele x gebunden ist, dass für jeden beliebigen Werth von x, welcher



in einem festen Intervall oder allgemeiner innerhalb einer gegebenen Menge von unendlich vielen Werthen liegt, y jedesmal einen einzigen und bestimmten Werth erhält, so heisst y *die Function von x in dem gegebenen Intervall oder der bestimmten Menge.* x wird die *unabhängige Variabele* genannt. Eine ähnliche Definition gilt für die Function y von *mehreren* Variabelen $x_1, x_2, \ldots$.

Von einer Function y von x sagt man, *sie sei einer analytischen Darstellung fähig,* wenn sich ein System analytischer Operationen, die man entweder an der Variabelen x allein oder gleichzeitig an beiden Variabelen x und y vorzunehmen hat, in der Art feststellen lässt, dass man mittelst des dem x beigelegten Werthes nach Ausführung dieser Operationen den Werth von y findet.

Die Function y von x heisst *einer geometrischen Darstellung fähig,* wenn man x und y zu Cartesischen Coordinaten eines Punktes der Ebene nehmen kann und alsdann der Bildort der Punkte mit den Coordinaten x und y eine Curve in dem gewöhnlichen Sinn des Wortes ist.

Die analytischen Darstellungen können zweierlei Art sein, *explicite* und *implicite.* Eine analytische Darstellung wird *explicit* genannt, wenn alle festgesetzten analytischen Operationen direct an der Variabelen x vorzunehmen sind und wenn man nach der Ausführung dieser analytischen Operationen ohne weiteres den Werth von y findet.

Nimmt man dagegen an, eine Function der beiden Variabelen x und y sei *analytisch* gegeben, d. h. ein beliebiges System analytischer Operationen sei gleichzeitig an den beiden Variabelen x und y auszuführen und man suche auf diese Art alle diejenigen Paare von Werthen x, y, für welche eine solche Function der beiden Variabelen Null ist, so kann man alsdann y im Allgemeinen als eine Function von x ansehen, seine Darstellungsart heisst aber: *durch eine Gleichung gegeben* oder auch *implicit.*

Wenn eine Function einer expliciten analytischen Darstellung fähig ist und die Symbole der analytischen Operationen, die in der Darstellung der Function vorkommen, nur solche der vier ersten Rechnungsoperationen oder der Erhebung in eine ganze Potenz sind und wenn ferner die Anzahl der Operationen *endlich* ist, so heisst die Function *rational.*

Die allgemeinste Form einer rationalen Function einer Variabelen ist

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_n x^n},$$

worin $a_0, a_1, \cdots, b_0, b_1, \cdots$ *constant sind.*

Wenn in der analytischen Darstellung auch das Symbol der Operation des Wurzelausziehens an der Variabelen x oder einer rationalen Function von x auftritt, so wird die gegebene Function *irrational* genannt.

Sie heisst *transcendent,* wenn in der analytischen Darstellung auch andere Operationen, als die eben genannten, vorkommen, z. B. die Operation des Logarithmusnehmens, die bez. der sogenannten trigonometrischen Functionen etc. und wenn solche Operationen selbstverständlich an der Variabelen x oder einer Function von ihr vorgenommen werden.

Wenn y eine Function von z und z eine Function von x ist, so heisst y eine (mittelst der Function z) *zusammengesetzte Function.* Eine ähnliche Definition gilt, wenn y eine Function mehrerer Variabelen $z_1, z_2, z_3, \cdots$ ist und diese wieder Functionen anderer.

Wenn y eine Function von x ist und x seinerseits als Function von y angesehen werden kann, so wird x die *inverse Function* von y genannt.

Eine Function f mehrerer Variabelen $x_1, x_2, \cdots$ nennt man *homogen,* wenn der Werth der Function nach Multiplication einer jeden Variabelen mit einer unbestimmten Grösse t, d. h. nach dem Ersetzen der $x_1, x_2, \cdots$ durch die Grössen $tx_1, tx_2, \cdots$ dem mit einer Potenz von t multiplicirten Werth der Function für die ursprünglichen Argumente gleich ist. In einer Formel ausgedrückt: f heisst homogen, wenn die Relation

$$f(tx_1, tx_2, \cdots) = t^r f(x_1, x_2, \cdots)$$

für jedes beliebige t und jedes beliebige System von Werthen $x_1, x_2, \cdots$ besteht. Die Zahl r heisst die Dimension oder der Grad der Function.

Das Wort *Function* findet man zuerst bei Leibniz, *Acta Erud.*, 1692; Bernoulli, *Mém. de l'Ac. de Paris*, 1718; Euler, *Introductio in Anal. infinit.*, 1748.

Der Gedanke, den Begriff der Function von dem ihrer analytischen Darstellung zu trennen, rührt von Lejeune-Dirichlet her.

§ 6. Ganze und rationale Functionen einer Variabelen.

Wenn zwei ganze Functionen (Polynome) $F(x)$, $f(x)$ einer Variabelen vom Grad m bez. n $(m > n)$ gegeben sind, so lassen sich auf eine einzige Art zwei andere Polynome $Q(x)$ vom Grad $m - n$ und $R(x)$ von einem kleineren als dem n^{ten} Grad so finden, dass man identisch

$$F(x) = f(x) Q(x) + R(x)$$

setzen kann.

$Q(x)$ heisst der *Quotient* und $R(x)$ der *Rest*. *Ist* $R(x) = 0$, *so sagt man, F sei durch f theilbar.*

Bildet man die Reihenfolge

$$\begin{aligned} f(x) &= R(x) Q_1(x) + R_1(x) \\ R(x) &= R_1(x) Q_2(x) + R_2(x) \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

so kommt man unter allen Umständen schliesslich zu einem Rest R_{i+1}, *der einer Constanten gleich ist.* Ist diese Constante Null, so sagt man, R_i sei der *grösste gemeinschaftliche Theiler von F und f.* Ist dagegen die Constante R_{i+1} von Null verschieden, so sagt man, die beiden Functionen F, f seien *prim* zu einander.

Wenn F_m, f_n *prim zu einander sind, so lassen sich immer auf eine einzige Art zwei andere ganze Functionen* G_{m-1}, g_{n-1} *so bestimmen, dass*

$$F_m g_{n-1} + G_{m-1} f_n = 1.$$

Die Möglichkeit, zwei ganze Functionen H_{m-k}, h_{n-k} *so zu bestimmen, dass man*

$$F_m h_{n-k} + f_n H_{m-k} = 0$$

hat, ist die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass die beiden Functionen F, f einen gemeinschaftlichen Theiler von einem Grad besitzen, der nicht kleiner als k ist.

Der Rest der Division von $f(x)$ *durch* $x - a$ *ist* $f(a)$. *Wird* $f(x)$ *gleich Null, wenn man* $x = a$ *setzt, so ist* $f(x)$ *durch* $(x - a)$ *theilbar.*

Wenn $(x - a)^\alpha$ ein Factor von $f(x)$ ist und $(x - a)^{\alpha+1}$ es nicht ist, so heisst a eine *vielfache Wurzel von der Vielfachheit* α oder eine α-fache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

Eine *allgemeine rationale Function* einer Variabelen x wird durch

$$\frac{F(x)}{f(x)}$$

ausgedrückt, worin F und f die Symbole zweier Polynome von x sind.

Wenn a eine α-fache Wurzel von

$$f(x) = 0$$

bedeutet, so lässt sich $\frac{R}{f}$, worin der Grad von R geringer als der von f ist, in

$$\frac{R(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{R_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}$$

zerlegen. Dabei ist A constant, $R_1(x)$ ein ganzes Polynom von einem um eine Einheit geringeren Grad als R und $f_1(x)$ der Quotient der Division der $f(x)$ durch $(x-a)^\alpha$.

$x_1, \cdots x_r$ seien die Wurzeln von $f(x) = 0$ und sie mögen der Reihe nach die Vielfachheiten $i_1, i_2, \cdots i_r$ haben; die rationale Function $\frac{R}{f}$ lässt sich dann, wenn R von niedrigerem Grad als f ist, immer in

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{f(x)} = {} & \frac{A_1}{(x-x_1)^{r_1}} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{r_1-1}} + \cdots + \frac{A_{r_1}}{(x-x_1)} \\ & + \frac{B_1}{(x-x_2)^{r_2}} + \frac{B_2}{(x-x_2)^{r_2-1}} + \cdots + \frac{B_{r_2}}{(x-x_2)} \\ & + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

zerlegen, worin A, B, $\cdots$ Constante sind.

Die Coefficienten A_1, A_2, $\cdots$ werden durch die folgenden recurrirenden (Recursions-) Formeln bestimmt, in denen die Accente an R und f Ableitungssymbole sind. Siehe unten Kap. VI.

$$R(x_1) - \frac{A_1}{r_1!} f^{r_1}(x_1) = 0$$

$$R'(x_1) - \frac{A_1}{(r_1+1)!} f^{r_1+1}(x_1) - \frac{A_2}{r_1!} f^{r_1}(x_1) = 0$$

$$\frac{R''(x_1)}{1 \cdot 2} - \frac{A_1}{(r_1+2)!} f^{r_1+2}(x_1) - \frac{A_2}{(r_1+1)!} f^{r_1+1}(x_1) - \frac{A_3}{r_1!} f^{r_1}(x_1) = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Aehnliche Formeln gelten für B_1, B_2, $\cdots$.

Wenn $r_1 = r_2 = \cdots = 1$ ist, so hat man einfach

$$A_1 = \frac{R(x_1)}{f'(x_1)}, \qquad B_1 = \frac{R(x_2)}{f'(x_2)}, \ \cdots.$$



Wenn alle Wurzeln von $f(x)$ verschieden sind, d. h. keine sich wiederholt, so erhält man die bemerkenswerthe Formel

$$\frac{R(x_1)}{f'(x_1)} + \frac{R(x_2)}{f'(x_2)} + \cdots + \frac{R(x_n)}{f'(x_n)} = 0,$$

falls der Grad von R wenigstens um zwei Einheiten niedriger, als der von f ist.

Wenn ferner $x^2 + px + q$ ein Factor des Nenners $f(x)$ ist, d. h. wenn man hat:

$$f(x) = (x^2 + px + q)^r f_1(x),$$

so ist identisch

$$\frac{R(x)}{f(x)} = \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2 + px + q)^r} + \frac{R_1(x)}{(x^2 + px + q)^{r-1} f_1(x)},$$

worin $R_1(x)$ eine neue ganze Function von geringerem Grad als dem von R ist und P_1, Q_1 Constanten bedeuten.

Unter derselben Voraussetzung, wie bei dem vorigen Satz, erhält man

$$\frac{R(x)}{f(x)} = \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2 + px + q)^r} + \frac{P_2 x + Q_2}{(x^2 + px + q)^{r-1}} + \cdots$$
$$+ \frac{P_r x + Q_r}{x^2 + px + q} + \frac{R_r(x)}{f_1(x)},$$

wo der Grad von R_r geringer als der von f_1 ist.

Wenn $f(x) = 0$ bei reellen Coefficienten imaginäre Wurzeln hat, so dient die vorstehende Formel zur Verwandlung von $\frac{R}{f}$ in *reelle* elementare Brüche.

Die Zerlegung einer rationalen gebrochenen Function in einfache Brüche findet sich schon bei Johann Bernoulli, *Werke*, Bd. 1; später haben sich auch Euler, Cauchy etc. damit beschäftigt.

§ 7. Die Theorie der Grenzen.

Man sagt, die Function y habe für x gleich a zur *Grenze* A, wenn für ein beliebig kleines gegebenes σ sich immer eine solche Umgebung von a finden lässt, dass der Werth von y, welcher zu jedem in dieser Umgebung enthaltenen x gehört, sich seinem absoluten Werth nach von A um eine Grösse unterscheidet, die kleiner als σ ist.

Man unterscheidet *Grenze zur Rechten* und *Grenze zur Linken,* je nachdem die angegebene Eigenschaft nur rechts oder nur links von a besteht; die Unterscheidung ist überflüssig, wenn die Eigenschaft auf beiden Seiten existirt.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung für die Existenz der Grenze besteht darin, dass man bei beliebig klein gegebenem σ immer eine Umgebung von a finden könne, für welche ihrem absoluten Werth nach die Differenz der beiden Werthe, die y in zwei beliebigen Punkten der Umgebung annimmt, kleiner als σ ist.

Falls A oder a unendlich gross sind, kann man die folgenden anderen Definitionen geben.

Man sagt, y habe zur Grenze $\pm\infty$ für ein dem a sich näherndes x, wenn sich bei beliebig gross gegebenem ω eine solche Umgebung von a finden lässt, dass für jedes in ihr enthaltene x der zugehörige Werth von y stets dasselbe Vorzeichen behält und seinem absoluten Werth nach grösser als ω ist. Man sagt, y habe zur Grenze A für ein dem $\pm\infty$ sich näherndes x, wenn sich bei beliebig klein gegebenem σ eine solche Zahl x' finden lässt, dass für jedes $x > x'$ (oder $< x'$) die Differenz $A - y$ ihrem absoluten Werth nach kleiner als σ ist. Man sagt, y habe zur Grenze $\pm\infty$ für ein dem $\pm\infty$ sich näherndes x, wenn sich bei beliebig gross gegebenem ω immer ein solcher Punkt x' finden lässt, dass für jedes $x > x'$ (oder $< x'$), y dasselbe Vorzeichen behält und seinem absoluten Werth nach grösser als ω ist.

Wenn drei Functionen y_1, y_2, y_3 von x derart sind, dass sich bei beliebig klein gegebenem σ eine Umgebung eines Punktes a finden lässt, für deren Punkte der Werth von y_2 immer zwischen den Werthen von y_1 und y_3 enthalten ist, und wenn die beiden letzten Functionen derselben Grenze A für $x = a$ zustreben, alsdann nähert sich auch y_2 für $x = a$ einer Grenze und diese Grenze ist A.

Wenn eine Function y für ein dem a sich näherndes x beständig wächst oder wenigstens nicht abnimmt und dabei immer kleiner als eine Zahl A bleibt, so lässt y für $x = a$ einen Grenzwerth zu und diese Grenze ist entweder A selbst oder eine Zahl, die kleiner als A ist.

Die Grenze der algebraischen Summe, des Productes und Quotienten von Functionen, die für $x = a$ Grenzen haben, ist der Summe, dem Product und dem Quotienten der Grenzen selbst gleich.

$$\lim_{n=\infty} \frac{h^n}{n!} = 0,$$

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{x} = 0,$$

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x=0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{y=0} \frac{a^y - 1}{y} = \log a,$$

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

$$\lim_{n=\infty} n \left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \log_e a,$$

$$\lim_{m=0} (1+m)^{\frac{1}{m}} = e,$$

$$\lim_{m=0} \frac{\log(1+m)}{m} = 1,$$

$$\lim_{m=0} \frac{\log(1+mx)}{m} = x,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{n} = 0,$$

$$\lim_{y=0} \frac{(1+y)^\mu - 1}{y} = \mu,$$

$$\lim_{n=\infty} \left\{n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right\} = \log a,$$

$$\lim_{n=\infty} \left\{1 + \frac{f(x)}{n}\right\}^n = e^{\lim f(x)},$$

$$\lim_{x=\infty} x\left\{\sqrt[x]{f(x)} - 1)\right\} = \log_e \lim f(x),$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1 \quad \text{(Stirling'sche Formel)},$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n} = \frac{4}{e},$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log(1+nx)}{n} = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} n e^{-nx^2} = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^r + 2^r + \cdots + n^r}{n^{r+1}} = \frac{1}{r+1},$$ wenn $r+1$ positiv ist.

Wenn $r+1$ nicht positiv ist, so wird der letzte Grenzwerth unendlich grofs.

$$\lim_{n=\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}{n} = 0.$$

Wenn $f(x+1) - f(x)$ für ein dem Unendlichgrossen sich näherndes x einer bestimmten Grenze A zustrebt und wenn $f(x)$ für jedes endliche x immer endlich bleibt und nur für $x = \infty$ unendlich gross wird, so hat man

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = A.$$

Es liege eine von Null und von Unendlichgross verschiedene Function $f(x)$ vor, die für jeden endlichen Werth von x grösser als eine festgesetzte Grösse bleibt, und die nur für $x = \infty$ entweder Null oder unendlich gross ist, und es sei

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = A;$$

alsdann ist auch

$$\lim_{x=\infty} \sqrt[x]{f(x)} = A.$$

Das Gauss'sche Theorem. Man habe die beiden Grössen α und β und es sei $\beta < \alpha$. *Bildet man nun die successiven Ausdrücke*

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta), & \beta_1 &= \sqrt{\alpha\beta}, \\ \alpha_2 &= \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1), & \beta_2 &= \sqrt{\alpha_1\beta_1}, \\ \alpha_3 &= \tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \beta_2), & \beta_3 &= \sqrt{\alpha_2\beta_2}, \\ &\cdots & &\cdots \end{aligned}$$

so ist

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = \lim_{n=\infty} \beta_n \quad \textit{(das arithmetisch-geometrische Mittel).}$$

§ 8. Die obere und die untere Grenze der Werthe einer Function.

Wenn $f(x)$ eine in einem ganzen Intervall von a bis b immer *endliche* Function ist, so gibt es entweder einen oder mehrere Punkte des Intervalles, in welchen $f(x)$ ihren *Maximalwerth* erhält, oder es giebt einen solchen Werth A, dass sich, auch wenn die $f(x)$, bei dem Variiren des x in dem Intervall, diesen Werth niemals *erreichen oder überschreiten* kann, doch bei beliebig klein gegebenem σ immer ein Punkt x in dem Intervall finden lässt, für den die Differenz zwischen A und dem Werth der f in x ihrem absoluten Werth nach kleiner als

σ ist. *In diesem zweiten Fall sagt man, A sei die obere Grenze der Werthe von f in x.* Analog wird die untere Grenze definirt.

Wenn ein *Maximum* der Werte der Function existirt, so kann es entweder der Eigenschaft, welche die obere Grenze charakterisirt, genügen, oder es kann ihr nicht genügen; *in dem letzteren Fall gibt es keine obere Grenze in dem wahren Sinn dieses Wortes, in dem ersteren gibt es eine obere Grenze, die zugleich ein Maximum ist.*

Wenn eine Function in einem Intervall eine obere Grenze A zulässt, so gibt es unzweifelhaft wenigstens einen Punkt x' in diesem Intervall von solcher Beschaffenheit, dass für die Punkte einer beliebig kleinen Umgebung von x' die obere Grenze der Werthe der Function immer A ist. (Der Weierstrass'-sche Satz.)

Die *Schwankung* der Function in einem Intervall nennt man die Differenz zwischen den Maximal- und Minimalwerthen, welche die Function in diesem Intervall annimmt, oder, wenn diese nicht existiren, die Differenz zwischen der oberen und unteren Grenze.

Für den ersten, bei welchem sich die Begriffe von oberer und unterer Grenze vorfinden, ist wohl Bolzano zu halten (s. Stolz, *Math. Ann.*, Bd. 18); später ist es dann Weierstrass gewesen, der von diesen Begriffen in der Analysis ausgiebigen Gebrauch gemacht hat.

§ 9. Die Lehre von den stetigen und unstetigen Functionen.

Eine Function $f(x_1, x_2, \cdots)$ heisst *stetig* in dem Punkt $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \cdots$, wenn ihre Grenze für $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \cdots$ dem Werth der $f(a_1, a_2, \cdots)$ gleich ist, mit anderen Worten: wenn sich bei beliebig klein gegebenem σ immer ein solches System von Werthen $h_1, h_2, \cdots$ finden lässt, dass für jedes System $x_1, x_2, \cdots$, welches den Bedingungen

$$a_1 - h_1 \leqq x_1 \leqq a_1 + h_1$$
$$a_2 - h_2 \leqq x_2 \leqq a_2 + h_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

genügt, die Differenz zwischen dem Werth, den f annimmt und

dem Werth $f(a_1, a_2, \cdots)$ ihrem absoluten Werth nach kleiner als σ ist.

Die allgemeinste Form einer stetigen und endlichen Function einer Variabelen, welche der Relation

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

genügt, ist $f(x) = ax$.

Die allgemeinste Form einer stetigen Function einer Variabelen, welche die Bedingung

$$f(x+y) = f(x)\, f(y)$$

erfüllt, ist $f(x) = A^{ax}$, *worin* A, a *Constanten sind.*

Die allgemeinste Form endlich einer stetigen Function einer Variabelen, welche der Relation

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

entspricht, ist $f(x) = A \log_a x$. Diese Theoreme sind von Cauchy.

Wenn eine Reihe stetiger Functionen einer oder mehrerer Variabelen eine gleichmässig konvergente Reihe ist (siehe Kap. IV), *so stellt sie eine stetige Function dieser Variabelen vor.*

Eine Reihe von Potenzen bildet im Innern des Convergenzbereiches eine stetige Function der Variabelen.

Wenn die Potenzreihe auch für den Endpunkt des Convergenzbereiches convergirt, so ist sie auch in einem solchen Endpunkt eine stetige Function (das Abel'sche Theorem).

Die Function einer Variabelen, die in einem ganzen Intervall stetig ist, heisst *gleichmässig* stetig, wenn sich bei beliebig klein gegebenem σ eine Zahl δ derart finden lässt, dass für *jedes* in dem Intervall enthaltene x und für *jedes* $\delta_1 < \delta$ stets

$$f(x \pm \delta_1) - f(x) < \sigma$$

ist.

Eine ähnliche Definition gilt für die Functionen mehrerer Variabelen.

Eine einfach stetige Function ist auch gleichmässig stetig (der Cantor'sche Satz).

Wenn eine Function in einem Intervall stetig ist, so kann man das letztere in eine endliche Anzahl von Theilintervallen derart zerlegen, dass in jedem von ihnen die Schwankung der Function kleiner als eine beliebige Grösse σ *ist.*

Die obere Grenze einer stetigen Function ist ein Maximum, die untere ein Minimum.

Ist eine stetige Function in einer unendlich grossen Anzahl von Punkten bestimmt, so ist sie es auch in den Grenzpunkten dieser Punkte.

Ist eine stetige Function in allen rationalen Punkten einer Strecke bestimmt, so ist sie es auch in den irrationalen.

Wenn eine in einem Intervall stetige Function in zwei Punkten des Intervalls Werthe von verschiedenem Vorzeichen annimmt, so hat sie in einem dazwischen liegenden Punkt den Werth Null.

Wenn eine stetige Function in zwei Punkten a, b eines Intervalls die beiden Werthe A und B hat, so erhält sie in den Zwischenpunkten jeden beliebigen zwischen A und B liegenden Werth. (Man beachte, dass diese Eigenschaft die stetigen Functionen nicht charakterisirt. Vergl. Darboux, *Mém. sur les fonctions disc.*, Ann. de l'Éc. normale, Bd. 4.)

Eine Function f heisst *unstetig in dem Punkt a*, wenn die Grenzen der $f(a - \delta)$ und $f(a + \delta)$ für $\delta = 0$ entweder 1) unbestimmt oder 2) ungleich oder 3) zwar einander gleich, aber dem Werth, den f in a annimmt, nicht gleich sind. In dem letzteren Fall findet eine *hebbare Unstetigkeit* statt, da sie durch Abänderung des Werthes der Function in a beseitigt werden kann. In dem ersten Fall heisst sie eine *Unstetigkeit der zweiten Art*, in allen anderen eine *gewöhnliche Unstetigkeit oder Unstetigkeit der ersten Art.*

Wenn f in a unstetig ist, so gibt es immer eine positive von Null verschiedene Zahl σ' derart, dass sich für jedes $\sigma > \sigma'$ immer ein Intervall in der Umgebung von a finden lässt, in welchem $f(x) - f(a) < \sigma$ ist, während dasselbe für jedes $\sigma < \sigma'$ nicht gilt.

Die Zahl σ' heisst der *Sprung* der Function in a. *Ist die Unstetigkeit von der ersten Art, so ist der Sprung die Differenz zwischen*

$$f(a) \quad \textit{und} \quad \lim f(a + \delta).$$

Wenn eine Function eine unendlich grosse Anzahl von Discontinuitätspunkten hat, so können die letzteren entweder eine solche Menge bilden, dass man sie in Intervalle einschliessen kann, deren Summe sich beliebig klein machen lässt, oder sie bilden eine solche Menge nicht. In dem ersten Fall sagt man, die Function sei *punktweise oder punktirt unstetig,* in dem zweiten, sie sei *total (linear) unstetig.* So gehört z. B. dieser zweiten Klasse die Function an, welche in

allen unendlich vielen Punkten einer endlichen Strecke unstetig ist.

Ausführlicheres findet man in den Werken von Dini, *Grundlagen* etc., Leipzig 1892; Stolz, *Arithm.*, Bd. 1, Leipzig 1885; Tannery, *Introduction à la th. des fonct.*, Paris 1886. Man vergl. auch Pascal, *Note critiche* etc., Mailand 1895, welche viele eigenartige Beispiele und die bez. Literaturnachweise enthalten.

§ 10. Die Lehre von den Combinationen. Die Binomialcoefficienten.

Die Anzahl der verschiedenen Arten, auf welche man n Gegenstände auf n feste Plätze vertheilen kann, heisst *die Anzahl der Permutationen der n Gegenstände.* Sie beträgt

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

Hat man für die n Gegenstände eine gewisse Reihenfolge festgesetzt und nimmt nun eine Permutation unter ihnen vor, so sagt man, in dieser Permutation bildeten zwei Gegenstände *eine Inversion* oder *Versetzung,* wenn sie in der umgekehrten Ordnung, wie bei der ursprünglichen Permutation, auf einander folgen. Eine Permutation heisst *gerade* oder *ungerade,* je nachdem sie eine *gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen* enthält.

Es gibt $\frac{n!}{2}$ gerade und ebensoviele ungerade Permutationen.

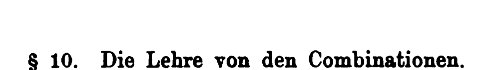
Die Anzahl der verschiedenen Arten, auf welche man k Gegenstände, die man beliebig unter n gegebenen Gegenständen auswählt ($k \leqq n$), auf k feste Plätze vertheilen kann, heisst *die Anzahl der Dispositionen der n Gegenstände zu je k.* Sie ist durch

$$D_{n,k} = n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

gegeben.

Wenn $k = n$ ist, so werden *die Dispositionen* zu *Permutationen.*

Die Anzahl der verschiedenen Arten ferner, auf welche man unter n gegebenen Gegenständen k auswählen kann, ohne Rücksicht auf die Ordnung zu nehmen, in welcher die k Dinge gewählt werden, heisst die Anzahl der *einfachen Combinationen* der n Gegenstände zu je k.



Sie beträgt

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} = \binom{n}{k}$$
$$= \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{P_n}{P_k \cdot P_{n-k}}.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar der Satz:

$$C_{n,k} = C_{n,n-k}.$$

Wenn in den Dispositionen ein Element mehrere Mal wiederholt werden kann, so erhält man die *Dispositionen mit Wiederholung.* Ihre Anzahl ist

$$D'_{n,k} = n^k.$$

Wenn in den Combinationen jedes Element mehrere Mal wiederholt werden kann, so erhält man die *Combinationen mit Wiederholung.* Ihre Anzahl beträgt

$$C'_{n,k} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$$
$$= C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Die Zahlen $C_{n,k}$ nennt man auch *die Binomialcoefficienten,* weil sie die Coefficienten der verschiedenen Glieder in der Entwickelung der Potenz eines Binoms sind.

Die Beziehungen zwischen ihnen sind äusserst zahlreich:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k},$$

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k, \quad \binom{n}{0} = 1,$$

$$\binom{n}{k} = 0 \text{ (wenn } n < k), \quad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0,$$

$$\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1}\binom{k+1}{k} + \binom{n}{k+2}\binom{k+2}{k} - \cdots + (-1)^{n-k}\binom{n}{n}\binom{n}{k} = 0,$$

$$1 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}^2 = (-1)^{\frac{1}{2}n}\binom{n}{\frac{1}{2}n},$$ wenn n gerade ist, und $= 0$, wenn n eine ungerade Zahl bedeutet;

$$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n,$$

$$1+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\binom{n}{3}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

Für die Binomialcoefficienten von $-\frac{1}{2}$ gelten die bemerkenswerthen Ausdrücke

$$\binom{-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2}, \qquad \binom{-\frac{1}{2}}{2}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4},$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{3}=-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}, \quad \binom{-\frac{1}{2}}{4}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}, \text{ etc.}$$

Andere complicirtere Beziehungen zwischen den Binomialcoefficienten ergeben sich aus den Zeipel'schen Determinanten. Siehe Pascal, *Determinanti;* vergl. Kap. 3, § 3 des vorliegenden Buches und Scott, *Theory of determinants,* S. 83—88, Cambridge 1880.

Eine ganze positive Zahl N lässt sich immer und auf eine einzige Art als Summe von n Binomialcoefficienten ausdrücken, deren Indices gegeben sind und aus den natürlichen Zahlen von 1 *bis n bestehen, während von ihren Basen diejenige die kleinere ist, welche zu einem kleineren Index gehört*[1]; *d. h. die Formel*

$$N=\binom{x_1}{1}+\binom{x_2}{2}+\cdots+\binom{x_n}{n}, \qquad (x_k < x_{k+1})$$

hat immer eine und nur eine Auflösung in ganzen positiven $x_1, x_2, \cdots x_n$.

Bezeichnet man mit dem Symbol

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

die Zahl

$$\binom{n+k-1}{k},$$

so erhält man den weiteren Satz:

Wenn eine ganze positive Zahl N gegeben ist, so hat die Formel

$$N=\begin{bmatrix} 2 \\ x_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 \\ x_2 \end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix} n+1 \\ x_n \end{bmatrix},$$

in welcher

$$x_k < x_{k+1}$$

---

1) Von den Binomialcoefficienten $\binom{n}{k}$ nennen wir n die *Basis* und k den *Index*.

ist, immer nur eine Auflösung in ganzen positiven Zahlen x_1, $x_2, \cdots x_n$. (Vergl. Pascal, *Giorn. di Batt.*, Bd. 25.)

Sämmtliche Binomialzahlen lassen sich mittelst des sogenannten *Pascal'schen arithmetischen Dreiecks*

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad\quad 1 \\
1 \quad\quad 2 \quad\quad 1 \\
1 \quad\quad 3 \quad\quad 3 \quad\quad 1 \\
1 \quad\quad 4 \quad\quad 6 \quad\quad 4 \quad\quad 1 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}$$

bilden, in welchem man die Zahlen einer Zeile durch Addition der beiden in der vorhergehenden Zeile unmittelbar über ihnen stehenden erhält.

Die Zahlen einer Horizontalreihe sind die Binomialcoefficienten in Bezug auf die ganzen positiven Zahlen, diejenigen einer Diagonale sind, abgesehen vom Vorzeichen, diese Coefficienten in Bezug auf ganze negative Zahlen.

Weitere die Binomialcoefficienten betreffende Formeln findet man bei Hagen, *Synopsis der höh. Math.*, Berlin 1891, Bd. 1, S. 64 u. ff.

Figurirte Zahlen. Einen allgemeineren Fall der Binomialcoefficienten stellen die figurirten Zahlen dar. Um sie zu bilden, verallgemeinert man die Construction des Pascal'schen arithmetischen Dreiecks, von dem oben die Rede war.

Man bilde das Dreieck

$$\begin{array}{c}
\delta \qquad\qquad 1 \\
\delta \qquad\qquad 1+\delta \qquad\qquad 1 \\
\delta \qquad\qquad 1+2\delta \qquad\qquad 2+\delta \qquad\qquad 1 \\
\delta \qquad\qquad 1+3\delta \qquad\qquad 3+3\delta \qquad\qquad 3+\delta \qquad\qquad 1 \\
\delta \quad 1+4\delta \qquad\qquad 4+6\delta \qquad\qquad 6+4\delta \qquad\qquad 4+\delta \quad 1 \\
\cdot\;\cdot ,
\end{array}$$

in welchem jedes Element einer Zeile durch Addition der beiden in der vorhergehenden Zeile über ihm stehenden Elemente erhalten wird. Für $\delta = 1$ wird dieses Dreieck zum Pascal'schen.

Die in der dritten Diagonale liegenden Elemente, wenn man als erste Diagonale die der Elemente δ ansieht, sind die *Polygonalzahlen* von der 1ten, 2ten, 3ten, $\cdots$ Ordnung je nach dem Werth von δ; die Elemente in der vierten Diagonale sind die *Polyederzahlen* (von der 1ten, 2ten, 3ten, $\cdots$ Ordnung, je

nachdem $\delta = 1, 2, 3, \cdots$ ist) etc. Diese Zahlen führen zusammen den Namen *figurirte Zahlen.*

Die Polygonalzahlen von der zweiten Ordnung sind die Quadratzahlen.

Die *Polygonal*zahlen sind durch die Formel

$$\tfrac{1}{2}(1 + n)(2 + n\delta)$$

gegeben, die *Polyeder*zahlen dagegen durch

$$\tfrac{1}{6}(1 + n)(2 + n)(3 + n\delta).$$

Die Summe der ersten n Polygonalzahlen beträgt:

$$\sum = \tfrac{1}{6} n (n + 1) [(n - 1)\delta + 3]$$

und die der ersten n Polyederzahlen:

$$\sum = \tfrac{1}{24} n (n + 1)(n + 2) [(n + 1)\delta + 4].$$

Jede ganze positive Zahl ist die Summe von drei oder weniger Polygonalzahlen 1[ter] *Ordnung, von vier oder weniger Polygonalzahlen* 2[ter] *Ordnung etc., im Allgemeinen von n oder weniger Polygonalzahlen der* $(n - 2)$[ten] *Ordnung (das Fermat'sche Theorem).*

Die Untersuchungen über die figurirten Zahlen wurden zum grossen Theil von Euler angestellt. Den vorstehenden Satz hat Fermat ohne Beweis gegeben; den Beweis für die ersten Fälle findet man bei Euler, *Acta Petrop.*, Bd. 2, S. 48, 1777; siehe auch Lagrange, *Mém. Berl.*, 1770; Gauss, *Disq. arithm.* Art. 293, Leipzig 1801, wieder abgedruckt in den ges. Werken, Bd. 1, Göttingen 1863, und andere.



Kapitel II.

Die Lehre von den Substitutionengruppen.

§ 1. Allgemeines.

Wenn n Elemente gegeben sind und zwei Permutationen von ihnen festgestellt werden, so heisst die Operation des Uebergangs von der ersten Permutation zur zweiten *Substitution* unter den n Elementen.

Es gibt $n!$ Substitionen unter n Elementen.

Wenn man an den n Elementen zuerst eine Substitution, dann eine zweite, etc. anbringt, so ist das Endresultat eine neue an diesen Elementen vorgenommene Substitution; diese letzte Substitution heisst das *Product der gegebenen* und, wenn alle gegebenen einander gleich sind, *eine Potenz der Substitution.*

Eine *Substitution* nennt man *identisch,* wenn sie alle Elemente unverändert lässt; sie wird durch das Symbol 1 dargestellt.

Wenn das Product zweier Substitutionen von der Reihenfolge der Factoren unabhängig ist, so heissen die Substitutionen *vertauschbar.*

Wenn das Product zweier Substitutionen die Einheit ist, so nennt man sie *invers* zueinander; ist s eine von ihnen, so wird die zweite durch s^{-1} dargestellt.

Es gibt immer eine Potenz einer Substitution, welche der Einheit gleich ist; der Exponent dieser Potenz heisst, wenn alle vorhergehenden Potenzen die Einheit nicht ergeben, *die Ordnung der Substitution.*

Man nennt eine Substitution *cyklisch* oder einen *Cyklus,* wenn entweder alle gegebenen Elemente oder ein Theil derselben in cyklischer Ordnung permutirt werden.

Jede beliebige Substitution kann man immer in ein Product von Cyklen zerlegen.

Eine Substitution, welche an die Stelle der Elemente $a, b, c, \cdots$ die Elemente $a', b', c', \cdots$ setzt, wird durch das Symbol

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \cdots \\ a' & b' & c' & \cdots \end{pmatrix}$$

dargestellt. Die Elemente a', b', c', $\cdots$ bilden eine Permutation derselben Elemente a, b, c, $\cdots$.

Wenn die Substitution cyklisch ist, so werden die Elemente $abc\cdots$ bez. durch die Elemente $bcd\cdots$ ersetzt; alsdann wird sie einfacher mit dem Symbol

$$(abc\cdots m)$$

bezeichnet, indem man die Elemente in der Reihenfolge, in welcher das eine dem anderen substituirt wird, hinter einander in eine Klammer setzt.

Die Ordnung einer cyklischen Substitution ist der Anzahl ihrer Elemente gleich.

Ein Cyklus von der zweiten Ordnung heisst eine *Transposition.*

Jede Substitution kann als Product von Transpositionen dargestellt werden.

Eine Substitution ist *gerade oder ungerade,* je nachdem die Anzahl der Transpositionen, aus denen sie gebildet werden kann, gerade oder ungerade ist.

Ist eine Substitution s von der Ordnung m, so ist eine beliebige ihrer Potenzen $s^{m'}$ von der Ordnung $\frac{m}{d}$, worin d den grössten gemeinschaftlichen Theiler von m und m' bedeutet.

Man sagt, eine Gesammtheit von Substitutionen *bilde eine Gruppe,* wenn das Product zweier beliebiger von ihnen eine Substitution bildet, die wieder zu den gegebenen gehört.

Die Anzahl der Substitutionen einer Gruppe gibt zugleich *die Ordnung der Gruppe an.*

Die Ordnung einer Gruppe ist immer ein Theiler von $n!$.

Wenn alle Substitutionen einer Gruppe H in denen einer anderen Gruppe G enthalten sind, so heisst H *eine Untergruppe oder ein Theiler von G und die Ordnung von H ist in derjenigen von G ohne Rest enthalten.*

Die Ordnung einer Gruppe ist ein Vielfaches der Ordnung einer jeden ihrer Substitutionen.

Die Gruppe aller $n!$ Substitutionen wird *die symmetrische* Gruppe genannt.

Alle geraden Substitutionen bilden eine Gruppe, welche die alternirende Gruppe genannt wird; sie ist von der $(\frac{1}{2}n!)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Wenn $x_1, x_2, \cdots, x_n$ die n Elemente sind, so ist jede Gruppe, welche die $n - 1$ Transpositionen

$$(x_\alpha x_1)(x_\alpha x_2)\cdots(x_\alpha x_{\alpha-1})(x_\alpha x_{\alpha+1})\cdots(x_\alpha x_n)$$

enthält, mit der symmetrischen Gruppe identisch.

Diejenigen Substitutionen einer beliebigen Gruppe, welche der alternirenden Gruppe angehören, bilden eine Untergruppe, welche entweder mit der gegebenen Gruppe zusammenfällt oder deren Ordnung halb so gross ist, wie die Ordnung der gegebenen Gruppe.

Wenn eine Gruppe die $n - 2$ cyklischen Substitutionen

$$(x_1 x_2 x_3)(x_1 x_2 x_4)\cdots(x_1 x_2 x_n)$$

enthält, so ist sie entweder die alternirende oder die symmetrische Gruppe.

Die Potenzen einer Substitution bilden eine Gruppe, deren Ordnung der Ordnung der Substitution gleich ist.

Die zweien Gruppen gemeinschaftlichen Substitutionen bilden eine neue Gruppe.

Wenn p eine Primzahl ist und p^k eine in $n!$ aufgehende Potenz von p, so existirt eine Gruppe von der Ordnung p^k. Der Satz stammt von Sylow, *Math. Ann.*, Bd. 5; vergl. den Frobenius'schen Beweis in *Crelle*, 100, sowie Weber's *Algebra*, Bd. 2, S. 122. *Wenn die Ordnung einer Gruppe durch die Primzahl p theilbar, also $k = 1$ ist, so enthält die Gruppe Substitutionen von der Ordnung p.* Cauchy, *Exercises d'analyse*, Bd. 3.

Zwei Substitutionen heissen *ähnlich*, wenn sie sich nur durch die Benennung der Elemente unterscheiden, welche sie enthalten.

Zwei Gruppen nennt man *ähnlich*, wenn sie aus derselben Anzahl von Substitutionen zusammengesetzt sind und man die Substitutionen der einen denen der anderen derart eindeutig zuordnen kann, dass der Uebergang von den Substitutionen der einen Gruppe zu den entsprechenden der anderen durch eine Aenderung der Benennung der Elemente geschieht, welche für alle Substitutionen gleichmässig ist.

Wenn zwei Substitutionen oder zwei Gruppen ähnlich sind, so gibt es immer eine solche Substitution s, dass das aus

$$s^{-1} \cdot A \cdot s$$

gebildete Product, in welchem A eine der beiden gegebenen Substitutionen oder eine Substitution einer der beiden gegebenen

Gruppen bezeichnet, der anderen der gegebenen Substitutionen oder der entsprechenden Substitution der zweiten gegebenen Gruppe gleich ist.

Das Product $s^{-1}As$ heisst *die Transformirte von A durch s.*

Jede Substitution ist allen ihren Transformirten ähnlich.

Wenn s, s' zwei Substitutionen bezeichnen, so sind die beiden Producte

$$ss', \; s's$$

zwei ähnliche Substitutionen.

Wenn ss' vertauschbar sind, so ist die Transformirte von s durch s' die Substitution s selbst.

Die Transformirte eines Products ist dem Product der Transformirten der Factoren gleich.

Sind zwei Substitutionen vertauschbar, so sind es auch ihre durch eine beliebige dritte Substitution gebildeten Transformirten.

Alle Substitutionen, mit deren Hülfe eine gegebene Gruppe in sich selbst transformirt wird, bilden eine Gruppe.

Wenn eine Gruppe durch dieselbe Substitution transformirt wird, so bilden die transformirten Substitutionen wieder eine Gruppe, welche der gegebenen ähnlich ist.

Wenn eine Substitution s von der Beschaffenheit ist, dass die Producte

$$s \cdot A,$$

worin A eine beliebige Substitution einer Gruppe G bedeutet, in ihrer Gesammtheit den Producten $B \cdot s$ gleich sind, worin B ebenfalls eine Substitution von G ist, alsdann sagt man, *die Substitution s sei mit der Gruppe G vertauschbar.*

Wenn alle Substitutionen einer Gruppe H diese Eigenschaft bez. einer anderen Gruppe G besitzen, so sagt man, *die ganze Gruppe H sei mit G vertauschbar.* Ist in einem solchen Fall H eine Untergruppe von G, so heisst sie *eine invariante (ausgezeichnete) Untergruppe (oder ein Normaltheiler).*

Alle Substitutionen von n Elementen, die mit einer gegebenen Substitution derselben Elemente oder mit einer gegebenen Gruppe vertauschbar sind, bilden eine Gruppe, welcher die gegebene Gruppe als invariante Untergruppe angehört.

Wenn die Anzahl der Elemente mehr als 4 beträgt, so enthält eine Gruppe, welche mit einer beliebigen Substitution vertauschbar ist, alle geraden Substitutionen und mithin die alternirende Gruppe.

Für $n = 4$ besitzt die Gruppe der vier Substitutionen

$$[1, \; (x_1x_2)\,(x_3x_4), \; (x_1x_3)\,(x_2x_4), \; (x_1x_4)\,(x_2x_3)]$$

dieselbe Eigenschaft.

Eine Gruppe G heisst *zusammengesetzt*, wenn sie eine invariante Untergruppe H enthält, und die letztere nennt man eine *invariante Maximaluntergruppe* oder *grössten Normaltheiler*, wenn sie in keiner der anderen Untergruppen von G, die ebenfalls invariant sind, enthalten ist.

Bildet man eine Reihe von Gruppen

$$G\, G_1\, G_2 \cdots 1$$

derart, dass jede folgende eine invariante Maximaluntergruppe der vorhergehenden ist, so erhält man *die Reihe der Zusammensetzung von G*. Wenn

$$r, \quad r_1 = \frac{r}{e_1}, \quad r_2 = \frac{r_1}{e_2}, \cdots$$

die Ordnungen der Gruppen der Reihe sind, so heissen die ganzen Zahlen $e_1, e_2, \cdots$ *die numerischen Factoren der Zusammensetzung von G*.

Wenn eine zusammengesetzte Gruppe zwei Reihen der Zusammensetzung hat, so ist die Anzahl der Glieder bei beiden Reihen dieselbe, und die numerischen Factoren der Zusammensetzung sind, abgesehen von der Aufeinanderfolge, die gleichen. Ueber diesen Jordan'schen Satz und Erweiterungen desselben vergl. Hölder, *Math. Ann.*, Bd. 34, 1889: Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen.

Die Reihe der Zusammensetzung der symmetrischen Gruppe besteht aus der alternirenden Gruppe und der Einheit, wenn n grösser als 4 ist; die Factoren der Zusammensetzung sind mithin 2 und $\frac{1}{2}n!$; die alternirende Gruppe von mehr als 4 Elementen ist nicht zusammengesetzt.

Jede nicht in der alternirenden Gruppe enthaltene Gruppe ist zusammengesetzt; einer der Factoren der Zusammensetzung ist 2.

Für $n = 4$ ist die Reihe der Zusammensetzung der symmetrischen Gruppe

1. *die symmetrische Gruppe,*
2. *die alternirende Gruppe,*
3. *ist* $G_2 = [1, (x_1x_2)(x_3x_4), (x_1x_3)(x_2x_4), (x_1x_4)(x_2x_3)]$,
4. $G_3 = [1, (x_1x_2)(x_3x_4)]$,
5. $G_4 = 1$.

§ 2. Die Transitivität.

Wenn die Substitutionen einer Gruppe derart sind, dass man mittelst ihrer k beliebig ausgewählte Elemente in k beliebig

ausgewählte andere Elemente transformiren kann, so heisst die Gruppe *k fach transitiv.* Ist $k = 1$, so nennt man die Gruppe *einfach transitiv.* Im anderen Falle heisst sie *intransitiv.*

Die Ordnung einer transitiven Gruppe ist ein Vielfaches der Ordnung derjenigen Untergruppe, deren Substitutionen ein beliebiges Element z. B. x_1 *nicht versetzen.*

Die transitiven Gruppen, bei welchen die Ordnung dem Grad gleichkommt, haben nur Substitutionen, die alle Elemente versetzen.

Jede transitive Gruppe hat wenigstens $n - 1$ *Substitutionen, die alle Elemente versetzen.*

Die alternirende Gruppe ist $n - 2$ *fach transitiv.*

Die Ordnung einer k fach transitiven Gruppe ist gleich

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)m,$$

worin m die Ordnung der Untergruppe bezeichnet, welche k Elemente unversetzt lässt.

Eine invariante Untergruppe einer transitiven Gruppe enthält nicht alle Elemente.

Wenn eine zwei- oder mehrfach transitive Gruppe eine cyklische Substitution 3[ter] *Ordnung enthält, so umfaſst sie alle Substitutionen und die alternirende Gruppe.*

Wenn eine k fach transitive Gruppe die alternirende Gruppe nicht enthält, so versetzt jede Substitution mehr als k Elemente und enthält mehr als $2k - 4$ *Elemente.*

Die Ordnung einer k fach transitiven die alternirende Gruppe nicht enthaltenden Gruppe theilt $\frac{n!}{m!}$, worin m die grössere der Zahlen k, $2k - 4$ bedeutet.

Eine die alternirende Gruppe nicht enthaltende Gruppe kann nicht mehr als q fach transitiv sein, wenn q die kleinere der beiden Zahlen $\frac{n+4}{3}$, $\frac{n}{2}$ angibt.

Eine mit den Substitutionen einer k fach transitiven Gruppe vertauschbare Gruppe ist wenigstens $k - 1$ fach transitiv.

§ 3. Imprimitivität.

Es sei G in n Elementen eine einfach transitive Gruppe. Wenn diese Elemente sich auf m Systeme von je $\frac{n}{m}$ Elementen derart vertheilen lassen, dass eine Substitution der Gruppe, welche ein Element eines Systems A in ein solches desselben

Systems transformirt, auch alle anderen Elemente von A in Elemente desselben A transformirt, während die Substitution, welche ein Element von A in ein solches von B umwandelt, alle übrigen von A in alle übrigen von B umwandelt, alsdann nennt man die Gruppe *imprimitiv* und die Systeme *Imprimitivitätssysteme.* Im anderen Falle heisst die Gruppe *primitiv.*

Wenn sich in einer Gruppe die Vertheilung der Elemente in Systeme auf zwei verschiedene Arten ausführen lässt, so kann dies auch auf eine dritte Art geschehen, indem man nämlich in ein und dasselbe System alle Elemente vereinigt, welche ein System der ersten Theilung mit einem der zweiten gemeinschaftlich hat.

Besitzt eine imprimitive Gruppe m Imprimitivitätssysteme, so ist ihre Ordnung ein Theiler von

$$m! \left(\frac{n}{m}!\right)^m.$$

§ 4. Isomorphismus.

Wenn sich die Substitutionen zweier Gruppen derart einander zuordnen lassen, dass dem Product zweier Substitutionen der einen das Product zweier Substitutionen der anderen entspricht, so heissen die beiden Gruppen *isomorph;* wenn einer Substitution der einen nur *eine einzige* der anderen entspricht, so ist der *Isomorphismus einstufig;* entsprechen einer Substitution der einen *mehrere* der anderen Gruppen, so ist der *Isomorphismus mehrstufig.* Man pflegt sie auch nach Jordan *holoedrisch* bez. *meroedrisch* zu nennen.

Wenn G und Γ einstufig isomorph sind, so haben sie gleiche Ordnung.

Sind G und Γ mehrstufig isomorph und entsprechen der Substitution 1 *von G mehrere Substitutionen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ von Γ, so bilden die letzteren eine Untergruppe von Γ.*

Wenn G zu Γ mehrstufig isomorph ist, so entspricht jeder Substitution von G die gleiche Zahl m Substitutionen von Γ; die Ordnung von Γ ist m mal die Ordnung von G und m heisst die Stufe des Isomorphismus.

Ist L eine invariante Untergruppe von G, so ist auch die entsprechende Gruppe Λ von der zu G isomorphen Gruppe Γ eine invariante Untergruppe von Γ. Ist L ein Maximum, so ist auch Λ ein Maximum.

§ 5. Zu den Substitutionengruppen gehörige Functionen.

Denken wir uns eine rationale Function φ_1 der Elemente $x_1, x_2, \cdots x_n$ und führen wir auf die Function alle möglichen Substitutionen unter den Elementen aus, so kann sich der Werth φ_1 ändern oder nicht; *die Gesammtheit aller Substitutionen, für welche φ_1 unverändert bleibt, bildet eine Gruppe,* welche die *Gruppe der Function* genannt wird.

Zu jeder Function gehört eine Gruppe und zu jeder Gruppe gehören unendlich viele Functionen.

Die Functionen, welche bei allen möglichen Substitutionen unverändert bleiben, sind die symmetrischen Functionen.

Jede zur alternirenden Gruppe gehörige Function (alternirende Function) hat die Form

$$\varphi = S_1 + S_2 \sqrt{\varDelta},$$

worin $\varDelta$ die Discriminante der n Elemente, also

$$\varDelta = \prod_{i,j}^{1,\cdots n} (x_i - x_j)^2$$

ist und S_1, S_2 symmetrische Functionen der Elemente bedeuten.

Führt man auf eine Function φ_1 alle möglichen Substitutionen aus und nimmt die Function dabei m verschiedene Werthe an

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m,$$

so ist die Zahl m ein Theiler von $n!$, und wenn r die Ordnung der Gruppe von φ_1 angibt, so ist das Product rm gleich $n!$.

Die zu $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m$ gehörigen Gruppen sind alle einander ähnlich.

Wenn $n > 4$ und $m > 2$ ist, so haben sie keine andere gemeinschaftliche Substitution, als die Einheit.

Wenn $n = 4$ ist, so können sie die vier Substitutionen

$$[1, (x_1 x_2)(x_3 x_4), (x_1 x_3) x_2 x_4), (x_1 x_4)(x_2 x_3)]$$

gemeinschaftlich haben.

Die m Werthe einer Function mit m Werthen sind die Wurzeln einer Gleichung m^{ten} Grades, deren Coefficienten symmetrische Functionen der Elemente $x_1, x_2, \cdots x_n$ darstellen.

Die Discriminante der m Werthe von φ hat die Discriminante der x zum Factor. Daraus folgt: *unter den verschiedenen Werthen, welche eine Function annimmt, gibt es stets gleiche, sobald zwei von den x gleich werden.*

Nimmt man an, die n Elemente seien unabhängig, so sind die alternirenden Functionen die einzigen, deren Potenzen symmetrisch sein können, ohne dass sie selbst es sind.

Wenn $n > 4$ ist, so gibt es keine Function von mehreren Werthen, von welcher eine Potenz zwei Werthe hätte, vorausgesetzt dass zwischen den Elementen keine besonderen Beziehungen bestehen.

Wenn $n = 4$ ist, so hat die dritte Potenz der Function

$$(x_1 x_2 + x_3 x_4) + \varepsilon (x_1 x_3 + x_2 x_4) + \varepsilon^2 (x_1 x_4 + x_2 x_3),$$

worin $\varepsilon^3 = 1$ ist, zwei Werthe.

Zwei Functionen, welche zu derselben Gruppe gehören, lassen sich rational die eine durch die andere ausdrücken und umgekehrt (der Lagrange'sche Satz).

Wenn eine Function durch die Substitutionen der Gruppe einer anderen Function nicht verändert wird, während die gleiche Eigenschaft umgekehrt nicht statt hat, so lässt sich die erste rational durch die zweite ausdrücken; die zweite dagegen ist, wenn m die Anzahl ihrer Werthe bezeichnet, die Wurzel einer Gleichung m^{ten} Grades, deren Coefficienten rationale Functionen der ersten sind. Jede rationale Function der n Grössen $x_1, x_2, \cdots x_n$ lässt sich rational mit Hülfe einer jeden Function der n Grössen ausdrücken, welche n! Werthe besitzt; speciell also auch mit Hülfe der linearen Functionen vom Typus

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

worin $\alpha_1, \cdots \alpha_n$ willkürliche Constanten bedeuten.

§ 6. Analytische Darstellung der Substitutionen.

Die Substitutionen von n Elementen lassen sich auch analytisch auf die folgende Art darstellen:

Man habe die Substitution

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & \cdots, & x_n \\ x_{i_1}, & x_{i_2}, & x_{i_3}, & \cdots, & x_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Bildet man nun die Function φ von z so, dass $\varphi(z)$, wenn z die Werthe $1, 2, \cdots, n$ erhält, bezüglich mit $i_1, i_2, \cdots, i_n$ nach dem Modul n übereinstimmt, so kann man mit dem Symbol

$$| z, \varphi(z) |$$

die gegebene Substitution bezeichnen, das heisst, die gegebene Substitution soll die Wirkung haben, jeden Index z von x in den Index $\varphi(z)$ zu verwandeln.

Es sei $n = m^k$; alsdann lässt sich jedes Element mit k Indices darstellen, von denen jeder alle Werthe von 1 bis m haben kann, also durch

$$x_{z_1, z_2, \cdots, z_k}.$$

Eine Substitution unter diesen Elementen kann man mit dem Symbol

$$\left| z_1, z_2, \cdots, z_k;\ \varphi_1(z_1, \cdots, z_k), \cdots, \varphi_k(z_1, \cdots, z_k) \right| \pmod{m}$$

bezeichnen, um auszudrücken, dass an Stelle der wahren Werthe der φ die mit ihnen nach dem Modul m congruenten, welche kleiner als m sind, gesetzt werden sollen (vergl. Kap. 20, § 3).

Alle Substitutionen von der Form

$$\left| z_1, \cdots, z_k;\ z_1 + \alpha_1, \cdots, z_k + \alpha_k \right| \pmod{m}$$

bilden eine Gruppe, welche *die arithmetische Gruppe* heisst.

Soll das Symbol

$$\left| z_1 \cdots z_k;\ a_1 z_1 + \cdots + c_1 z_k,\ a_2 z_1 + \cdots + c_2 z_k, \cdots \right| \pmod{m}$$

eine Substitution darstellen, so ist dazu nothwendig und ausreichend, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & c_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_k & b_k & \cdots & c_k \end{vmatrix}$$

prim zu dem Modul m sei. In diesem Fall heissen die Substitutionen von der vorstehenden Form *lineare* oder auch *geometrische Substitutionen.* Sie bilden die sogenannte *lineare Gruppe.*

Die Substitutionen der linearen Gruppe sind mit denen der arithmetischen Gruppe vertauschbar.

Die Ordnung der linearen Gruppe vom Grad m^k ist

$$r = [m, k]\, m^{k-1}\, [m, k-1]\, m^{k-2} \cdots [m, 2]\, m\, [m, 1],$$

worin das Symbol $[m, \varrho]$ die Anzahl der verschiedenen Arten angibt, auf welche sich ϱ Zahlen bestimmen lassen, die kleiner als m sind und deren grösster gemeinschaftlicher Theiler zu m prim ist. C. Jordan, *Traité* etc., S. 95 u. 96.



Schreibt man für die Coefficienten $a, b, \cdots c$ speciell die Bedingungen

$$\left.\begin{array}{l} a_i^2 + b_i^2 + \cdots + c_i^2 \equiv 1 \\ a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 \equiv 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_k^2 \equiv 1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \pmod{m},$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 a_2 + b_1 b_2 + \cdots + c_1 c_2 \equiv 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k \equiv 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \pmod{m}$$

vor[1]), so heisst die lineare Substitution *orthogonal*.

Alle orthogonalen Substitutionen bilden eine Gruppe.

Wenn $k = 2h$ ist und die $2h$ Indices in Paare

$$z_1 y_1,\ z_2 y_2,\ \cdots,\ z_h y_h$$

vertheilt werden, so heissen die linearen Substitutionen dieser Indices, falls sie, auf die Function

$$\sum_{i=1}^{h} (z_i \eta_i - y_i \zeta_i)$$

angewendet, diese Function nur mit einem constanten Factor multipliciren, *Abel'sche Substitutionen*. Dabei sind die ζ, η Symbole, die denselben Substitutionen, wie die y, z, unterworfen werden sollen. *Die Abel'schen Substitutionen bilden die von einigen Autoren sogenannte Abel'sche Gruppe;* doch wird darauf aufmerksam gemacht, dass diese Bezeichnung auch noch in ganz anderem Sinn verwendet wird.

Die Lehre von den Substitutionengruppen wurde von Abel (*Crelle,* Bd. 1) und Cauchy begründet (*Journal de l'école polytechnique,* 1815; ausführlicher dargestellt in *Exercises d'analyse et de physique mathématique,* 1844, Bd. 3). Dem letzteren verdankt man den grössten Theil der Fundamentalsätze der Theorie, die in der Folge durch die Untersuchungen von Galois, der sie hauptsächlich auf die algebraischen Gleichungen anwandte, eine grosse Bedeutung erhielten (*Journ. de Liouville,* Bd. 11, 1846, wieder abgedruckt in Oeuvres mathématiques de Galois, Paris 1897).

---

1) Das Zeichen $\equiv$ bedeutet congruent (vergl. Kap. 20, § 3).

Neuere und vollständige Werke über den Gegenstand sind: Jordan, *Traité des substitutions* etc., Paris 1870; Netto, *Substitutionentheorie* etc., Leipzig 1882; Petersen, *Theorie der algebraischen Gleichungen,* Kopenhagen 1878. Auch in Serret, *Handbuch der höheren Algebra,* deutsche Uebersetzung von Wertheim, 2 Bde., Leipzig 1878, wird die Theorie in ausreichendem Umfang behandelt. Vergl. Weber, *Lehrbuch der Algebra,* Bd. 1, 2. Aufl., Braunschweig 1898, sowie Bd. 2, Braunschweig 1896. Man findet dort auch die wichtige abstracte Theorie des allgemeinen Begriffs der endlichen Gruppe dargelegt.

An einer späteren Stelle, Kapitel 5, § 12, werden wir die sogenannte *Galois'*sche Theorie, d. h. die Anwendung der Lehre von den Substitutionen, auf die algebraischen Gleichungen und in Kapitel 9 die sogenannte *Theorie der Transformationsgruppen* entwickeln, die mit der Lehre von den Substitutionen vielfach in Verbindung steht.



Kapitel III.

Die Lehre von den Determinanten.

§ 1. Allgemeines.

Man betrachte n^2 in einem Quadrat

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

angeordnete Grössen; bilde alle Producte vom Typus

$$a_{1r_1}\; a_{2r_2} \cdots a_{nr_n},$$

worin $r_1, r_2, \cdots r_n$ irgend eine der Permutationen der Zahlen $1, 2, \cdots n$ darstellen, gebe jedem solchen Product das Vorzeichen $+$ oder $-$, je nachdem die Permutation der Indices r eine gerade oder ungerade ist und bilde die algebraische Summe der $n!$ so erhaltenen Producte. Diese Summe heisst alsdann *die Determinante* der n^2 Grössen und wird durch das Symbol

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

oder

$$\sum \pm a_{11} \cdots a_{nn}$$

oder auch durch

$$|a_{ik}| \quad (i, k = 1, 2, \cdots n)$$

dargestellt.

Die Gesammtheit der n^2 in einem Quadrat angeordneten Elemente heisst *die quadratische Matrix,* die Diagonale durch die Elemente $a_{11} \cdots a_{nn}$ *die Hauptdiagonale* und diese Elemente $a_{11} \cdots a_{nn}$ selbst *die Hauptelemente.*

Wenn in einer Determinante alle Elemente einer Reihe Null sind, so ist die Determinante Null.

Wenn man die Zeilen mit den Columnen einer Determinante vertauscht, so ändert sich der Werth der Determinante nicht.

Vertauscht man zwei parallele Reihen einer Determinante miteinander, so erhält man eine neue der vorigen gleiche Determinante, die aber das entgegengesetzte Vorzeichen hat.

Eine Determinante mit zwei identischen Parallelreihen ist Null.

Eine Determinante wird mit k multiplicirt, indem man die Elemente einer Reihe mit k multiplicirt.

Wenn man das Vorzeichen aller Elemente abändert, die an ungeraden Stellen stehen, d. h. an solchen Stellen, für welche die Summe der Indices eine ungerade Zahl ist, so ändert sich der Werth der Determinante nicht.

Multiplicirt man jedes a_{ik} mit p^{i-k}, wobei p eine beliebige Zahl bedeutet, so behält die Determinante ihren Werth.

Die Determinante ist Null, wenn die Elemente einer Reihe gleiche Vielfache der Elemente einer zu ihr parallelen Reihe sind.

Eine Determinante, in welcher die Elemente einer Reihe Polynome sind, ist der Summe der Determinanten gleich, deren Elemente Monome sind.

Der Werth einer Determinante bleibt derselbe, wenn man zu den Elementen einer Reihe die mit einer beliebigen Zahl multiplicirten Elemente einer Parallelreihe hinzufügt.

Eine Determinante verschwindet, wenn die Elemente einer Reihe lineare ähnliche Combinationen der Elemente von Parallelreihen sind und umgekehrt.

Wenn man in einer quadratischen Matrix von dem n^{ten} Grad m Zeilen und m Columnen weglässt, so bleibt eine quadratische Matrix vom Grad $n - m$ übrig; die durch eine solche Matrix dargestellte Determinante heisst *Minor oder Unterdeterminante.* Wenn ihre Hauptelemente *Haupt*elemente der ursprünglichen Determinante sind, so erhält man einen *Hauptminor.*

Es gibt $\left[\binom{n}{m}\right]^2$ *Minoren* m^{ten} *Grades.*

Es gibt $\binom{n}{m}$ *Hauptminoren* m^{ten} *Grades.*

Ein Minor ist *gerader oder ungerader Classe,* je nachdem die Summe der Ordnungszahlen, welche den Zeilen und Columnen entsprechen, aus welchen der Minor besteht, eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Jedem Minor vom m^{ten} Grad entspricht ein solcher vom $(n - m)^{\text{ten}}$ Grad, der durch Unterdrücken der Columnen und

Zeilen, aus denen der gegebene Minor besteht, gebildet wird. Diese beiden Minoren heissen *adjungirt* zu einander. Die *algebraische Adjungirte* eines Minors ist der zu dem gegebenen adjungirte Minor mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem er gerader oder ungerader Classe ist.

Jede Determinante ist der Summe der Producte der in m Zeilen oder Columnen enthaltenen Minoren mit ihren bezüglichen algebraischen Adjungirten gleich.

Jede Determinante ist der algebraischen Summe der Producte der Elemente einer Zeile oder Columne mit ihren bezüglichen algebraischen Adjungirten gleich.

Die Summe der Producte der in m Reihen enthaltenen Minoren mit den algebraischen Adjungirten der entsprechenden Minoren, die in anderen m Parallelreihen enthalten sind, ist Null. Der Satz ist beachtenswerth für den Fall $m = 1$.

Wenn eine Determinante Null ist, so sind die algebraischen Adjungirten der Elemente einer Reihe denjenigen der Elemente einer beliebigen anderen Parallelreihe proportional.

Bei Benutzung der Minoren zweiten Grades kann man einer Determinante vom n^{ten} Grad die Form einer Determinante vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad geben.

Wenn alle Elemente einer Determinante durch p theilbar sind, so lässt sich die Determinante durch p^n theilen.

Wenn alle Minoren zweiten Grades einer Determinante durch p theilbar sind, so lässt sich die Determinante durch p^{n-1} theilen.

Das Product zweier Determinanten vom nämlichen Grad, von denen die eine a_{rs}, die andere b_{hk} Elemente hat, findet man durch Bildung der Determinante mit den Elementen c_{ij}, wobei c_{ij} einem der vier Ausdrücke

$$c_{ij} = a_{i1}b_{j1} + a_{i2}b_{j2} + \cdots + a_{in}b_{jn}$$

$$c_{ij} = a_{1i}b_{j1} + a_{2i}b_{j2} + \cdots + a_{ni}b_{jn}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

$$c_{ij} = a_{1i}b_{1j} + a_{2i}b_{2j} + \cdots + a_{ni}b_{nj}$$

gleich sein kann. Satz von Cauchy und Binet, *Journal de l'école polytechnique,* Cahier 17, S. 81 und 111; Cahier 16, S. 280—354.

Wenn die beiden Determinanten nicht denselben Grad haben, so bringe man die von geringerem Grad auf denselben Grad wie die andere, indem man Zeilen und Columnen hinzufügt,

deren Elemente an den Stellen der Hauptdiagonale die Einheit und an den übrigen Stellen Null sind.

Eine *rechteckige Matrix* nennen wir eine Tabelle, in welcher nm Elemente in einem Rechteck angeordnet sind. Hat man zwei rechteckige Matrices von m Zeilen und n Columnen und stellt man die Summe der Producte der Elemente einer Zeile der einen mit den entsprechenden Elementen einer Zeile der anderen her, so ergeben sich m^2 Grössen, die, in eine quadratische Matrix geordnet, eine Determinante vom m^{ten} Grad bilden können. Eine solche Determinante heisst *das Product nach Zeilen der beiden rechteckigen Matrices.*

Jeder Minor der Determinante, die das Product zweier gegebenen Determinanten ist, kann als das Product zweier rechtwinkliger Matrices angesehen werden.

Das Product nach Zeilen zweier rechtwinkliger Matrices von n Columnen und m Zeilen ist Null, wenn $m > n$ ist; für $m < n$ dagegen kommt es der Summe der Producte der Minoren vom m^{ten} Grad, welche in der einen Matrix enthalten sind, mit den homologen in der anderen Matrix enthaltenen Minoren gleich.

Vergl. hierzu Jacobi, *De formatione et proprietatibus determinantium,* Art. 14, mit werthvollen Anmerkungen von Stäckel in Ostwald's Klassikern der exacten Wissensch., N. 77 in deutscher Uebersetzung erschienen.

Die Determinante R, deren Elemente A_{rs} die Adjungirten der Elemente a_{rs} einer gegebenen Determinante D sind, nennt man die zur gegebenen *reciproke Determinante.*

Wenn eine Determinante Null ist, so sind auch ihre reciproke und alle Minoren der letzteren bis auf diejenigen vom zweiten Grad Null.

Die reciproke einer Determinante hat zum Werth die $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz der gegebenen.

Nennt man zwei Minoren von D und R homolog, welche von Zeilen und Columnen von D und R eingeschlossen sind, die bez. dieselben Ordnungsnummern haben, so lässt sich sagen:

Ein beliebiger in R enthaltener Minor M vom m^{ten} Grad ist gleich dem Minor in D, der homolog ist zur algebraischen Adjungirten von M in R, multiplicirt mit der $(m-1)^{\text{ten}}$ Potenz der gegebenen Determinante.

Die Adjungirte eines Elements A_{rs} von R ist gleich a_{rs}, multiplicirt mit der $(n-2)^{\text{ten}}$ Potenz von D.

Wenn man zwei Determinanten DD' miteinander multiplicirt und dann auf analoge Art ihre reciproken RR', so ist das zweite Product die reciproke Determinante des ersten.

§ 2. Symmetrische und schiefe Determinanten. Jacobi'sche Symbole.

Wenn $a_{rs} = a_{sr}$ ist, so heisst die Determinante *symmetrisch;* ist $a_{rs} = - a_{sr}$, so wird sie *schief* genannt und wenn schliesslich $a_{rs} = - a_{sr}$ und $a_{rr} = 0$ ist, heisst sie *schiefsymmetrisch.*

Das Quadrat einer Determinante kann als symmetrische Determinante dargestellt werden.

In einer symmetrischen Determinante sind die adjungirten Minoren zweier conjugirten Elemente einander gleich.

Die reciproke einer symmetrischen Determinante ist auch symmetrisch.

Eine schiefsymmetrische Determinante von ungeradem Grad ist Null.

Eine schiefsymmetrische Determinante von gerader Ordnung ist das vollständige Quadrat einer ganzen rationalen Function ihrer Elemente $a_{\alpha\beta}$. Cayley, *Crelle,* 38, S. 93. Der Ausdruck, dessen Quadrat die schiefsymmetrische Determinante ist, und welcher schon von Jacobi, *Crelle,* 2, S. 356 behandelt wurde, heisst nach Cayley der *Pfaff'sche Ausdruck* oder nach Scheibner *Halbdeterminante,* Sächsische Berichte, 1859, S. 151. Man stellt nach Jacobi diesen *Pfaff*'schen Ausdruck, indem man das Glied $a_{12} a_{34} \cdots a_{n-1,n}$ mit positivem Zeichen wählt, durch das Symbol $(123 \cdots n)$ dar.

Die Anzahl der Glieder eines Jacobi'schen Symbols von der n^{ten} *Ordnung ist*

$$(n-1)(n-3) \cdots 3 \cdot 1.$$

Das Vorzeichen eines Jacobi'schen Symbols ändert sich, wenn man zwei Elemente miteinander vertauscht.

Das Jacobi'sche Symbol der n^{ten} *Ordnung wird mittelst der Formel*

$$\begin{aligned}(12 \cdots n) = &(12)(34 \cdots n)\\ &+ (13)(45 \cdots n2)\\ &+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\ &+ (1n)(23 \cdots n-1)\end{aligned}$$

entwickelt; Jacobi, *Crelle,* 29, S. 237.

Jeder Minor $(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung einer schiefen Determinante von gerader Ordnung ist dem Product des Jacobi'schen Symbols* $(12 \cdots n)$ *mit einem anderen Jacobi'schen Symbole*

$(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung gleich, das man aus dem ersten durch Unterdrückung zweier Indices erhält.

Verschwindet eine schiefsymmetrische Determinante $2r^{\text{ter}}$ Ordnung, so sind auch ihre sämmtlichen Unterdeterminanten $2r-1^{\text{ter}}$ Ordnung Null. Frobenius, *Crelle,* 82, S. 243.

Die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0$$

hat, wenn die Determinante der a symmetrisch ist und die a reelle Grössen sind, nur reelle Wurzeln (Satz von Cauchy, *Exerc. d. Math.,* 4, S. 140); *für jede m-fache Wurzel der Gleichung verschwinden auch alle Unterdeterminanten $n-1^{\text{ter}}$, $n-2^{\text{ter}}$, $\cdots$ $n-m+1^{\text{ter}}$ Ordnung der links stehenden Determinante. Satz von* Weierstrass, *Berliner Monatsberichte,* Jahrg. 1858, S. 213; 1868, S. 336; 1879, S. 430. Literatur über diese Gleichung bei Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie,* Bd. 2, S. 168, Leipzig 1897.

Jede schiefe Determinante, deren Hauptelemente gleich 1 sind, ist eine Summe von Quadraten.

Wegen näherer Literaturangabe vergl. Baltzer, *Determinanten,* Leipzig 1857, 1882, S. 209, 212 und Pascal, *I determinanti,* Mailand 1896.

§ 3. Specielle Determinanten.

Eine *Hankel'sche Determinante* wird auf die folgende Art gebildet

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Man nennt sie wohl auch *orthosymmetrisch* (Hankel) und *persymmetrisch* (Sylvester).

Sie hat die Eigenschaft, dass sie sich durch die successiven Differenzen der Grössen a ausdrücken lässt.

Setzt man

$$\Delta_1^{(1)} = a_1 - a_0$$

$$\Delta_2^{(1)} = a_2 - a_1, \quad \Delta_2^{(2)} = \Delta_2^{(1)} - \Delta_1^{(1)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_k^{(1)} = a_k - a_{k-1}, \quad \Delta_k^{(2)} = \Delta_k^{(1)} - \Delta_{k-1}^{(1)}, \quad \Delta_k^{(3)} = \Delta_k^{(2)} - \Delta_{k-1}^{(2)} \cdots$$

so erhält man

$$P = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_1^{(1)} & \Delta_2^{(2)} & \cdots & \Delta_{n-1}^{(n-1)} \\ \Delta_1^{(1)} & \Delta_2^{(2)} & \Delta_3^{(3)} & \cdots & \Delta_n^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta_{n-1}^{(n-1)} & \Delta_n^{(n)} & \Delta_{n+2}^{(n+2)} & \cdots & \Delta_{2n-2}^{(2n-2)} \end{vmatrix}.$$

Nimmt man speciell an, die Elemente bildeten eine arithmetische Reihe von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, so wird

$$P = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left[\Delta_{n-1}^{(n-1)}\right]^n.$$

Bilden aber die Elemente eine arithmetische Reihe von einer kleineren als der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, so ist $P = 0$.

Wenn die Elemente eine geometrische Progression bilden, so ist ebenfalls $P = 0$.

Die *Circulante*[1]) hat die Gestalt:

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \\ a_3 & a_4 & \cdots & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Jede Circulante vom n^{ten} Grad lässt sich in n bezüglich ihrer Elemente rationale Factoren mittelst der Formel

$$A = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2) \cdots \varphi(\alpha_n)$$

zerlegen, worin

$$\varphi(z) = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \cdots + a_n z^{n-1}$$

ist und $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ die n Wurzeln von $x^n - 1 = 0$ bezeichnen.

---

1) Günther nennt sie *doppelt-orthosymmetrische Determinante.*

Die Circulante

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & \cdots, & n \\ 2, & 3, & \cdots, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n, & 1, & \cdots, & n-1 \end{vmatrix}$$

ist gleich

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2}.$$

Die Vandermonde'sche oder Cauchy'sche Determinante wird durch

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

dargestellt.

Sie ist gleich

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i,j}^{1,n} (a_i - a_j) \quad (i < j).$$

Das Quadrat einer Cauchy'schen kann als Hankel'sche Determinante dargestellt werden.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \binom{m}{1} & \binom{m+1}{1} & \cdots & \binom{m+n}{1} \\ \binom{m+1}{2} & \binom{m+2}{2} & \cdots & \binom{m+n+1}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{m+n-1}{n} & \binom{m+n}{n} & \cdots & \binom{m+2n-1}{n} \end{vmatrix}$$

ist gleich 1. Vergl. hierzu Baltzer, S. 24 und Pascal, l. c.



Die Zeipel'sche Determinante

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{p} & \binom{m}{p+1} & \cdots & \binom{m}{p+r} \\ \binom{m+1}{p} & \binom{m+1}{p+1} & \cdots & \binom{m+1}{p+r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{m+r}{p} & \binom{m+r}{p+1} & \cdots & \binom{m+r}{p+r} \end{vmatrix}$$

ist gleich

$$\frac{\binom{m+r}{r+1}\binom{m+r-1}{r+1}\cdots\binom{m+r-p+1}{r+1}}{\binom{p+r}{r+1}\binom{p+r-1}{r+1}\cdots\binom{r+1}{r+1}}.$$

Die Stern'sche Determinante, Crelle, 66, S. 285

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \cdots & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{2} & \binom{x_2}{2} & \cdots & \binom{x_n}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \cdots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix}$$

ist gleich

$$\frac{D}{2^{n-2}3^{n-3}4^{n-4}\cdots(n-1)},$$

worin D die aus den Grössen x gebildete Cauchy'sche Determinante bezeichnet.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{n-1!} & \frac{1}{n-2!} & \cdots & \frac{1}{1!} \end{vmatrix}$$

ist gleich $\frac{1}{n!}$.

Die Smith'sche Determinante, (Henry Smith, *Collected math. papers,* II, S. 161, Oxford),

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,n) \\ . & . & . & . \\ (n,1) & (n,2) & \cdots & (n,n) \end{vmatrix},$$

in welcher unter (ij) *der grösste gemeinschaftliche Theiler der beiden ganzen Zahlen* i, j *verstanden wird, ist gleich*

$$\varphi(1)\,\varphi(2)\cdots\varphi(n),$$

worin $\varphi(k)$ *die Anzahl der Zahlen bedeutet, die kleiner als* k *und zu* k *prim sind.*

Die Continuanten

$$C_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

genügen der Recursionsformel

$$C_n = a_n C_{n-1} + C_{n-2}$$

Eine Continuante hat

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n-k}{k}$$

Terme, worin

$k = \frac{n}{2}$, *wenn* n *eine gerade Zahl*

und $k = \frac{n-1}{2}$, *wenn* n *eine ungerade Zahl ist.*

Literaturnachweise über die speciellen Determinanten findet man in des Verfassers: *I determinanti,* Mailand 1896. Die Determinanten von Hankel, Zeipel und Cauchy, sowie die Circulanten sind bei Günther, Cap. 3 behandelt.

Wenn zwischen den Elementen einer Determinante die Beziehungen

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \cdots + a_{ni}^2 = 1$$
$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = 0$$

bestehen, so heisst die Determinante orthogonal.

Das Quadrat einer orthogonalen Determinante ist die positive Einheit.

Die algebraische Adjungirte eines Elementes der orthogonalen Determinante ist dem mit der Determinante multiplicirten Elemente selbst gleich.

Jeder Minor einer orthogonalen Determinante ist seiner algebraischen, mit der gegebenen Determinante multiplicirten Adjungirten gleich.

Das Product zweier orthogonalen Determinanten ist ebenfalls orthogonal.

Wenn die a die Elemente einer reellen orthogonalen Substitution sind, so ist die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = 0$$

eine reciproke Gleichung, welche nur für Werthe vom absoluten Betrag 1 *verschwindet.* Brioschi, *Liouville's Journal,* 1854, S. 253.

Für jede m-fache Wurzel verschwinden auch alle Unterdeterminanten $n-1^{\text{ter}}$, $n-2^{\text{ter}}$, $\cdots$ $n-m+1^{\text{ter}}$ *Ordnung der links stehenden Determinante.* Satz von Stickelberger, *Ueber reelle orthogonale Substitutionen,* Programm des Züricher Polytechnikums, 1877. Vergl. auch die wichtige Arbeit von Frobenius, *Crelle,* 84.

Wenn a_{ij}, b_{ij} die Elemente zweier orthogonalen Determinanten von dem Werth $\varepsilon = +1$ und demselben Grad sind, und wenn die Determinante mit dem allgemeinen Elemente

$$a_{ij} + b_{ij}$$

Null ist, so sind auch alle Unterdeterminanten vom $(n-1)^{\text{ten}}$ *Grade Null*[1]. Literatur hierüber bei Pascal a. a. O., S. 212.

§ 4. Die Wronski'schen Determinanten

werden auf folgende Art gebildet:

In die erste Zeile kommen n Functionen einer Variabelen

1) Dieser, von einigen Autoren „Stieltjes'sches Theorem" genannte Satz ist ein Specialfall eines viel früher von Frobenius, *Crelle,* 84 aufgestellten Satzes. Vergl. hierzu Voss, *Abh. der kgl. bayer. Akad.,* Jahrg. 1890, S. 261; Stieltjes, *Acta math.,* Bd. 6.

x, in die folgenden die ersten, zweiten etc. Derivirten dieser Functionen, also

$$W = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \cdots u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \cdots u_n'(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \cdots u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Die Derivirte einer Wronski'schen Determinante wird gebildet, indem man den Elementen der letzten Zeile die n^{ten} Derivirten der Functionen substituirt. Malmsten, *Crelle,* 39, S. 91.

Wenn man die Functionen u mit einer beliebigen Function $v(x)$ multiplicirt, so wird dadurch die ganze Determinante mit $v^n(x)$ multiplicirt.

Das Verschwinden der Determinante W ist die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass unter den n Functionen $u_1(x), \cdots u_n(x)$ eine lineare homogene Beziehung mit constanten Coefficienten bestehe.

Literatur findet man bei Baltzer, S. 30 u. Pascal, S. 63.

Auch den Wronski'schen ähnliche Determinanten lassen sich in Betracht ziehen.

Die Determinanten

$$W_1 = \begin{vmatrix} u_1(x) \cdots\cdots\cdots u_n(x) \\ u_1(x+1) \cdots\cdots u_n(x+1) \\ u_1(x+2) \cdots\cdots u_n(x+2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_1(x+n-1) \cdots u_n(x+n-1) \end{vmatrix}$$

und

$$W_1 = \begin{vmatrix} u_1(x) \cdots\cdots\cdots u_n(x) \\ \Delta u_1(x) \cdots\cdots \Delta u_n(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Delta^{n-1} u_1(x) \cdots\cdots \Delta^{n-1} u_n(x) \end{vmatrix}$$

sind einander gleich. Dabei ist Δ das Symbol für die Differenz

$$\Delta u(x) = u(x+1) - u(x)$$
$$\Delta^2 u(x) = \Delta u(x+1) - \Delta u(x)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Das Verschwinden der Determinante W_1 ist die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass zwischen den n Functionen u eine lineare homogene Beziehung mit Coefficienten bestehe,



welche periodische Functionen von x sind, d. h. solche Functionen $F(x)$, bei welchen für jedes beliebige x

$$F(x+1) = F(x)$$

ist (das **Casorati'sche** *Theorem, Mem. Acc. Lincei,* Bd. 5, 1880).

Kritische Bemerkungen über das Theorem bez. der Wronski'schen Determinanten findet man bei Peano, *Mathesis,* 1889, Bd. 9, S. 75 und S. 110.

§ 5. Die Jacobi'schen oder Functionaldeterminanten.

Es seien n Functionen y von n Variabelen x gegeben. Alsdann heisst die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

welche auch wohl durch das Symbol

$$\frac{\partial(y_1 y_2 \cdots y_n)}{\partial(x_1 x_2 \cdots x_n)}$$

dargestellt wird, *die Functional- oder Jacobi'sche Determinante der y in Bezug auf die x.*

Wenn $y_1, \cdots y_n$ Functionen von $z_1, \cdots z_n$ sind und die letzteren wieder Functionen von $x_1, \cdots x_n$, so gilt die Formel

$$\frac{\partial(y_1 \cdots y_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)} = \frac{\partial(y_1 \cdots y_n)}{\partial(z_1 \cdots z_n)} \frac{\partial(z_1 \cdots z_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}.$$

Sind $y_1, \cdots y_n$ Functionen von $x_1, \cdots x_n$ und diese ihrerseits Functionen von $y_1, \cdots y_n$, so hat man

$$\frac{\partial(y_1 \cdots y_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)} = \frac{1}{\frac{\partial(x_1 \cdots x_n)}{\partial(y_1 \cdots y_n)}}.$$

Sind ferner die Grössen y unentwickelte (implicite) Functionen von x und mittelst der Beziehungen

$$F_1(y_1, \cdots, y_n, x_1, \cdots, x_n) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_n(y_1, \cdots, y_n, x_1, \cdots, x_n) = 0$$

gegeben, so ist

$$\frac{\partial(y_1 \cdots y_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)} = (-1)^n \frac{\dfrac{\partial(F_1 \cdots F_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}}{\dfrac{\partial(F_1 \cdots F_n)}{\partial(y_1 \cdots y_n)}}.$$

Soll zwischen den n Functionen der n Variabelen eine Beziehung bestehen, so ist dafür die nothwendige und ausreichende Bedingung, dass die Functionaldeterminante derselben identisch verschwinde.

Wenn

$$y_i(x_1 \cdots x_n) = \frac{u_i(x_1 \cdots x_n)}{u_0(x_1 \cdots x_n)} \qquad (i = 1, 2, \cdots n)$$

ist, so hat man

$$\frac{\partial(y_1 \cdots y_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)} = \frac{1}{u_0^{n+1}} \begin{vmatrix} u_0, & \dfrac{\partial u_0}{\partial x_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial u_0}{\partial x_n} \\ u_1, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_n, & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Diese Theoreme sind von Jacobi, *de determinantibus functionalibus*. Vergl. die mit schätzenswerthen Anmerkungen versehene deutsche Ausgabe von Stäckel in Ostwald's Klassikern der exacten Wissenschaften, Nr. 78.

Nennt man K die Determinante auf der rechten Seite der vorstehenden Formel, so gilt das folgende Theorem (von Casorati, *Rend. Ist. Lomb.*, 1874):

Ist K identisch gleich Null, so ist die Beziehung, welche die $n+1$ Functionen $u_0, \cdots u_n$ miteinander verbindet, homogen. und umgekehrt.

Es seien $n+1$ homogene Functionen von n Variabelen gegeben; man combinire sie zu je n und bilde so die $n+1$ Functionaldeterminanten; aus diesen bilde man ihrerseits wieder $n+1$ Functionaldeterminanten, indem man sie zu je n combinirt; die letzteren müssen bis auf einen gemeinschaftlichen Factor dieselben Functionen sein, von denen man ausgegangen ist (Clebsch'sches Theorem). Crelle, 69, S. 355.

n Functionen $y_1, \cdots, y_n$ von $n+1$ Variabelen $x_1, \cdots, x_{n+1}$ seien gegeben. Man betrachte die y als Functionen von n der

Variabelen und bilde so die $n+1$ Functionaldeterminanten; bezeichnet man nun diese letzteren mit $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_{n+1}$, so besteht die (Jacobi'sche) Formel:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\psi_1 - \frac{\partial}{\partial x_2}\psi_2 + \cdots + (-1)^n \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}\psi_{n+1} = 0.$$

Crelle, 27; vergl. auch Neumann, *Math. Ann.,* 1, S. 208.

§ 6. Die Hesse'sche Determinante.

Die Functionaldeterminante der n ersten Derivirten einer Function von n Variabelen heisst die *Hesse'sche Determinante* der gegebenen Function.

Wenn die gegebene Function $F(x_1, x_2, \cdots x_n)$ eine homogene Function vom m^{ten} Grade bez. der n Variabelen ist und man eine der Variabelen z. B. x_n der Einheit gleich setzt, wodurch F also zu $f(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$ wird, und wenn man ferner mit f_{ij} die zweite Derivirte von f nach x_i und x_j bezeichnet, so nimmt die Hesse'sche Determinante bis auf einen Zahlenfactor die Form

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1,n-1} & f_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{1,n-1} & \cdots & f_{n-1,n-1} & f_{n-1} \\ f_1 & \cdots & f_{n-1} & \frac{m}{m-1} f \end{vmatrix}$$

an.

Wenn sich eine homogene Function von n Variabelen durch eine lineare Transformation der Variabelen auf eine andere, die eine Variabele weniger hat, reduciren lässt, so ist die Hesse'sche Determinante identisch Null (das Hesse'sche Theorem).

Die Umkehrung des Satzes ist nur für $n \leq 4$ richtig. Siehe Gordan-Noether, *Math. Ann.,* Bd. 10, S. 547; Genaueres findet man bei Pascal, *Determ.,* Mailand 1896, S. 327 u. ff.

Die Anwendung der Functional- und Hesse'schen Determinanten auf die Geometrie der Curven und Flächen wird im zweiten Theil dieses Buches (der Geometrie) besprochen.

Die Lehre von den Determinanten verdankt dem Problem der Auflösung der linearen Gleichungen ihre Entstehung. Den ersten Grund zu der Lehre haben wohl Leibniz, Cramer, Laplace, Cauchy und Jacobi gelegt; die erste wissenschaftliche vollständige Abhandlung ist das unten citirte Buch Brioschi's.

Mehr Einzelheiten und Literaturnachweise über jeden Theil der Theorie enthält das Buch: Pascal, *I determinanti,* Mailand 1896; vergl. auch Baltzer, S. 149.

Ausser den beiden Monographien Cayley's, *Trans.,* Cambridge, Bd. 8 und Spottiswoode's, *Crelle,* Bd. 51 sind die bis jetzt erschienenen Hauptwerke über die Determinanten: Brioschi, Pavia 1854; Baltzer, Leipzig 1857—1882; Trudi, Napoli 1862; Studnička, Prag 1871; Houël, Paris 1871; Hesse, Leipzig 1872; Dölp, Darmstadt 1874; Mansion, Gand 1876; Günther, Erlangen 1877; Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie, I, Determinanten, Leipzig 1885 etc. Mit Ausnahme des letzten führen die Werke sämmtlich den Titel „Determinanten" mit oder ohne Zusatz.

Man hat auch Determinanten untersucht, deren Elemente von *mehr als zwei* Indices abhängen, d. h. sogenannte *cubische* und Determinanten *höheren Ranges.* Sie wurden zuerst von De Gasparis 1861 behandelt. Wir verweisen ferner auf die Arbeiten von Armenante, Padova, *Giorn. di Batt.,* 6, 1868 und Gegenbauer, *Wiener Denkschr.,* 43, 46, 49, 1885. Vergl. auch Günther l. c.

Determinanten von unendlich hoher Ordnung, die aus doppelt unendlich vielen Elementen gebildet sind, wurden von Hill, Poincaré und Helge v. Koch, *Acta math.,* 15, 16 in die Analysis eingeführt. Sie dienen vorzüglich zur Lösung eines Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. In Bezug auf Literatur und Eigenschaften dieser Determinanten, bei denen als unendlichen Gebilden zunächst die Convergenzfrage zu entscheiden ist, vergl. L. Schlesinger, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen.* Bd. 1, S. XVI, S. 274; Bd. 2, 1, S. 529. Siehe auch des Verfassers oben citirtes Buch und Cazzaniga, *Ann. di mat.,* 1897.



Kapitel IV.

Die Lehre von den Reihen, den unendlichen Producten und den Kettenbrüchen.

§ 1. Allgemeines über die Reihen.

Es sei eine Aufeinanderfolge von unendlich vielen Zahlen $u_1, u_2, \cdots$ gegeben; man bilde die Summe der n ersten dieser Zahlen

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Die Grenze von S_n für $n = \infty$ heisst die aus den unendlich vielen in bestimmter Ordnung gegebenen Grössen gebildete *Reihe.* Eine solche Reihe ist *convergent, divergent oder unbestimmt,* je nachdem die Grenze existirt und endlich ist, existirt und unendlich ist, oder überhaupt nicht existirt.

Die Summe einer *beliebigen* Anzahl von Gliedern nach dem n^{ten} Glied heisst *der Rest der Reihe:*

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}.$$

Man kann sich denken, die Grössen u hingen von zwei oder mehreren Indices anstatt von einem ab; man erhält dann bei ähnlichen Definitionen die *doppelten, dreifachen etc. Reihen* zum Unterschied von den früheren, die *einfache* heissen.

Sind die Terme *complex,* so erhält man eine *complexe Reihe,* und zerlegt man diese in die Reihe der reellen Theile und in die der imaginären Theile, so sagt man *die complexe Reihe sei convergent,* wenn diese beiden Reihen convergiren.

Eine Reihe ist entweder nur dann convergent, wenn jedes Glied mit dem richtigen Vorzeichen versehen wird, und ist es nicht, wenn die absoluten Werthe der Glieder in Betracht gezogen werden; in einem solchen Fall heisst die Reihe *bedingt oder einfach convergent;* oder die Reihe bleibt auch dann convergent, wenn man das Vorzeichen aller in ihr vorkommenden negativen Glieder ändert; sie heisst alsdann *unbedingt convergent.*

Eine unbedingt convergente Reihe ist auch einfach convergent.

Eine Reihe mit *complexen Gliedern* nennt man *unbedingt convergent,* wenn die Reihe der Moduln der verschiedenen Glieder convergent ist.

Wenn alle Glieder einer Reihe Functionen einer oder mehrerer Variabelen sind, so erhält man *eine Reihe von Functionen.*

Auf analoge Art und allgemeiner kann man sich *eine Reihe von Functionen complexer Variabelen* denken; vergl. Kap. 13. Die Gesammtheit aller Werthe der einen oder der vielen Variabelen, für welche die Reihe convergirt, heisst der *Convergenzbereich* der Reihe.

Wenn sich bei beliebig klein gegebenem σ ein Index n derart finden lässt, dass für *jeden* in einem gewissen Intervall oder Bereich gelegenen *Werth* der einen oder der vielen Variabelen der Rest R_m, wenn $m \geqq n$ ist, seinem absoluten Werth oder bei *complexen* Variabelen seinem Modul nach immer kleiner als σ bleibt, so heisst die Functionenreihe *gleichmässig convergent.*

In den folgenden Sätzen wird angenommen, es handele sich um Reihen mit reellen Gliedern.

Von zwei convergenten Reihen nennt man die erste *convergenter* als die zweite, wenn, unter R_n, R'_n die bezüglichen Reste verstanden, das Verhältniss $\frac{R_n}{R'_n}$ für $n = \infty$ der Null zustrebt.

Damit eine Reihe convergire, ist es nöthig und ausreichend, wenn sich bei beliebig gegebenem σ ein Index n derart finden lässt, dass für jedes $m \geqq n$ seinem absoluten Werth nach immer $R_m < \sigma$ ist.

Soll eine Reihe convergiren, so muss die Grenze des allgemeinen Gliedes u_n Null sein.

Ist eine Reihe unbedingt convergent, so bleibt sie es auch, wenn man die Glieder mit Grössen multiplicirt, die sämmtlich kleiner als eine gegebene Zahl sind.

Eine Reihe ist convergent, wenn ihre Glieder ihrem absoluten Werth nach bez. kleiner als die einer convergenten Reihe sind.

Eine Reihe mit positiven Gliedern divergirt, wenn ihre Glieder ihrem absoluten Werth nach bez. grösser als die einer divergirenden Reihe sind.

Wenn die Glieder einer Reihe abwechselnd positiv und negativ sind, ihrem absoluten Werth nach abnehmen und der Null zustreben, so convergirt die Reihe.

Wenn

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

eine convergente und

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots$$

eine divergente Reihe mit positiven Gliedern ist, so muss das Product $a_n u_n$, wenn es eine Grenze hat, für $n = \infty$ zur Grenze Null haben.

Ist eine Reihe convergent und hat sie nur positive Glieder, so strebt das Product $n u_n$, wenn es eine Grenze hat, für $n = \infty$ der Null zu.

Olivier, *Crelle,* Bd. 2 hatte das Kriterium für nothwendig und ausreichend gehalten; Abel, *Crelle,* Bd. 3 hat bewiesen, dass es nur nothwendig ist.

In einer convergenten Reihe mit stets abnehmenden positiven Gliedern nähert sich das Product $n u_n$ der Null. Catalan, *Compt. Rend.,* 1886; siehe auch Giudice, *Riv. di mat.,* Bd. 4, S. 165.

Wenn für $n = \infty$ der Ausdruck

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1},$$

in welchem $\sum u_n$ eine gegebene Reihe mit positiven Gliedern und $\sum \frac{1}{a_n}$ eine divergente Reihe mit positiven Gliedern ist, schliesslich grösser als eine positive Zahl bleibt, so convergirt die Reihe $\sum u_n$; wenn dieser Ausdruck dagegen schliesslich negativ bleibt, so divergirt die Reihe. Das Kummer'sche Theorem, Crelle, 13, 1835.

Eine Reihe ist unbedingt convergent, wenn die Grenze des Verhältnisses eines Gliedes zu dem vorhergehenden, falls sie existirt, eine Grösse ist, die ihrem absoluten Werth nach kleiner als 1 *ist* (Cauchy).

Eine Reihe mit positiven Gliedern divergirt, wenn die Grenze des Verhältnisses eines Gliedes zu dem vorhergehenden, falls sie existirt, grösser als 1 *ist* (Cauchy).

Eine Reihe mit positiven Gliedern convergirt oder divergirt, je nachdem der Ausdruck

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$$

für $n = \infty$ *einer Grenze zustrebt, die grösser oder kleiner als* 1 *ist.* Raabe, *Crelle*, Bd. 11.

Eine Reihe mit positiven Gliedern convergirt oder divergirt, je nachdem der Ausdruck

$$\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right] \log n$$

einer Grenze zustrebt, die grösser oder kleiner als 1 *ist.*

In einer convergenten Reihe mit positiven Gliedern wächst die Zahl

$$\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right] n$$

gleichzeitig mit n *unbegrenzt.*

Wenn in einer Reihe mit positiven Gliedern $\sqrt[n]{u_n}$ *schliesslich kleiner als eine gegebene Zahl bleibt, die kleiner als* 1 *ist, so convergirt die Reihe; sie divergirt, wenn* $\sqrt[n]{u_n}$ *schliesslich grösser als* 1 *wird.*

Wenn eine Grenze von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *existirt, so existirt auch die Grenze von* $\sqrt[n]{u_n}$ *und ist der ersteren gleich.*

Eine Reihe mit positiven Gliedern kann convergiren, ohne dass eine Grenze von $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *existirt; in einem solchen Fall kann dieses Verhältniss auch zwischen Grenzen schwanken, von denen die eine sehr gross ist.*

Eine Reihe convergirt oder divergirt, je nachdem die Grenze von $\frac{\log \frac{1}{u_n}}{\log n}$ *grösser oder kleiner als* 1 *ist (das logarithmische Kriterium von* Cauchy*).*

Die Reihe

$$u(1) + u(2) + \cdots + u(n) + \cdots$$

convergirt nur dann, wenn für jedes m

$$\lim_{n=\infty} \int_n^{n+m} u(x)\, dx = 0 \quad \textit{ist (Integralkriterium von Cauchy).}$$

Die Reihe $\sum u_n$ *convergirt, wenn sich solche positive Zahlen* $a_1, a_2, \cdots$ *finden lassen, dass*

$$\lim_{n=\infty} \left\{\log \frac{1}{a_n u_{n+p}} : \sum_0^n \frac{1}{a_r}\right\} > 0 \textit{ wird (Kriterium von Pringsheim).}$$

Die Reihe $\sum u_n$ *convergirt, wenn man positive Zahlen von solcher Beschaffenheit ermitteln kann, dass*

$$\lim_{n=\infty}\left\{a_{n+1}\log\frac{a_n u_{n+p}}{a_{n+1}u_{n+p+1}}\right\}>0$$ *ist (Kriterium von Pringsheim).*

Eine Reihe mit positiven Gliedern convergirt, wenn der Ausdruck

$$\left(1-\sqrt[n]{u_n}\right)\frac{n}{\log n}$$

für ein wachsendes n schliesslich grösser als eine Zahl bleibt, die grösser als 1 ist; sie divergirt, wenn derselbe Ausdruck schliesslich niemals grösser als die Einheit wird (*Kriterium von* Jamet, *Mathesis*, 1892, S. 80; siehe auch Cesàro, *Corso di analisi algebrica*, Turin 1894, S. 489).

Andere Kriterien sind von Gauss, Werke, Bd. 3, S. 139[1]; De Morgan, *Diff. Calc.*, London 1836; Bertrand, *Journ. de Liouville*, Bd. 7, S. 37; Bonnet, *Liouville*, Bd. 8, S. 59—99; Paucker, *Crelle*, Bd. 42, S. 138; Dini, *Ann. delle Univ. Toscane*, Pisa 1867; Du Bois-Reymond, *Crelle*, Bd. 76; Pringsheim, *Math. Ann.*, Bd. 35; Giudice, *Rend.*, Palermo 1890, etc.

Soll eine Reihe bei jeder beliebigen Aenderung der Aufeinanderfolge der Glieder convergent bleiben, so ist dazu nothwendig und ausreichend, dass die Reihe unbedingt convergent sei (*der Dirichlet'sche Satz, Crelle,* Bd. 4); *alsdann bleibt auch die Summe bei jeder Umstellung der Glieder unverändert.*

Ist eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern unbedingt convergent, so ist es auch die aus den positiven Gliedern und die aus den negativen Gliedern gebildete Reihe, jede für sich.

Es sei eine Reihe gegeben, für welche $\lim u_n = 0$ ist, und es sei

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \tag{1}$$

die Summe der positiven Glieder und

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots \tag{2}$$

die Summe der absoluten Werthe der negativen Glieder, wobei die Glieder in der Ordnung genommen werden, in der sie in der gegebenen Reihe aufeinander folgen.

---

1) Aus dem Gauss'schen Kriterium ist das Raabe'sche abgeleitet.

Wenn die beiden Reihen (1) *und* (2) *convergiren, so ist die gegebene Reihe unbedingt convergent; divergiren dagegen die beiden Reihen, so lassen sich die Glieder immer so anordnen, dass die vollständige Reihe entweder convergent oder divergent oder unbestimmt ist; convergirt die letztere, so kann man es derart einrichten, dass sie einen beliebigen gegebenen Werth annimmt* (*der Riemann'sche Satz, gesammelte Werke,* Leipzig 1876, S. 221).

Wenn zwei Reihen $\sum u_n$, $\sum v_n$ gegeben sind, so heissen die Reihen

$$\sum (u_n + v_n)$$

$$\sum (u_n v_1 + u_{n-1} v_2 + u_{n-2} v_3 + \cdots + u_1 v_n)$$

die Summe bez. das Product der beiden gegebenen Reihen.

Addirt oder multiplicirt man zwei oder mehrere unbedingt convergente Reihen miteinander, so ist das Resultat eine unbedingt convergente Reihe (Cauchy).

Die Summe zweier convergenten Reihen ist immer convergent.

Soll das Product zweier convergenten Reihen convergiren, so genügt es, wenn wenigstens eine der gegebenen Reihen unbedingt convergent ist (siehe Mertens, *Crelle,* Bd. 79).

Wenn das Product zweier convergenten Reihen convergirt, so ist sein Werth dem Product der Werthe der beiden gegebenen Reihen gleich.

§ 2. Specielle Zahlenreihen. — Progressionen.

$$1 + \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \cdots = \frac{2^{2r-1}}{2r!} \pi^{2r} B_{2r},$$

$$1 + \frac{1}{3^{2r}} + \frac{1}{5^{2r}} + \cdots = \frac{2^{2r}-1}{2 \cdot 2r!} \pi^{2r} B_{2r},$$

$$1 - \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} - \cdots = \frac{2^{2r}-1}{2r!} \pi^{2r} B_{2r},$$

$$1 - \frac{1}{3^{2r+1}} + \frac{1}{5^{2r+1}} - \cdots = \frac{\pi^{2r+1}}{2r!\,2^{2r+2}} E_{2r},$$

worin die B und E die sogenannten Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen sind. Siehe Kap. 18, § 3.

Nennt man s_p die Reihe der reciproken Werthe der p^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen, so ist:

$$s_2 = \frac{\pi^2}{6}, \quad s_4 = \frac{\pi^4}{90}, \quad s_6 = \frac{\pi^6}{945}, \quad s_8 = \frac{\pi^8}{9450},$$

$$s_3 = \frac{\pi^3}{25{,}7946\cdots} = 1{,}202\,056\,903\,159\,594\,285\,40\cdots,$$

$$s_5 = \frac{\pi^5}{295{,}1215\cdots}, \qquad s_7 = \frac{\pi^7}{2295{,}286\cdots},$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4},$$

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots = 0{,}915\,965\,594\,177\,219\,054\,603\,57\cdots,$$

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \cdots = \frac{\pi^3}{32},$$

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \cdots = \frac{\pi^5}{1536}.$$

Ueber diese Zahlenreihen findet man Näheres bei Stieltjes, *Acta math.*, 1887; Brisse, *Compt. Rend.*, Bd. 64, S. 1139; Novi, *Algebra*, Florenz 1863, S. 118.

$$1 - \log\frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \log\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = C$$ *(die Euler'sche Constante)*, $= 0{,}577\,215\,664\cdots$; vergl. Kap. 18, § 4,

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{5\cdot6\cdot7} + \frac{1}{9\cdot10\cdot11} + \cdots = \frac{1}{4}\log 2 = 0{,}173\,286\,79\cdots,$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{5\cdot6\cdot7} + \cdots = \log 2 - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3} - \frac{1}{3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{5\cdot6\cdot7} - \cdots = \frac{1}{2} - \log 2,$$

$$\frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{4\cdot5\cdot6} + \frac{1}{6\cdot7\cdot8} + \cdots = \frac{3}{4} - \log 2,$$

$$\frac{1}{2\cdot3\cdot4} - \frac{1}{4\cdot5\cdot6} + \frac{1}{6\cdot7\cdot8} - \cdots = \frac{\pi - 3}{4},$$

$$1 + \frac{1}{3\cdot2^3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5\cdot2^5} + \frac{3\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{1}{7\cdot2^7} + \cdots = \frac{\pi}{3},$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4} - \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8} + \cdots = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1\cdot1}{2\cdot4} + \frac{1\cdot1\cdot3}{2\cdot4\cdot6} - \frac{1\cdot1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8} + \cdots = \sqrt{2},$$

$$1 - \frac{1\cdot3}{2\cdot4} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8} - \cdots = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sqrt{2}},$$

$$1 + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4} - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} - \cdots = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\cdots,$$

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots = \frac{1}{e} = 0{,}367\,879\,441\,2\cdots,$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2\cdot 2^2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2\cdot 3^2} + \cdots = \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{1}{2^2} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^2} - \frac{4}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12} - \log 2 = 0{,}129\,319\cdots.$$

Die Reihe
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$
ist bedingt convergent; ihre Summe hängt von der Anordnung der Glieder ab; wenn man auf m positive Terme n negative folgen lässt, so ist die Summe

$$\log 2\sqrt{\frac{m}{n}} \quad \text{(Dirichlet, \textit{Berl. Abh.}, 1837).}$$

Die Reihe
$$\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{1}{(a+rb)^n}$$
heisst *harmonische Reihe von der* n^{ten} *Ordnung.* Für $n = 1$ divergirt sie; ist n positiv und grösser als 1, so erhält man im Allgemeinen eine convergente Reihe. Sie enthält die Reihen auf Seite 60 als specielle Fälle.

Wenn das Verhältniss $\frac{\omega'}{\omega}$ *nicht reell ist, so sind die Doppelreihen*
$$\sum_{m,n} \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^{2r}} = S_{2r},$$
worin die Summirung sich über alle positiven und negativen ganzen Zahlen mit Ausnahme der Combination $m = 0$, $n = 0$ *erstreckt, für* $r > 1$ *unbedingt convergent.*

Die Reihen S_{2r} *kann man durch die Invarianten der elliptischen Functionen ausdrücken.* Nennt man g_2, g_3 die Invarianten der elliptischen Function $\wp$, deren halbe Perioden ω, ω' sein mögen, und die sich durch die ϑ-Functionen für das

Argument Null ausdrücken lassen (siehe die elliptischen Functionen Kap. 16), so erhält man die Formeln

$$S_4 = \frac{1}{60} g_2,$$

$$S_6 = \frac{1}{5 \cdot 28} g_3,$$

$$S_8 = \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7},$$

$$S_{10} = \frac{3 g_2 g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11},$$

$$S_{12} = \frac{1}{2^4 \cdot 11 \cdot 13} \left(\frac{g_3^2}{7} + \frac{g_2^3}{2 \cdot 3 \cdot 5^3} \right),$$

. . . .

Eine Aufeinanderfolge[1]), von der zwei consecutive Glieder eine constante Differenz haben, heisst *eine arithmetische Progression;* sind erst die r^{ten} Differenzen der Terme der Aufeinanderfolge constant, so ist sie eine arithmetische Progression von der r^{ten} Ordnung. Vergl. Kap. 10, § 1.

Die Summe der n ersten Glieder einer arithmetischen Progression 1ten *Ranges erhält man durch Multiplication der Anzahl der Glieder mit der halben Summe des ersten und letzten Gliedes.*

Bezeichnet man mit $\Delta_1^{(m)}$ die m^{te} Differenz in Bezug auf das erste Glied (siehe Kap. X, § 1), *so ist die Summe der n ersten Glieder einer arithmetischen Progression von der* r^{ten} *Ordnung:*

$$S_n = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m+1} \Delta_1^{(m)},$$

worin $\Delta_1^{(m)}$ für $m > r$ Null ist.

Für die arithmetische Progression

$$p, \ 2(p+1), \ 3(p+2), \ 4(p+3), \ \cdots$$

ist

$$S_n = \frac{1}{6} n(n+1)(3p+2n-2),$$

---

1) Unter *Reihe* wollen wir immer die Summe unendlich vieler Glieder verstehen, während wir mit dem Wort *Progression* eine besondere Aufeinanderfolge von Grössen und nicht die Summe dieser Grössen bezeichnen.

und für die arithmetische Progression

$$pq,\ (p-1)(q-1),\ (p-2)(q-2),\ \cdots$$

ist

$$S_n = \frac{1}{6}n\,[6pq-(n-1)(3p+3q-2n+1)].$$

Eine *geometrische Progression* von der r^{ten} Ordnung ist eine Aufeinanderfolge, deren Glieder Potenzen einer Variabelen mit Exponenten sind, welche eine arithmetische Progression von der r^{ten} Ordnung bilden. Eine Reihe, deren Glieder eine geometrische Progression bilden, heisst eine *geometrische Reihe.*

Die Summe der n ersten Glieder einer geometrischen Progression 1ter *Ordnung ist:*

$$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Für $n=\infty$ *convergirt die geometrische Reihe* $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$, *wenn* $|q|<1$ *ist, und hat den Werth* $\frac{1}{1-q}$.

In Bezug auf die Summe der n ersten Glieder geometrischer Progressionen von höherer als der ersten Ordnung verweisen wir auf Cauchy, *Exerc.*, 1827; Jacobi, *Fundam. nova;* Kummer, *Crelle,* Bd. 17; Glaisher, *Quart. J. of math.*, 1871, Bd. 11; etc.

§ 3. Potenzreihen mit reellen und complexen Variabelen. Reihen von Functionen.

Unter den Reihen von Functionen von reellen oder complexen Variabelen sind die einfachsten die *Potenzreihen.* Eine *Reihe ganzer positiver Potenzen einer reellen Variabelen* hat die Form:

$$a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots.$$

Der Convergenzbereich einer Potenzreihe mit einer reellen Variabelen besteht immer aus einem Intervall, dessen Mittelpunkt der Punkt Null ist; in den Endpunkten dieses Intervalls kann die Reihe unbedingt oder bedingt convergiren oder auch divergiren; in jedem Punkt des Inneren dagegen convergirt die Reihe stets unbedingt.

Wenn die Grenze

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$$



existirt, so besteht der Convergenzbereich der Potenzreihe aus den Punkten

$$|z| < \lim_{n=\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

In einem beliebigen in dem Convergenzbereich enthaltenen Intervall convergirt die Potenzreihe gleichmässig. In einem Punkt im Inneren des Convergenzbereiches stellt die Potenzreihe eine stetige Function der Variabelen vor.

Wenn die Reihe in einem Endpunkt $z = \pm R$ des Convergenzbereiches convergirt, so ist die durch die Reihe dargestellte Function in diesem Endpunkt stetig (der Abel'sche Satz). Es kann aber vorkommen, dass bei der Annäherung von z an R eine Grenze der Werthe der Reihe existirt, ohne dass die Reihe in R convergirt. Näheres findet man in des Verfassers: *Note critiche di calcolo infinitesimale,* Milano 1895. Siehe auch Pringsheim, *Math. Ann.*, 44, S. 41, § 3.

Die Potenzreihen lassen sich gliedweise differenziren und integriren, vergl. Kap. 6, § 2 und Kap. 7, § 2. Ueber die *Entwickelbarkeit* einer Function in eine Potenzreihe der Variabelen siehe Kap. 6, § 5, wo man auch viele specielle Potenzreihen findet.

Ist die Variabele z complex, so liegt eine *Potenzreihe mit complexer Variabelen* vor.

Wenn die Moduln der verschiedenen Glieder der Potenzreihe für $z = z_0$ sämmtlich kleiner als eine Zahl A bleiben, so convergirt die Potenzreihe für jedes z, dessen Modul kleiner als der von z_0 ist, unbedingt und mithin auch unabhängig von der Anordnung der Glieder.

Wenn für $z = z_0$ die Reihe nur bedingt convergirt, so ist sie für jedes z, dessen Modul kleiner als der von z_0 ist, unbedingt convergent und für jedes z von grösserem Modul divergent.

Der Convergenzbereich einer Potenzreihe wird von einem Kreis gebildet, dessen Centrum im Coordinatenanfang liegt. In den Punkten längs seines Umfanges kann die Reihe unbedingt oder bedingt convergiren oder auch divergiren. Es können Reihen vorkommen, die für alle Punkte des Umfanges nur bedingt convergiren. Pringsheim, *Math. Ann.*, 25.

Wenn die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \cdots$ einer Potenzreihe so beschaffen sind, dass sich von einem gewissen Werth des Index n an, das Verhältniss $\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}$ in eine Reihe vom Typus

$$\frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1 + \frac{\mu_1 + \nu_1 i}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots$$

entwickeln lässt, so hat der Convergenzkreis der Potenzreihe die Einheit zum Radius. In den Punkten des Umfangs divergirt die Reihe, wenn $\mu_1 \geqq 0$ *ist, convergirt bedingt, ausgenommen für* $z = 1$, *wenn* $0 > \mu_1 \geqq -1$, *und unbedingt, wenn* $\mu_1 < -1$ *ist. Das Weierstrass'sche Theorem, Crelle,* 51.

Die Summe einer Potenzreihe ist für jeden Punkt im Inneren des Convergenzkreises eine stetige Function von z.

Die Grenze der Summe der Glieder einer convergenten Potenzreihe ist Null für $x = 0$, *wenn man die Addition mit dem* n^{ten} *Gliede* $(n > 1)$ *beginnt.*

Innerhalb eines Kreises, der vollständig im Inneren des Convergenzkreises liegt, ist die Potenzreihe gleichmässig convergent.

Wenn zwei Potenzreihen denselben Convergenzkreis haben und sich für jede positive Zahl σ *ein Werth* z, *dessen Modul kleiner als* σ *ist, von solcher Beschaffenheit finden lässt, dass die Werthe der beiden Reihen für ein solches* z *einander gleich sind, so müssen die entsprechenden Coefficienten der beiden Reihen gleich sein.* Der Satz gilt auch dann noch, wenn die beiden Reihen auch Glieder mit negativen ganzen Potenzen von z haben, vorausgesetzt, dass diese in *endlicher* Anzahl auftreten.

Die Potenzreihe wird gliedweise differenzirt und jede ihrer Ableitungen hat denselben Convergenzkreis, wie die gegebene Reihe.

Eine Reihe negativer Potenzen von z, *welche für einen Werth* z_0 *von* z *convergirt, ist für jedes* z, *dessen Modul grösser als der von* z_0 *ist, unbedingt convergent. Der Convergenzbereich einer solchen Reihe wird immer durch die ganze Ebene mit Ausnahme einer Kreisfläche dargestellt, deren Centrum im Coordinatenanfang liegt.*

Wenn eine Reihe positiver und negativer Potenzen von z, *d. h.*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

für $z = z_0$ *convergirt, so ist von den beiden Reihen*

$$\sum_{0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \sum_{1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}$$

die erste für jedes z, *dessen Modul kleiner als der von* z_0 *ist, und die zweite für jedes* z, *dessen Modul grösser als der von* z_0

ist, unbedingt convergent. Der Convergenzbereich einer solchen Reihe wird im Allgemeinen von einem Kreisring gebildet, welcher zwischen den Peripherien zweier Kreise enthalten ist, deren Mittelpunkte mit dem Coordinatenanfang zusammenfallen; speciell kann er die ganze Ebene sein oder sich nur auf die Punkte einer Peripherie beschränken.

Wenn zwei Reihen ganzer (positiver und negativer) Potenzen denselben Convergenzbereich haben und in diesem wenigstens ein solcher Punkt c existirt, dass es in dem mit dem Centrum c und beliebig kleinem Radius um c beschriebenen Kreis immer einen Punkt z' von der Beschaffenheit gibt, dass die Werthe der beiden Reihen in z' gleich sind, alsdann sind die entsprechenden Coefficienten der beiden Reihen einander gleich.

Man habe unendlich viele unbedingt convergente Potenzreihen in einem zwischen zwei Kreisperipherien enthaltenen Bereiche

$$f_m(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{m,n} z^n,$$

und es sei ferner die Reihe

$$\sum_0^{\infty} f_m(z) = f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \cdots$$

in dem ganzen Bereiche gleichmässig convergent; alsdann sind die unendlichen Reihen

$$a_{0n} + a_{1n} + a_{2n} + \cdots$$

für jedes n convergent, und man erhält, wenn ihr Werth mit a_n bezeichnet wird:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{m=0}^{m=\infty} f_m(z),$$

das W e i e r s t r a s s*'sche Theorem, Abh. d. Berl. Akad.*, 1880; *Math. Ann.*, 24.

Wenn eine Reihe ganzer positiver Potenzen $\sum_0^{\infty} a_n z^n$ für alle Punkte z' eines Kreises, dessen Centrum im Coordinatenanfang liegt, convergirt, so lässt sich ihre Summe $f(z)$ durch eine andere Potenzreihe ausdrücken, die sich auf den Punkt z' bezieht, nämlich

$$f(z) = f(z') + \sum_1^{\infty} \frac{f^n(z')}{n!} (z - z')^n,$$

und der Convergenzbereich dieser anderen Reihe ist ein Kreis um z'.

Es sei z' ein Punkt der Peripherie des ersten Kreises vom Radius R und der Punkt werde längs der Peripherie in Bewegung gesetzt; alsdann variirt der Convergenzradius R' der zweiten Reihe und hat eine obere Grenze.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit R der wahre Convergenzradius der ersten Reihe sei, d. h. damit diese Reihe für einen Punkt ausserhalb des Kreises mit dem Radius R nicht mehr convergire, besteht darin, dass die untere Grenze von R' Null sein muss.

Wenn die untere Grenze von R' mit r bezeichnet wird, so ist der wahre Convergenzradius der ersten Reihe $R + r$.

Liegt x' auf dem Umfang des ersten Kreises oder diesem Umfang sehr nahe, so kann sich der zweite Kreis auf Punkte erstrecken, die in dem ersten nicht enthalten sind.

Die Theorie der Potenzreihen mit complexer Variabelen ist von grundlegender Bedeutung für die Lehre von den analytischen Functionen im Sinne von Weierstrass. Vergl. Kap. 13.

Die Potenzreihen sind ein specieller Fall der *Reihen von Functionen.*

Eine Reihe von Functionen, deren Glieder stetige Functionen der Variabelen sind, und die in einem ganzen Intervall gleichmässig convergirt, stellt eine stetige Function dieser Variabelen vor. Die Bedingung der gleichmässigen Convergenz ist jedoch keine nothwendige Bedingung.

Cauchy hatte geglaubt, eine convergente Reihe, deren Glieder stetige Functionen einer Variabelen sind, wäre immer eine stetige Function dieser Variabelen (*Cours d'analyse* etc., S. 131). Abel hat gefunden, dass diese Behauptung falsch ist, *Crelle,* 1, S. 316 Anm., und zum Beweis die Reihe

$$\sin z - \frac{\sin 2z}{2} + \cdots$$

angeführt, die für jedes $|z| \leq \pi$ convergirt und für $|z| < \pi$ den Werth $\frac{1}{2}z$ hat und für $z = \pi$ Null ist. Vergl. dazu Cauchy, *Compt. Rend.*, 36, S. 455; Du Bois-Reymond, *Math. Ann.*, 4, S. 135; Cantor, *Math. Ann.*, 16, S. 269 etc.

Ueber die Theoreme bez. der Differentiation und Integration einer Reihe von Functionen siehe Kap. 6, § 2; Kap. 7, § 2

und die Bemerkungen in des Verfassers: *Note critiche* etc., S. 78 und 291.

Ueber die Entwickelbarkeit einer Function in eine bestimmte Art von Reihen von Functionen z. B. in trigonometrische Reihen (Fourier'sche Reihen), in Reihen von Kugelfunctionen, von Bessel'schen Functionen etc. siehe Kap. 19.

Eine beachtenswerthe Reihe *rationaler* Functionen, die sich auch in eine Potenzreihe entwickeln lässt, ist die Lambert'sche:

$$\frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{z^3}{1-z^3} + \cdots.$$

Sie ist convergent für $|z| < 1$ und gleich

$$z\theta(1) + z^2\theta(2) + z^3\theta(3) + \cdots,$$

worin $\theta(p)$ im Allgemeinen die Anzahl der Factoren von p mit Einschluss von 1 und p selbst bezeichnet; siehe Scherk, *Crelle,* 9, 10; Curtze, *Ann. di mat.,* 1 etc.

Mit den Reihen beschäftigen sich fast alle Bücher über Algebra und Differentialrechnung; eines der ältesten ist: Lacroix, *Traité du calcul différentiel et intégral,* 3 Bde., Paris 1797—1800, 2. Aufl., ib., 1810—1819; andere Lehrbücher sind: Catalan, Paris 1860; Laurent, *Théorie des séries,* Paris 1863; Novi, *Algebra,* Florenz 1863; Reiff, *Geschichte der unendlichen Reihen,* Tübingen 1889; vergl. auch die ausgezeichnete Darstellung über Irrationalzahlen und Convergenz unendlicher Processe von A. Pringsheim in der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften,* Bd. 1, S. 49 u. f., Leipzig 1898.

§ 4. Unendliche Producte.

Es sei eine unbegrenzte Aufeinanderfolge von Grössen $u_1, u_2, \cdots$ gegeben und man bilde das Product Π_n der ersten n dieser Grössen.

Wenn der Grenzwerth von Π für $n = \infty$ einer endlichen Grösse zustrebt, so heisst *das unendliche Product* der gegebenen Grössen ein *convergentes unendliches Product.*

In einem convergenten Product ist $\lim u_n = 1$; daraus folgt, *dass von einem gewissen n an die folgenden u_n sämmtlich positiv sind.*

Soll ein unendliches Product Π convergent und nicht Null sein, so ist dazu nöthig und ausreichend, dass die Reihe

$$\log u_1 + \log u_2 + \cdots$$

convergire.

Divergirt diese Reihe nach $-\infty$ *hin, so strebt das Product* Π *der Null zu.*

Damit ein unendliches Product, dessen Factoren positiv und sämmtlich kleiner oder grösser als 1 *sind, convergire und nicht Null sei, ist es nöthig und ausreichend, dass die Reihe*

$$(u_1 - 1) + (u_2 - 1) + \cdots$$

convergire.

Ein unendliches Product $u_1 u_2 \cdots$, *dessen Factoren beliebig sind, ist convergent und nicht Null, wenn die beiden Reihen*

$$(u_1 - 1) + (u_2 - 1) + \cdots$$

$$(u_1 - 1)^2 + (u_2 - 1)^2 + \cdots$$

convergiren.

Wenn nur die erste Reihe convergirt, die zweite aber divergirt, so ist das Product zwar convergent, hat aber den Werth Null. Divergiren dagegen beide Reihen, so lässt sich im Allgemeinen über die Convergenz des unendlichen Products nichts sagen, es sei denn, die Grössen $u_1, u_2, \cdots$ *wären sämmtlich grösser als* 1, *in welchem Fall das Product divergirt.*

Sind $u_1, u_2, \cdots$ *complexe Grössen, so convergirt das unendliche Product, wenn die Reihe*

$$(u_1 - 1) + (u_2 - 1) + \cdots$$

unbedingt convergirt (Weierstrass).

Wenn ein Product bei jeder beliebigen Anordnung der Factoren denselben Werth behält, so heisst es *ein unbedingt convergentes unendliches Product.*

Das Product ist unbedingt convergent, falls die Reihe

$$\log u_1 + \log u_2 + \cdots$$

unbedingt convergirt.

Sind $u_1, u_2, \cdots$ *die sämmtlichen Factoren unter* 1 *und* $u_1', u_2', \cdots$ *alle Factoren über* 1, *wobei wir die immer zulässige Voraussetzung machen, dass sie ohne Ausnahme positiv sind, so convergirt das Product unbedingt, wenn die Producte*

$$u_1 u_2 \cdots, \qquad u_1' u_2' \cdots,$$

jedes für sich, convergiren.

Man vergleiche: Kummer, *Crelle,* Bd. 13; Arndt, *Grunert's Archiv,* Bd. 21; Weierstrass, *Crelle,* Bd. 51, *Funct.-Lehre,* Berlin 1886, S. 206, wieder abgedruckt in den ges. Werken, Bd. 1, S. 173; Dirichlet, *Berl. Abhandl.,* 1837; Novi, *Algebra,* Florenz 1863; Stolz, *allgemeine Arithmetik,* 2, Leipzig 1886; Pringsheim, *elementare Darstellung der Convergenz unendlicher Producte,* Math. Ann., Bd. 33.

Die Hauptformeln in Bezug auf die unendlichen Producte sind die folgenden:

$$\sin x = x \prod_{r=1}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{r^2\pi^2}\right],$$

$$\sinh x = x \prod_{r=1}^{\infty} \left[1 + \frac{x^2}{r^2\pi^2}\right],$$

$$\cos x = \prod_{r=1}^{\infty} \left[1 - \frac{x^2}{(r\pi - \frac{1}{2}\pi)^2}\right],$$

$$\cosh x = \prod_{r=1}^{\infty} \left[1 + \frac{x^2}{(r\pi - \frac{1}{2}\pi)^2}\right],$$

$$\operatorname{tg} \frac{m}{n} \frac{\pi}{2} = \frac{n}{n-m} \cdot \frac{2n-m}{n+m} \cdot \frac{2n+m}{3n-m} \cdot \frac{4n-m}{3n+m} \cdots$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{n}{n-m} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2n-m}{n+m} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2n+m}{3n-m} \cdots.$$

Diese Entwickelungen sind von Euler, *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne 1748; man beachte, dass sie unendliche Producte vorstellen, die nicht unbedingt convergent sind; ihr Werth ändert sich je nach der Anordnung der Factoren. Für eine verschiedene Anordnung hat Cayley den Werth des Products berechnet. Wenn man z. B. in dem Product für den *Sinus*, in welchem die Factoren

$$\left[1 - \frac{x}{r\pi}\right]\left[1 + \frac{x}{r\pi}\right]$$

so aufeinander folgen, dass die demselben absoluten Werth von r entsprechenden nebeneinander stehen, die nämlichen Factoren so ordnet, dass auf m den positiven r entsprechende Factoren n den negativen r entsprechende folgen, so erhält das Product den Werth

$$\sqrt[\pi]{\left(\frac{m}{n}\right)^x} \sin x.$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$ *(die Wallis'sche Formel),*

$$e = \frac{2}{1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}\right)^{\frac{1}{8}} \cdots$$ *(die Catalan'sche Formel, Journ. de Liouville,* 1875).

Bezeichnet man die Euler'sche Constante (siehe Kap. 18) mit C, so erhält man

$$C = \log \prod_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}},$$

$$\prod_1^\infty \frac{(2n-1)^2}{(2n-1)^2 - x^2} = 1 + \frac{x^2}{1^2 - x^2} + \frac{1^2 x^2}{(1^2 - x^2)(3^2 - x^2)} + \frac{3^2 x^2}{(1^2 - x^2)(3^2 - x^2)(5^2 - x^2)} + \cdots,$$

$$\prod_1^\infty (1 + x^n z) = \sum_0^\infty \frac{x^{\frac{n \cdot n+1}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)} z^n \text{ (Euler)},$$

$$\prod_1^\infty \frac{1}{1 - x^n z} = \sum_0^\infty \frac{x^n}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)} z^n \text{ (Euler)},$$

$$\prod_{r=0}^\infty (1 - q^{2r+2})(1 - 2q^{2r+1}\cos 2x + q^{4r+2})$$
$$= \sum_{r=0}^\infty (-1)^r q^{r^2} \cos 2rx \text{ für } |q| < 1 \text{ (Jacobi)}.$$

Andere Formeln in Bezug auf die Entwickelung elliptischer Functionen in unendliche Producte findet man in Kap. 16.

§ 5. Analytische factorielle Facultäten.

Analytische Facultäten pflegt man endliche oder unendliche Producte zu nennen, deren Factoren nach gewissen bestimmten Gesetzen fortschreiten, die wir im Folgenden näher angeben.

Die Heine'schen Facultäten (E. Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, Bd. 1, 2. Aufl., Berlin 1878, S. 109) sind Producte von der Form

$$(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m).$$

Die Kramp'schen Facultäten (*Ann. de Gergonne*, Bd. 3, 1812) haben den Typus

$$x(x+d)(x+2d)\cdots\{x+(m-1)d\}.$$

Ist $d = 1$ oder $d = -1$, so erhält man die sogenannten *factoriellen* Facultäten. Ist einer der Endfactoren die Einheit,

so hat man *die factorielle Facultät* einer ganzen Zahl, die mit $n!$ bezeichnet wird.

Die Facultät $n!$ liegt zwischen den beiden Grenzen

$$(\sqrt{n})^n < n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \text{(Cauchy, } \textit{Exerc.,} \text{ 4, S. 207).}$$

Die Verallgemeinerung der Facultät für nicht ganze Zahlen führt zu der *Gamma*function Euler's; die Ausdehnung auf complexe Zahlen hat Cayley untersucht.

Die analytischen Facultäten von Weierstrass (*Funct.-Lehre,* S. 200) sind unendliche Producte vom Typus

$$(z, d)^m = d^m \frac{z}{z + md} \prod_{r=1}^{\infty} \left(\frac{r+1}{r}\right)^m \frac{z + rd}{z + (m+r)d}$$

für beliebige reelle oder complexe Werthe von z, d und m.

Ist z und m reell und d positiv, so erhält man die Bessel'sche Facultät.

Die factorielle Facultät von Weierstrass (a. a. O. S. 193 u. ff.)

$$z \prod_{r=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r+1}\right)^z \frac{z+r}{r}$$

ist eine endliche und continuirliche analytische Function von z.

Untersuchungen über die factoriellen Facultäten findet man in: Claussen und Crelle, *Crelle,* Bd. 7; Bessel, *Abhandl.,* Bd. 2; Ohm, *Crelle,* Bd. 39; Oettinger, *Crelle,* Bd. 33, 35, 38, 44; Schläfli, *Crelle,* Bd. 43, 67; Weierstrass, *Crelle,* Bd. 51.

Aeltere Abhandlungen sind die von Vandermonde, *Mém. de Paris,* 1772 und von Kramp, a. a. O. Vandermonde nannte die analytischen Facultäten *irrationales de différentes ordres.*

Neuere Studien über Factoriellen und Facultäten finden sich bei Capelli, *Giorn. di Batt.,* Bd. 31, 33; man vergleiche auch Pringsheim, *Encyklopädie,* S. 117 und 118, Bd. 1.

§ 6. Kettenbrüche.

Ein Ausdruck von der Form

$$\cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}}$$

heisst ein *absteigender Kettenbruch oder absteigender continuirlicher Bruch* und der Ausdruck

$$\cfrac{a_1 + \cfrac{a_2 + \cfrac{a_3 + \cdot^{\cdot^{\cdot}}}{b_3}}{b_2}}{b_1}$$

ein *aufsteigender Kettenbruch.* In dem Folgenden meinen wir, wenn es nicht ausdrücklich anders gesagt wird, immer die ersteren.

Die Anzahl der Glieder kann endlich oder unendlich gross sein.

Die Grössen a und b werden die *Theilzähler* bez. *Theilnenner* genannt. Schliesst man mit dem n^{ten} Term ab, so heisst der so erhaltene endliche Bruch der n^{te} *Näherungsbruch* und wird mit $\frac{A_n}{B_n}$ bezeichnet.

Man kann annehmen, alle Zähler seien 1.

Die Näherungsbrüche genügen der folgenden recurrirenden Beziehung:

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}}{b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}}.$$

Der Zähler A_n und der Nenner B_n eines Näherungsbruches lassen sich durch Determinanten von der Art der sogenannten Continuanten (Kap. 3, § 3; siehe auch Pascal, *Determ.*, S. 201, Mailand 1896) ausdrücken:

$$A_n = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & b_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & b_n \end{vmatrix},$$

$$B_n = \begin{vmatrix} b_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & b_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & b_n \end{vmatrix}.$$

Die Differenz zweier auf einander folgender Näherungsbrüche ist

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n} = (-1)^n \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}{B_n B_{n+1}}.$$

Die Differenz zweier Näherungsbrüche von der m^{ten} und der n^{ten} Ordnung $(m > n)$ hat dagegen den Werth:

$$\frac{A_m}{B_m} - \frac{A_n}{B_n} = (-1)^n \frac{q a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}{B_m B_n},$$

worin q den Nenner des Bruches

$$\frac{p}{q} = a_{n+1} + \cfrac{a_{n+2}}{b_{n+2} + \cfrac{a_{n+3}}{b_{n+3} + \cdots + \cfrac{a_m}{b_m}}}$$

angibt.

Ein Näherungsbruch lässt sich immer durch die Formel

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{B_{n-1} B_n}$$

ausdrücken.

Wenn alle a und b positiv sind, so bilden die Differenzen zwischen zwei aufeinander folgenden Näherungsbrüchen eine Reihe mit abnehmenden Gliedern und sind abwechselnd positiv und negativ.

Macht man bez. der a und b dieselbe Voraussetzung, so bilden die Näherungsbrüche mit geradem Index eine zunehmende Reihe und die mit ungeradem Index eine abnehmende Reihe.

Unter derselben Voraussetzung ist jeder Näherungsbruch immer zwischen zwei aufeinander folgenden mit kleineren Indices enthalten.

Die Näherungsbrüche der Kettenbrüche, deren sämmtliche Theilzähler die Einheit, und deren Theilnenner ganze positive Zahlen sind, stellen Brüche vor, die sich nicht reduciren lassen.

Die Näherungsbrüche von

$$\cfrac{a_1}{b_1 - \cfrac{a_2}{b_2 - \cfrac{a_3}{b_3 - \cdots}}},$$

worin man sich die a, b sämmtlich als positiv und durch die Relation $a_r \geqq b_r + 1$ verbunden vorstellen muss, sind ohne Ausnahme positiv, kleiner als 1 und wachsen.

Wenn $b_r = a_r + 1$ ist, so wird der Näherungsbruch

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1 + a_1 a_2 + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_n}{1 + a_1 + a_1 a_2 + \cdots + a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Jeder Näherungsbruch eines Kettenbruches, dessen Glieder ganze Zahlen sind, kommt dem Werth des Kettenbruchs näher, als jeder andere Bruch, dessen Glieder einfacher sind (Euler, *Introd.*, § 382).

Wenn für $n=\infty$ *der Grenzwerth von* $\frac{A_n}{B_n}$ *existirt, so sagt man, der Kettenbruch convergire.*

Wenn die Theilzähler a sämmtlich positiv sind und die Nenner b sämmtlich dasselbe Vorzeichen haben, so muss, damit der Kettenbruch convergire, wenigstens eine der beiden Reihen

$$b_2\frac{a_1}{a_2}+b_4\frac{a_1 a_3}{a_2 a_4}+b_6\frac{a_1 a_3 a_5}{a_2 a_4 a_6}+\cdots$$

$$b_3\frac{a_2}{a_3}+b_5\frac{a_2 a_4}{a_3 a_5}+b_7\frac{a_2 a_4 a_6}{a_3 a_5 a_7}+\cdots$$

divergiren. Das Seidel'sche *Kriterium, Habilitationsschrift,* München 1846 und Stern, *Crelle,* Bd. 37. *Derselbe Kettenbruch ist unbestimmt, wenn die beiden angegebenen Reihen convergiren.*

Ein Kettenbruch mit positiven Elementen convergirt, wenn

$$\lim_{n=\infty}\frac{b_{n+1}b_n}{a_{n+1}}>0 \text{ ist,}$$

oder wenn unter der Voraussetzung

$$\alpha_{n+1}=\frac{b_{n+1}b_n}{a_{n+1}}$$

die Reihe

$$\frac{\alpha_{n+1}}{1+\alpha_{n+1}}+\frac{\alpha_{n+2}}{1+\alpha_{n+2}}+\cdots$$

divergirt. Novi, *Algebra,* Florenz 1863.

Der unbestimmte Kettenbruch, dessen Elemente ganze und positive Zahlen sind, und die Bedingung $b_n \geq a_n$ *erfüllen, hat zum Werth eine irrationale Zahl, die kleiner als* 1 *ist.*

Der Kettenbruch

$$\cfrac{a_1}{b_1-\cfrac{a_2}{b_2-\cdots}},$$

worin die a, b positiv sind, convergirt, wenn

$$b_r \geq a_r + 1$$

ist.



Der Kettenbruch

$$\cfrac{1}{h_1 - \cfrac{1}{h_2 - \cdots}}\,,$$

worin die h positiv sind, convergirt, wenn von einem bestimmten Werth des Index n an stets $h_n \geqq 2$ *ist.*

Ein Kettenbruch heisst *periodisch*, wenn er aus denselben Partialbrüchen besteht, die sich in derselben Ordnung wiederholen.

Jeder periodische Kettenbruch, der zu Theilzählern die Einheit und zu Theilnennern ganze Zahlen hat, ist die eine Wurzel einer Gleichung zweiten Grades, deren andere Wurzel ein periodischer Kettenbruch von derselben Periode aber der umgekehrten Reihenfolge ist. Euler, Lagrange.

Der einfacheren Schreibweise wegen wollen wir den Kettenbruch mit den Partialbrüchen $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots$ mit dem Symbol $\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots\right)$ bezeichnen.

Man erhält dann die folgenden Formeln:

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \left(\frac{b}{2a}, \frac{b}{2a}, \cdots\right),$$

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1^2}{1}, \frac{2^2}{1}, \frac{3^2}{1}, \cdots\right) = \log 2,$$

$$\left(\frac{1}{1}, -\frac{x}{1}, \frac{x}{2}, -\frac{x}{3}, \frac{x}{2}, -\frac{x}{5}, \frac{x}{2}, \cdots\right) = e^x,$$

$$\left(\frac{x}{1}, \frac{\frac{1\cdot 1}{1\cdot 2}x}{1}, \frac{\frac{1\cdot 1}{2\cdot 3}x}{1}, \frac{\frac{2\cdot 2}{3\cdot 4}x}{1}, \frac{\frac{2\cdot 2}{4\cdot 5}x}{1}, \cdots\right) = \log(1 + x),$$

$$\left(\frac{x}{1}, -\frac{x^2}{3}, -\frac{x^2}{5}, -\frac{x^2}{7}, \cdots\right) = \operatorname{tg} x,$$

$$\left(\frac{x}{1}, \frac{x^2}{3}, \frac{x^2}{5}, \frac{x^2}{7}, \cdots\right) = \operatorname{tgh} x,$$

$$\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{3}, -\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{5}, -\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{7}, \cdots\right) = 1.$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + ax = b$$

sind

$$x_1 = \left(\frac{b}{a}, \frac{b}{a}, \cdots\right),$$

$$x_2 = -a + \left(\frac{b}{a}, \frac{b}{a}, \cdots\right).$$

Als den Begründer der Lehre von den Kettenbrüchen kann man Euler ansehen, *Comm. Petrop.*, 9, 11, und *Novi Comm. Petrop.*, 9, 11; *Introduct.* etc.

Später beschäftigten sich mit ihr unter Anderen: Lagrange, *Berliner Memoiren*, 1769—70; Legendre, *Théorie des nombres*, Paris 1830, 3. Aufl., deutsch von H. Maser, Leipzig 1886, 2 Bde.; Moebius, *Crelle*, 6; Gauss, *ges. Werke*, 3, Göttingen 1866, *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \cdots$, *Sectio secunda, Fractiones continuae;* vergl. auch die Voranzeige, ges. Werke 3, S. 199; Stern, *Crelle*, 10, 11, 37; Heine, *Kugelfunctionen*, vergl. S. 72. Mehr Einzelheiten, auch historische Bemerkungen, findet man in den Arbeiten von Günther, der sich mit dieser Theorie eingehend befasst hat: *Grunert's Archiv*, 55; *Math. Ann.*, 7; *Beiträge zur Gesch. der Kettenbr.*, Weissenburg 1872; *Darstellung der Näherungsw. von Kettenbr.*, Erlangen 1873.

Ueber eine von Sylvester herrührende *geometrische Darstellung* kann man die *Algebra* von Novi nachsehen, Florenz 1863, in welcher die Theorie umfassend und klar behandelt wird.

Eine Verallgemeinerung findet man bei Jacobi, *Crelle*, 69; Fürstenau, *Programm*, Wiesbaden 1872; Günther, *Grunert's Archiv*, 57, und den viel neueren Arbeiten von Pincherle, *Acc. Bologna*. Ueber die *aufsteigenden Kettenbrüche* siehe Günther, *Schlöm. Zeitschr.*, 21.



Kapitel V.

Die Lehre von den algebraischen Gleichungen.

§ 1. Allgemeines.

Setzt man ein Polynom in x, d. h. eine ganze rationale Function von x, gleich Null, so erhält man eine *algebraische Gleichung*, $f(x) = 0$. Der Grad des Polynoms heisst *der Grad der Gleichung*.

Wurzel einer Gleichung heisst jede Zahl, welche, an die Stelle von x gesetzt, die Gleichung identisch erfüllt.

Jede Gleichung mit reellen oder complexen Coefficienten hat immer eine Wurzel (das D'Alembert'sche Theorem) und daher soviele reelle oder complexe Wurzeln, als die Zahl Einheiten hat, welche ihren Grad angibt.

Der erste allerdings nicht ausreichende Beweis dieses Fundamentalsatzes der Algebra wurde von D'Alembert gegeben. Den ersten einwandfreien Beweis verdankt man der Doctordissertation von Gauss, 1799. Vergl. die mit Anmerkungen versehene von Netto besorgte Ausgabe der vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren ersten und zweiten Grades (1799 bis 1849) in Ostwald's *Klassikern der exacten Wissenschaften*, Leipzig 1898. Siehe auch Loria, *Il teorema fondam.* etc., Rivista di mat., Bd. 1.

Wenn die Gleichung nur reelle Coefficienten hat und $\alpha + i\beta$ *eine Wurzel ist, so wird auch* $\alpha - i\beta$ *eine Wurzel sein.*

Wenn r von den Wurzeln einander gleich und gleich a sind, so wird a *eine vielfache Wurzel von der Ordnung der Vielfachheit* r *genannt.*

In einem solchen Fall ist die linke Seite der Gleichung durch $(x - a)^r$ *theilbar.*

Die Verhältnisse zwischen den Coefficienten der Gleichung und dem Coefficienten der höchsten Potenz von x sind die

elementaren symmetrischen Functionen der Wurzeln der Gleichung; d. h. wenn die Gleichung

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

lautet und $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ die Wurzeln sind, so bestehen die Beziehungen:

$$-\frac{a_1}{a_0} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n,$$

$$+\frac{a_2}{a_0} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n,$$

$$-\frac{a_3}{a_0} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n,$$

. . . .

$$(-1)^n\frac{a_n}{a_0} = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

Bezeichnet man mit $S_1, S_2, \cdots$ die Summen der 1ten, $2^{\text{ten}}, \cdots$ Potenzen der Wurzeln, so lassen sich die symmetrischen Functionen S durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken (*die sogenannten Newton'schen oder Girard'schen Formeln*).

Diese Formeln lauten:

$$a_0S_1 + a_1 = 0,$$

$$a_0S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0,$$

$$a_0S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 + 3a_3 = 0,$$

. . . .

$$a_0S_n + a_1S_{n-1} + \cdots + na_n = 0,$$

$$a_0S_{n+k} + a_1S_{n+k-1} + \cdots + a_nS_k = 0 \quad (k=1,2,\cdots).$$

Jede ganze symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung ist eine ganze und rationale Function der Verhältnisse der Coefficienten zu dem Coefficienten a_0 *des ersten Gliedes.* Diesem Theorem entspricht das andere:

Jede ganze symmetrische Function von n Grössen ist eine ganze rationale Function der elementaren symmetrischen Functionen dieser n Grössen.

Tabellen dieser symmetrischen Functionen findet man bei Salmon, *Algèbre Supérieure*, éd. fr., S. 503; ferner bei Faà di Bruno, *Einleitung in die Theorie der binären Formen*, deutsch von Walter, Leipzig 1881, im Anhang. Siehe auch Meyer Hirsch, *Sammlung von [illegible] aus der Theorie der alg.*

Gleichungen, der schon 1809 alle symmetrischen Functionen bis zum 10ten Grade berechnet hat.

Löst man die obigen Formeln nach den a oder nach den S auf, so erhält man *die Waring'schen Formeln:*

$$S_i = i \sum (-1)^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \frac{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n - 1)!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_n!} \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{\lambda_2} \cdots \left(\frac{a_n}{a_0}\right)^{\lambda_n},$$

worin sich $\sum$ *über alle Exponenten* λ *erstreckt, welche die sämmtlichen ganzen positiven Werthe* 0, 1, 2, $\cdots$ *haben, die der Beziehung*

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = i$$

genügen.

Ferner ist

$$\frac{a_i}{a_0} = \sum \frac{(-1)^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_i}}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots i^{\lambda_i}} \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_i!} S_1^{\lambda_1} S_2^{\lambda_2} \cdots S_i^{\lambda_i},$$

worin

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + i\lambda_i = i \quad \textit{ist.}$$

Wenn man in den Newton'schen Formeln

$$a_0, a_1, \cdots, a_n \quad \text{in} \quad a_n, a_{n-1}, \cdots a_0$$

umändert und die positiven Exponenten der Grössen S in negative verwandelt, so erhält man *die Formeln für die Summen der Potenzen der reciproken Wurzeln.*

§ 2. Transformation der Gleichungen.

Setzt man

$$x = y + \varepsilon,$$

so ergibt sich aus $f(x) = 0$ eine Gleichung für y, $F(y) = 0$, deren Wurzeln denjenigen von $f = 0$, um ε vermindert, gleich sind.

Die Coefficienten von F haben die Form

$$\frac{1}{r!} f^{(r)}(\varepsilon),$$

worin $f^{(r)}$ *die* r^{te} *Derivirte bezeichnet* (vergl. Kap. 6, § 5).

Aus

$$n a_0 \varepsilon + a_1 = 0$$

wird ε *bestimmt, der Gleichung für* y *fehlt alsdann das zweite Glied.*

Um die Gleichung zu erhalten, deren Wurzeln die reciproken der gegebenen Gleichung sind, braucht man nur die Reihenfolge

$$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n \quad \textit{in} \quad a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_0$$

umzuändern.

Die Tschirnhausen'sche Transformation. Die gegebene Gleichung sei

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0;$$

man setze

$$y = p_0 + p_1 x + \cdots + p_m x^m \quad (m < n);$$

bilde dann die successiven Potenzen von y und mache bei der Entwickelung dieser Potenzen mit Hülfe der gegebenen Gleichung den höchsten Exponenten von x immer kleiner als n.

Man erhält so:

$$y^2 = p_0' + p_1' x + \cdots$$
$$y^3 = p_0'' + p_1'' x + \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Auf diese Art kommt man zu n linearen Gleichungen für $x,\ x^2,\ \cdots,\ x^{n-1}$. Eliminirt man diese Grössen, so ergibt sich eine Gleichung:

$$y^n + q_1 y^{n-1} + \cdots + q_n = 0,$$

worin die Grössen q rationale Functionen von p und a sind. Durch dasselbe Eliminationsverfahren kann man x rational mittelst y ausdrücken; das Resultat ist daher, dass sich die Wurzeln der Gleichung für x und der Gleichung für y (von demselben Grad) rational die ersten durch die zweiten und umgekehrt ausdrücken lassen. Diese Transformation heisst die *Tschirnhausen*'sche.

Man kann die Willkür in der Wahl der Grössen p dazu benutzen, einige q verschwinden zu lassen. Soll jedoch die Gleichung für y binomisch werden, so sind im Allgemeinen die Gleichungen zur Bestimmung der Grössen p algebraisch nicht auflösbar. Auf diese Transformation gründen sich die Untersuchungen von Jerrard und Bring (siehe Klein, *Ikosaeder* etc., S. 143).

Gleichung für die Quadrate der Differenzen der Wurzeln heisst diejenige Gleichung vom $\frac{n(n-1)}{2}$ten Grad, deren Wurzeln die Gestalt $(\alpha_i - \alpha_j)^2$ haben, wenn man unter $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n$ die Wurzeln einer gegebenen Gleichung versteht.

Die Coefficienten einer solchen Gleichung sind symmetrische Functionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung und lassen



sich mithin rational durch die Coefficienten der letzteren ausdrücken. Das Verfahren zur Ermittelung solcher Ausdrücke ist nach Lagrange das folgende. Man bezeichne mit S_i die Summen der i^{ten} Potenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung und mit S_i' die Summen der i^{ten} Potenzen der Wurzeln der transformirten Gleichung; man erhält dann die Formel:

$$2S_i' = \sum_r (-1)^r \binom{2i}{r} S_r S_{2i-r} \quad (r = 0, 1, \cdots, 2i).$$

Hat man die S_i' ermittelt, so ergeben sich mit Hülfe der Newton'schen Formeln die gesuchten Coefficienten.

§ 3. Die Erniedrigung des Grades der Gleichungen. Reciproke Gleichungen.

Wenn man durch eine mit der Variabelen x vorgenommene Substitution die Auflösung der gegebenen Gleichung auf die Auflösung einer anderen von geringerem Grade zurückführen kann, so sagt man, *die Gleichung lasse sich erniedrigen.*

Eine Gleichung heisst *reciprok,* wenn die Wurzeln sich in Paare ordnen lassen und dabei die beiden Wurzeln eines Paares $\left(\alpha, + \frac{1}{\alpha}\right)$ sind.

Bei einer reciproken Gleichung von paarem Grad sind die von den Endtermen gleichweit abstehenden Coefficienten einander gleich und haben dasselbe Vorzeichen.

Wenn die reciproke Gleichung von unpaarem Grad ist, so sind die Coefficienten, die von den Enden gleichweit abstehen, entweder gleich und von demselben Vorzeichen oder gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen. Alsdann hat die Gleichung entweder $x = -1$ oder $x = +1$ zur Wurzel, je nachdem das erstere oder letztere der Fall ist. Dividirt man die linke Seite durch $x \pm 1$, so wird sie auf eine reciproke Gleichung von paarem Grad reducirt.

Dividirt man in einer reciproken Gleichung von dem paaren Grad $2n$ die linke Seite durch x^n und setzt dann

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

so erhält man eine Gleichung für y vom n^{ten} Grad.

Bei einer solchen Umformung hat man die Grössen X_r

$$X_r = x^r + \frac{1}{x^r}$$

durch y mit Hülfe der Recursionsformeln

$$X_{r+1} = y X_r - X_{r-1}$$

auszudrücken.

Die Geschichte der Lehre von den Gleichungen ist in ihren Anfängen die Geschichte der Algebra selbst.

Die ersten Versuche, die cubischen Gleichungen zu lösen, hat Fibonacci angestellt, gewöhnlich Leonardo Pisano genannt, (*Liber abaci*, 1202, 1228); die richtige Auflösung der Gleichung $y^3 + py + q = 0$ wurde nach dem Bericht Cardano's, *Ars magna de regulis algebraicis*, 1545, von Scipione del Ferro, 1515 gefunden, welcher sie seinem Freunde Floridus mittheilte. Anlässlich eines wissenschaftlichen Wettstreites legte Floridus dem Nicola Tartaglia Probleme vor, die den letzteren angeblich zur erneuten Auffindung der Lösung der cubischen Gleichung führten. Tartaglia theilte seine Arbeiten dem Cardano mit, welcher sie wider den Willen des Tartaglia in seiner *Ars magna* veröffentlichte und neue Resultate, unter Anderem die Wegschaffung des quadratischen Gliedes einer cubischen Gleichung hinzufügte. 1546 machte Tartaglia in seinen *Quesiti ed invenzioni diverse*, Venezia, seine Ansprüche geltend; ob Tartaglia's Ansprüche überhaupt gerechtfertigt sind oder ob nicht bei ihm Aneignung fremden geistigen Eigenthums vorliegt, ist zweifelhaft. In Kap. 39 der *Ars magna* wird auch die von Cardano's Schüler Ludovico Ferrari gefundene Auflösung der biquadratischen Gleichungen ohne cubisches Glied gelehrt. Vergl. M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. 2, Leipzig 1892, S. 442—499.

Ein vollständiges Verzeichniss aller älteren und neueren Werke über die Gleichungen findet man am Ende des werthvollen Matthiessen'schen Buches, *Grundzüge der Alg. der litt. Gleich.*, Leipzig 1896. (Ueber die älteren Arbeiten vergl. Moritz Cantor's eben citirte Vorlesungen.) Wir geben nur die wichtigsten an und ordnen sie nach der Zeit: Vieta, *Opera mathematica*, edirt von F. van Schooten, Lugd. Batav., 1646; in Bezug auf seine algebraischen Leistungen vergl. Cantor, Bd. 2, S. 577—588; Cartesius, *Géométrie*, Leyden 1637, lateinisch



mit Commentar von F. van Schooten, *Lugd. Batav.* 1649 (Cantor, Bd. 2, S. 722); De la Hire, *Construction ou effection des équations*. Paris 1679: Tschirnhausen, *Acta Erudit. Lips.*. 2, 1683 (Cantor, Bd. 3, S. 108); Halley, *Phil. Trans.*, 1687 (Cantor, Bd. 3, S. 114); Roberval, *Mém. de Paris*. 6, 1693; Rolle, *Alg.*. Paris 1690; *Mém. de Paris*. 1708, 1709, 1711 (Cantor, Bd. 3, S. 115); Isaac Newton, *Arithmetica universalis*. Cambridge 1707, 3. Aufl. von C. J. s'Gravesande, Leyden 1732 (Cantor, Bd. 3, S. 378 u. ff. eingehend besprochen); Nicole, *Mém. de Paris*, 1738, 1741, 1743; Euler, *Comm. Petr.*, 1739; *Novi Comm. Petr.*. 9, 14; *Mém. de Berlin*. 1764 etc. (bei Cantor, Bd. 3, S. 554—556, 564, 565, 575—579, 580—584 betreffs seiner algebr. Leistungen behandelt); Bézout, *Mém. de Paris*, 1762, 1764, 1765, 1768; *Théorie des équat.*. Paris 1779; Waring, *Misc. anal.*, *Medit. alg.*, Cantabrigiae 1762, 1770; Lagrange, *Traité de la resol. des équat.*, Paris 1798; *Mém. de Berlin*. 1768—1773; Vandermonde, *Mém. de Paris*. 1773, 1774; Ruffini, *Teoria generale delle equaz.* etc., Bologna 1798; *Mem. Soc. Ital.*, 1803, 1805; *Mem. Ist. Nazionale*. 1806 etc.; Budan, *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques d'un degré quelconque*. Paris 1807; Fourier, *Analyse des équations*, Paris 1831; Gauss, *Disquisitiones arithmeticae; Auflös. der binom. Gleich.*, Gött. Abh., 1849; Abel, *Oeuvres complètes*. Bd. 1 u. 2, Christiania 1881; von seinen hierher gehörigen Abhandlungen führen wir an: *Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui dépassent le quatrième degré*, Crelle's Journal, Bd. 1, 1826; *Mémoire sur une classe particulière des équations résolubles algébriquement*. Crelle's Journal, Bd. 4, 1829; *Sur la résolution algébrique des équations*, aus dem Nachlass; Galois, *Journ. de Liouville*. Bd. 11, 1846; Cauchy, *Sur la résolut. des équat. numériques* etc., Paris 1829; *Compt. Rend.*, 1836, 1840 etc.; Sturm, *Sur la résol. des équat. numériques*, Paris 1835; Leopold Kronecker, von dessen zahlreichen wichtigen Arbeiten wir nur citiren: *Ueber die algebraisch auflösbaren Gleichungen*, Monatsberichte der Berl. Akad., 1853, 1856; *Entwicklungen aus der Theorie der algebraischen Gleichungen*, ib. 1879; *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*, Crelle's Journal, Bd. 92. Dazu kommen noch alle Arbeiten der verschiedenen Autoren über die Theorie der Invarianten, von welcher in Kapitel 12 die Rede sein wird.

Neuere Werke, die sich speciell mit der Theorie der

Gleichungen befassen, sind: Matthiessen, siehe oben; Petersen, *Theorie der algebraischen Gl.*, Kopenhagen 1878, in deutscher Uebersetzung; Todhunter, *Theory of equations*, 2. ed., London 1875; von Büchern über Algebra im Allgemeinen citiren wir: Serret a. a. O., Bertrand, *Traité d'algèbre*, Paris 1878; Cesàro; Capelli, *Lezioni di algebra complementare*, Neapel 1898, 2. Aufl.; das ausgezeichnete bereits citirte Buch von Weber, und Netto, *Vorlesungen über Algebra*, 2 Bde., Leipzig 1896, Bd. 1. Das vortreffliche moderne Werk Matthiessen's über diese Theorie enthält alle nur wünschenswerthen Einzelnheiten.

§ 4. Resultanten und Discriminanten.

Wenn die beiden Gleichungen

$$\varphi = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$
$$\psi = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$$

gegeben sind, so besteht die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit sie wenigstens eine Wurzel gemeinschaftlich haben, darin, dass eine ganze rationale Function der Coefficienten, welche *die Resultante der beiden Gleichungen* heisst, verschwinde.

Die Resultante ist in den Coefficienten von φ vom n^{ten}, in denen von ψ vom m^{ten} Grad. Man kann ihr die Form einer Determinante vom $(n+m)^{\text{ten}}$ Grade geben:

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

In dieser Form erhält man die Resultante mittelst der Euler'schen oder der dialytischen Methode Sylvester's.

Folgt man dagegen der Methode Bézout's, so kommt man zu einer Resultante, welche die Form einer Determinante von dem n^{ten} Grad hat, wenn man annimmt, n sei der grössere der Grade n und m der beiden Gleichungen.

Setzt man

$$(ij) = a_i b_j - a_j b_i,$$

so ist diese Determinante für $m = n$

$$B = \begin{vmatrix} (10), & (20), & (30), & \cdots, & (n0) \\ (20), & (30)+(21), & (40)+(31), & \cdots, & (n1) \\ (30), & (40)+(31), & (50)+(41)+(32), & \cdots, & (n2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (n0), & (n1), & (n2), & \cdots, & (n, n-1) \end{vmatrix}.$$

Wenn dagegen $m < n$ ist, so sind die ersten m Zeilen die nämlichen, die $n - m$ übrigen aber werden aus den Coefficienten der Gleichung niedrigeren Grades auf die folgende Art gebildet:

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

Wenn

$$m + n - k$$

die Charakteristik der Determinante R ist (vergl. § 5), *d. h. wenn alle Minoren von höherem Grad als dem* $(m + n - k)^{\text{ten}}$ *Null sind, ohne dass alle von dem Grad $m + n - k$ verschwinden, so haben die beiden Gleichungen k Wurzeln gemeinschaftlich.*

Wenn $R = 0$ ist, so sind die Adjungirten der Elemente einer ihrer Reihen, wenn sie nicht verschwinden, den successiven Potenzen derselben Variabelen proportional.

Damit die Gleichungen p Wurzeln gemeinschaftlich haben, ist es nothwendig und ausreichend, dass die Matrix der Determinante B zur Charakteristik $n - p$ habe (das Darboux'sche Theorem, Bulletin des sciences math., 1876, 1877).

Man nennt *Discriminante* (Sylvester, *Phil. Magaz.*, 1851, 2, S. 406) einer Gleichung diejenige ganze und rationale Function der Coefficienten dieser Gleichung, welche durch ihr Verschwinden die nothwendige und ausreichende Bedingung angibt, unter welcher die Gleichung wenigstens zwei gleiche Wurzeln hat.

Setzt man

$$s^p = \alpha_1^p + \alpha_2^p + \cdots + \alpha_n^p,$$

worin die α die Wurzeln der Gleichung bedeuten, so hat die Discriminante die Form

$$a_0^{2n-2} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} \end{vmatrix},$$

worin sich die Grössen s durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken lassen.

Nimmt man die Wurzeln zur Bildung der Elemente, so ist die Discriminante:

$$a_0^{2n-2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}^2 .$$

Die Discriminante einer Gleichung n^{ten} Grades ist eine ganze rationale Function vom $(2n-2)^{ten}$ Grad der Coefficienten.

Drückt man sie direct durch die Coefficienten aus, so erhält sie die Gestalt:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & \cdots \\ 0 & n a_0 & (n-1)a_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} .$$

D ist die durch a_0 dividirte Resultante von $f(x)$ und $f'(x)$.

Das Product aus allen Summen $(\alpha_i + \alpha_j)$ ist, wie jede symmetrische Function der Wurzeln, rational durch die Coefficienten ausdrückbar. Wenn diese Function Null ist, so hat die Gleichung zwei gleiche Wurzeln von verschiedenem Vorzeichen.

Weitere Angaben über die Resultante und Discriminante findet man in Kap. 12 über die *Invarianten.* Die Resultante wurde zuerst von Euler, *Mém. de Berlin,* 1748, 1764; Bézout, *Mém. de Paris,* 1764 und Lagrange, *Mém. de Berlin,* 1769 construirt; Jacobi, *Crelle,* 15 wandte dazu die Determinanten an. Ein Verzeichniss der Arbeiten über die Resultante wird in Pascal, *Determ.,* S. 267 gegeben. Als geradezu classisch vom Standpunkt der Invariantentheorie aus verdient die Arbeit Gordan's, *Math. Ann.,* Bd. 3 genannt zu werden.

Andere Methoden zur Ermittelung der Resultanten sind von Cayley, *Crelle,* 53; Rosenhain, *Crelle,* 30 und Borchard, *Crelle,* 57.

Die Resultante und Discriminante genügen gewissen Differentialgleichungen auch ausser denen, die sie schon dadurch erfüllen, dass sie Invarianten sind. Solche Gleichungen hat Brioschi gefunden, *Crelle*, Bd. 53; siehe auch Faà di Bruno, *Crelle*, Bd. 54 und die *Binären Formen*, Leipzig 1881.

§ 5. Systeme von linearen Gleichungen.

Man habe das System von m Gleichungen mit n Unbekannten

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m.$$

Die Matrix aller Coefficienten a soll *die Matrix des Systems* heissen. Wir wollen annehmen, *alle* Determinanten vom $(p+1)^{\text{ten}}$ Grad, die in dieser Matrix enthalten sind, und daher auch alle Determinanten von höherem Grad seien Null und nicht alle Determinanten vom p^{ten} Grad seien Null. Die Zahl p heisst dann *die Charakteristik der Matrix*. Rouché, *Compt. Rend.*, 1875.

Damit eine Matrix zur Charakteristik p habe, ist es nothwendig und ausreichend, dass sie wenigstens eine Determinante A vom p^{ten} Grad enthalte, welche nicht Null ist, und dass alle diejenigen Determinanten vom $(p+1)^{\text{ten}}$ Grad verschwinden, die sich aus A durch Hinzufügen einer neuen Zeile und einer neuen Columne bilden lassen.

Die Matrix des gegebenen Systems habe zur Charakteristik p und A sei eine in ihr enthaltene Determinante vom p^{ten} Grad, welche nicht verschwindet:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix}.$$

Sollen sich die gegebenen Gleichungen nicht widersprechen, so ist es nothwendig und ausreichend, dass alle Determinanten Δ_r

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1p}, & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1}, & \cdots, & a_{pp}, & y_p \\ a_{r1}, & \cdots, & a_{rp}, & y_r \end{vmatrix}$$

Null sind.

Alsdann reducirt sich das System der m gegebenen Gleichungen auf das System der p ersten unter ihnen.

Man kann den Satz auch anders ausdrücken:

Sollen die gegebenen Gleichungen miteinander vereinbar sein, d. h. sollen sie eine oder mehrere Lösungen zulassen, so ist dazu nothwendig und ausreichend, dass die Matrix der Coefficienten und die Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}, & \cdots, & a_{1n}, & y_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}, & \cdots, & a_{mn}, & y_m \end{matrix} \right\|$$

dieselbe Charakteristik haben. Capelli, *Rivista di mat.*, 2, 1892.

Wenn $n+1$ Gleichungen mit n Unbekannten gleichzeitig bestehen sollen, so muss die Determinante der Coefficienten und der bekannten Terme Null sein.

Die Werthe von $x_1, x_2, \cdots, x_p$, welche den gegebenen Gleichungen genügen, sind durch die Formel (die Cramer'*sche Formel, Introduction à l'analyse des lignes courbes algèbriques,* Genèves 1750):

$$x_i = \frac{A_i}{A}$$

gegeben, in welcher A_i die Determinante bedeutet, die man aus A erhält, wenn die i^{te} Columne weggelassen und an die Stelle ihrer Elemente

$$\begin{matrix} y_1' = y_1 - a_{1p+1}x_{p+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_p' = y_p - a_{pp+1}x_{p+1} - \cdots - a_{pn}x_n \end{matrix}$$

gesetzt wird.

Ist $p=n$, so sind die y' die y selbst und die rechte Seite ist von den x unabhängig. In diesem Fall erhält man für $x_1, \cdots, x_n$ ein einziges System von Werthen, die den Gleichungen genügen.

Ist $p<n$, so ist die Zahl der Lösungen des Systems $(n-p)$ fach unendlich.

Wenn die rechten Seiten der Gleichungen für $y_1, \cdots, y_m$ sämmtlich Null sind, so erhält man *homogene Gleichungen.*

Soll ein System homogener Gleichungen eine von der selbstverständlichen Auflösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ verschiedene Lösung zulassen, so muss die Charakteristik der Matrix der Coefficienten, d. h. p, kleiner als n sein.

Soll einem System von n homogenen Gleichungen mit n Unbekannten durch Werthe der Unbekannten genügt werden, die nicht

sämmtlich Null sind, so muss die Determinante des Systems verschwinden.

Wenn man $n - 1$ lineare homogene Gleichungen mit n Unbekannten und einer Matrix von der Charakteristik $n - 1$ hat, so sind die Unbekannten den in dieser Matrix enthaltenen Unterdeterminanten vom $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grad proportional.

Es kann nicht mehr als n homogene lineare Gleichungen mit n Unbekannten geben, die voneinander unabhängig sind.

Mit dem Problem der Auflösung der linearen Gleichungen beschäftigten sich Euler, *Mém. de Berl.*, 1764; Bézout, Vandermonde, Laplace, *Mém. de Paris,* 1764, 1772. Der Begriff der Charakteristik wurde erst neuerdings eingeführt.

§ 6. Auflösung der Gleichungen.

Die cubische Gleichung. Die Gleichung

$$x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

reducirt sich bei der Substitution

$$x = y - \tfrac{1}{3} a_1$$

auf

$$y^3 + py + q = 0.$$

Ist $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, so sind von den Wurzeln zwei imaginär und conjugirt und eine reell.

Ist $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, so sind alle Wurzeln reell.

Ist $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, so sind von den Wurzeln zwei einander gleich.

Die Wurzeln y werden durch die Cardanische Formel (von Tartaglia, vergl. oben S. 84)

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

bestimmt, wobei man beachten muss, dass jede der beiden Cubikwurzeln zwar drei Werthe hat, man aber stets einen solchen Werth der ersten mit einem solchen der zweiten verbinden muss, dass ihr Product reell und genau gleich

$$-\frac{p}{3} \text{ ist.}$$

Die Formel hat den Uebelstand, dass sie die reellen Wurzeln der Gleichung, wenn ihre sämmtlichen Wurzeln reell sind, in imaginärer Form gibt (der irreducibele Fall). Sie hat weiter den Missstand, dass sie die *rationalen* Wurzeln meistens in *irrationaler* Form liefert. Die rationalen Wurzeln lassen sich jedoch auf andere Art ermitteln (siehe unten, § 10).

Setzt man

$$-\frac{q}{2} = \varrho \cos\theta, \qquad \varrho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}},$$

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\varrho^2 \sin^2\theta,$$

so sind die Wurzeln der Gleichung:

$$y_1 = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cos\frac{\theta}{3},$$

$$y_2 = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$y_3 = 2\varrho^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Von anderen Lösungsarten heben wir hervor: die auf substitutionentheoretischer Grundlage beruhende von Lagrange, *Réflexions sur la résolution algébrique des équations,* Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, 1770 und 1771, abgedruckt in *Oeuvres complètes,* Paris 1869, Bd. 3, S. 205 und die durch Invariantentheorie vermittelte Lösungsmethode von Cayley; vergl. in Bezug auf die letztere Faà di Bruno, deutsch von Walter, *Einleitung in die Theorie der binären Formen,* Leipzig 1881, S. 211; Clebsch, *Theorie der binären algebraischen Formen,* Leipzig 1872, S. 127; Gordan, *Vorlesungen über Invariantentheorie,* Bd. 2, S. 175.

Die Auflösung der cubischen Gleichungen wurde ferner behandelt von Eisenstein, *Crelle,* 27; Eisenlohr, *Crelle,* 42; Clausen, *Astron. Nachrichten,* 446; Grunert, *Archiv,* 2, S. 446; Reidt, *Schlömilch's Zeitschr.,* 17; Weichold, *Americ. Journ.,* 1; etc.

Die Gleichungen vierten Grades. Die Gleichung

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

wird, wenn man $x = y - \frac{1}{4} a_1$ setzt:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0.$$

Man löse mit Hülfe der obigen Formeln die Gleichung dritten Grades (*Resolvente*)

$$z^3 + \frac{p}{2} z^2 + \frac{p^2 - 4r}{16} z - \frac{q^2}{64} = 0$$

auf, und es seien z_1, z_2, z_3 ihre drei Wurzeln. Man nehme nun die Werthe $\pm\sqrt{z_1}$, $\pm\sqrt{z_2}$, $\pm\sqrt{z_3}$ und wähle für jede dieser Wurzeln das positive oder negative Vorzeichen so aus, dass das Product der drei Wurzelgrössen $-\frac{q}{8}$ wird.

Diese Wahl lässt sich auf vier verschiedene Arten treffen; d. h. wenn Z_1, Z_2, Z_3 drei Werthe der Radicale sind, für welche

$$Z_1 Z_2 Z_3 = -\frac{q}{8}$$

ist, so wird diese Bedingung offenbar auch durch die Combinationen

$$\begin{array}{rrr} Z_1, & -Z_2, & -Z_3 \\ -Z_1, & Z_2, & -Z_3 \\ -Z_1, & -Z_2, & Z_3 \end{array}$$

erfüllt. Die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung sind dann

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= Z_1 + Z_2 + Z_3 \\ \alpha_2 &= Z_1 - Z_2 - Z_3 \\ \alpha_3 &= -Z_1 + Z_2 - Z_3 \\ \alpha_4 &= -Z_1 - Z_2 + Z_3. \end{aligned}$$

Andere Methoden hat Lagrange, *Oeuvres*, Bd. 3 a. a. O. angegeben; ferner: Euler, *Comm. Petr.*, 6; Ampère, *Grunert's Archiv*, 1; Aronhold, *Crelle*, 52; Eisenstein, *Crelle*, 27; Hermite, *Équations modulaires*, Paris 1859; Matthiessen, *Schlömilch's Zeitschr.*, 8; Faà di Bruno, *Americ. Journ.*, 3. Die Auflösung mittelst Invarianten findet man in den Werken über die Theorie der Invarianten von Clebsch und Gordan.

Gleichungen fünften und sechsten Grades. Die Gleichung 5ten Grades lässt sich algebraisch nicht auflösen (vergl. § 12), d. h. es lässt sich keine Formel ermitteln, in welcher nur algebraische, irrationale Ausdrücke vorkämen, und welche die Wurzeln der Gleichung lieferte; diese Wurzeln hängen von *ikosaedrischen irrationalen Ausdrücken* ab, die mittelst der elliptischen Functionen

berechnet werden. Es wurde von Galois 1846 behauptet und 1853 von Betti bewiesen, dass sich die Modulargleichung 6ten Grades, auf welche man bei der Transformation 5ter Ordnung der elliptischen Functionen kommt, auf eine solche 5ten Grades erniedrigen lasse. Es war aber Hermite, dem es im März 1858 glücklich gelang, diese Reduction auszuführen und so die entsprechende Gleichung 5ten Grades zu construiren. Er brachte sie auf die sogenannte Bring'sche oder Jerrard'sche Form (mit nur drei Gliedern), auf welche sich jede allgemeine Gleichung 5ten Grades zurückführen lässt. Damit war das Problem gelöst, weil die specielle Gleichung 6ten Grades, von welcher man ausgegangen war, sich ihrer Beschaffenheit nach unmittelbar durch elliptische Modulfunctionen auflösen liess. Vergl. Kap. 14.

In demselben Jahr (Juni 1858) kam Kronecker auf den Gedanken, von der Gleichung 5ten Grades auszugehen und für sie eine Resolvente 6ten Grades zu suchen, die auflösbar wäre. Diese Resolvente ist eine sogenannte Jacobi'sche Gleichung, weil sie bez. ihrer Wurzeln Eigenschaften hat, die denen der Gleichung des Multiplicators für die Transformation jener elliptischen Functionen ähnlich sind, welche Jacobi seit 1829 untersucht hat. Durch das Studium dieser Jacobi'schen Gleichungen wurde Brioschi gleichzeitig mit Kronecker auf einem anderen Weg zu demselben Resultat geführt, das vor ihm schon Hermite gefunden hatte. In den *Ist. Lomb.*, 1858 lieferte Brioschi auch einen bemerkenswerthen Beitrag zu dem neuen Resultat Kronecker's.

Die Arbeiten über die Gleichungen 5ten Grades sind, nach der Zeit geordnet: Jacobi, *Crelle,* 3, 13; Cayley, *Phil. Trans.*, 151; Galois, *Journ. de Liouville,* Bd. 11, S. 412; Betti, *Ann. di Tortolini,* 1853; Hermite, *Compt. Rend.*, 1858, Bd. 46; Brioschi, *Ann. di Tortolini*, 1858; *Ist. Lomb.*, Nov. 1858; Kronecker, *Compt. Rend.*, 1858, Bd. 46; *Berl. Monatsber.*, 1861; *Crelle,* 54; Joubert, *Compt. Rend.*, 1859, Bd. 48; Hermite, *Compt. Rend.*, 1866; Roberts, *Ann. di mat.*, 2. Serie, Bd. 1; Brioschi, *Compt. Rend.*, 1866; *Ann. di mat.*, 2. Serie, 1, 1867; *Aggiunta al trattato delle funz. ellit. di Cayley*, Mailand 1880, Abdruck eines Aufsatzes in den Math. Ann., 13; *Compt. Rend.*, Bd. 63, 73, 80, *Accad. Napoli,* 1866; Klein, *Vorl. über das Ikosaeder* etc., Leipzig 1884.

In der letzten Arbeit befindet sich auch eine Uebersicht über die Geschichte des Problems.

Die Gleichungen 6ten Grades lassen sich auch mit Hülfe der elliptischen Functionen nicht auflösen. Man hat dazu die hyperelliptischen Functionen nöthig.

Bezügliche Arbeiten sind: Maschke-Brioschi, *Acc. Lincei*, 1888; Brioschi, *Acta math.*, 12, 1888.

Aeltere Untersuchungen sind von Brill, *Math. Ann.*, 20; Cole, *Americ. Journ.*, 8, 1886.

Ueber die Gleichungen 7ten und 8ten Grades existiren Untersuchungen von Klein, Noether, Gordan, *Math. Ann.*, 14, 15, 20.

Ueber die Auflösung algebraischer Gleichungen n^{ten} Grades durch transcendente Functionen vergl. Lindemann, *Nachr. der Kgl. Gesellsch. der Wiss. zu Göttingen*, 1884 und 1892 und die Vorlesungen von Klein *über die hyperelliptischen Functionen*, Göttingen 1888.

§ 7. Die binomischen Gleichungen.

Jede Gleichung vom Typus (Binom)

$$x^n - A = 0$$

lässt sich durch geeignete Umformung auf

$$y^n - 1 = 0$$

zurückführen.

Alle Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ *sind durch die (trigonometrische) Formel*

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

bestimmt, in welcher k *die Werthe* $0, 1, 2, \cdots, n-1$ *haben kann.*

Die Wurzeln einer binomischen Gleichung werden also durch Punkte der Ebene dargestellt und entsprechen denjenigen Punkten, welche einen Kreisumfang in n gleiche Theile zerlegen; man hat daher die binomische Gleichung $x^n - 1 = 0$ auch *Kreistheilungsgleichung* genannt. Durch geometrische Construction der Wurzeln wird die Theilung des Kreises bewirkt.

Ist α *eine Wurzel einer binomischen Gleichung von dieser Gestalt, so ist auch* α^m *eine Wurzel, wenn man unter* m *eine beliebige ganze Zahl versteht.*

Wenn n *eine Primzahl ist und* α *eine Wurzel von* $y^n - 1 = 0$ *mit Ausnahme der Einheit vorstellt, so sind*

$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \cdots, \alpha^n$ *die sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung;* wenn n keine Primzahl ist, eine Wurzel α aber die Eigenschaft hat, dass man durch Potenziren derselben sämmtliche Wurzeln der Gleichung $y^n - 1 = 0$ erhält, so heisst α *eine primitive Wurzel. Es gibt ihrer* $\varphi(n)$, wenn $\varphi(n)$ die Anzahl der ganzen Zahlen bedeutet, die kleiner als n und zu n prim sind.

Um eine primitive Wurzel von $x^n - 1 = 0$ zu finden, wobei $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_i^{\alpha_i}$ ist und die $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_i$ lauter voneinander verschiedene Primzahlen sind, bestimme man eine primitive Wurzel u_1 von $x^{p_1^{\alpha_1}} = 1$, eine primitive Wurzel u_2 von $x^{p_2^{\alpha_2}} = 1$ u. s. w., schliesslich eine primitive Wurzel u_i von $x^{p_i^{\alpha_i}} = 1$; dann ist $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdots u_i$ eine primitive Wurzel von $x^n - 1 = 0$.

Um eine primitive Wurzel von $x^{p^\alpha} = 1$ zu finden, wobei p eine Primzahl bedeutet, hat man je eine Wurzel $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots \omega_\alpha$ der α Gleichungen

$$x^p = 1, \quad x^p = \omega_1, \quad x^p = \omega_2, \quad \cdots, \quad x^p = \omega_{\alpha-1}$$

zu suchen; ist ω_1 eine primitive Wurzel von $x^p = 1$, d. h. ist ω_1 von der positiven Einheit verschieden, so ist $\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 \cdots \omega_\alpha$ eine primitive Wurzel von $x^{p^\alpha} = 1$.

Die Gleichung

$$\frac{x^{p^\alpha} - 1}{x^{p^{\alpha-1}} - 1} = x^{p^{\alpha-1}(p-1)} + x^{p^{\alpha-1}(p-2)} + \cdots + x^{p^{\alpha-1}} = 0$$

ist, wenn p eine Primzahl bedeutet, irreducibel, d. h. nicht in rationale Factoren zerlegbar. (Für $\alpha = 1$ zuerst von Gauss in den *Disq. arithmeticae* bewiesen.)

Die Lösung der binomischen Gleichungen lässt sich auf algebraischem Wege finden.

Nimmt man an, n sei eine Primzahl, so muss man, um die Gleichung $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = 0$ *aufzulösen,* $n - 1$ *in seine Primfactoren*

$$n - 1 = p_1 p_2 \cdots$$

zerlegen und die Gleichungen

$$z^{p_1} - 1 = 0, \quad z^{p_2} - 1 = 0, \quad \cdots$$

auflösen.

Damit die Gleichung $z^n = 1$ durch Quadratwurzeln lösbar sei, muss n entweder gleich 2 oder gleich einer höheren Potenz von 2 oder eine Primzahl von der Form $2^m + 1$ oder das Product mehrerer verschiedener Primzahlen dieser Art oder das Product aus einer oder mehreren verschiedenen Primzahlen dieser Art mit 2 oder mit einer höheren Potenz von 2 sein. Kürzer ausgedrückt: Damit die Gleichung $z^n = 1$ durch Quadratwurzeln lösbar sei, ist nothwendig und ausreichend, dass n keine ungerade Primzahl als Theiler enthalte, die nicht von der Form $2^m + 1$ ist, und auch keine Primzahl von der Form 2^{m+1} mehrfach. Gauss, *Disqu. arithmet.*, Art. 566, Ges. Werke, Bd. 1, Göttingen 1876. Ueber die Primzahlen von der Form $2^m + 1$ vergl. Kap. 20, § 1.

Lässt sich die Gleichung durch Quadratwurzeln auflösen, so kann die Theilung des Kreisumfanges mit Zirkel und Lineal allein ausgeführt werden.

$x^3 - 1 = 0$ hat die Wurzeln $1,\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$x^4 - 1 = 0$ „ „ „ $1,\ -1,\ i,\ -i$,

$x^5 - 1 = 0$ „ „ „ $1,\ \frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{5} + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right)$,

$$\frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{5} - i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right),$$

$$\frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{5} + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\right),$$

$$\frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{5} - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\right).$$

Ueber die Werthe der Wurzeln für $n = 17$ siehe den ersten Band der Werke von Gauss. Genaueres über die Lehre von den binomischen Gleichungen findet man bei Bachmann, *Die Lehre von der Kreistheilung,* Leipzig 1872.

Die Construction bez. der Kreistheilung gibt in den ersten Fällen Bachmann, a. a. O. an; für $n = 17$ hat diese Construction Staudt, *Crelle,* 24 und Schröter, *Crelle,* 75 auf elegante Art ausgeführt. Gérard, *Math. Ann.,* Bd. 48; F. Klein, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie,* ausgearbeitet von F. Tägert, Leipzig 1895.

Für $n = 257$ hat den analytischen Theil Richelot, *Crelle,* 9, und den geometrischen Pascal, *Acc. Napoli,* 1887 entwickelt; über andere nicht mittelst des Zirkels und Lineals zu erledigende Fälle, nämlich 7, 13, 97 vergl. Pascal, *Giorn. di Batt.,* 25; über 19 und 37 siehe Amaldi, ib., 30.

§ 8. Vielfache Wurzeln der Gleichungen.

Damit eine Zahl a eine r-fache Wurzel von $f(x) = 0$ *sei, ist es nothwendig und ausreichend, dass a eine Wurzel der Gleichung und ihrer ersten* $r - 1$ *Derivirten sei.* (Siehe Kap. 6, § 2.)

Soll eine Gleichung keine vielfachen Wurzeln haben, so ist dazu nothwendig und ausreichend, dass der grösste gemeinschaftliche Theiler von $f(x)$ *und ihrer ersten Ableitung eine Constante sei.*

Dividirt man $f(x)$ *durch den grössten gemeinschaftlichen Factor von* f *und* f', *so erhält man eine Function, deren Wurzeln allen Wurzeln von* f *gleichwertig sind, aber nur einfach auftreten.*

Nennt man D_1 den grössten gemeinschaftlichen Factor von f und f' und D_2 den grössten gemeinschaftlichen Factor von D_1 und seiner Ableitung D_1', so gelten die Sätze:

$D_2 =$ Const. *ist die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit* f *keine dreifachen Wurzeln habe,* etc.

Bildet man die Quotienten

$$\frac{f}{D_1} = \varphi_1, \quad \frac{D_1}{D_2} = \varphi_2, \quad \frac{D_2}{D_3} = \varphi_3, \cdots,$$

so haben die Gleichungen $\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = 0$, $\frac{\varphi_2}{\varphi_3} = 0$, $\cdots$ *zu einfachen Wurzeln bezüglich: alle einfachen Wurzeln der gegebenen Gleichung, alle doppelten Wurzeln, alle dreifachen Wurzeln,* etc.

§ 9. Reelle und complexe Wurzeln der Gleichungen mit reellen Coefficienten.

Zwischen zwei aufeinander folgenden reellen Wurzeln einer Gleichung $f = 0$ *ist eine ungerade Anzahl von Wurzeln der derivirten Gleichung* $f' = 0$ *enthalten (der Rolle'sche Satz).* Vergl. auch Kap. 6, § 4.

Zwischen zwei consecutiven Wurzeln von $f' = 0$ *liegt nicht mehr als eine Wurzel von* $f = 0$.

Wenn alle Wurzeln von $f = 0$ *reell und einfach sind, so gilt dasselbe für die Wurzeln von* $f' = 0$.

Sind die Glieder einer Gleichung nach ihrem Grad geordnet, so sagt man, zwei sich folgende Glieder *bilden einen Wechsel oder eine Folge,* je nachdem sie verschiedene oder gleiche Vorzeichen haben.

In jeder Gleichung ist die Anzahl der reellen positiven Wurzeln nicht grösser als die Anzahl der Wechsel von $f(x)$ und die Anzahl der negativen Wurzeln nicht grösser als die der Wechsel von $f(-x)$ (*das Cartesius'sche* oder *Harriot'sche Theorem,* Buch 3 der Cartesius'schen Geometrie, S. 70 der Amsterdamer Ausg., 1683 und früher in Harriot, *artis anal. praxis ad aequ. alg. resolv.*, London 1631. Vergl. Lagrange, *Oeuvres,* 8, S. 196 und Gauss, *Crelle,* 3, S. 1).

Der Ueberschuss der Anzahl der Wechsel über die Anzahl der positiven Wurzeln von $f(x) = 0$ ist immer eine gerade Zahl.

Wenn $f(x)$ nur einen Wechsel hat, so besitzt $f(x) = 0$ nur eine einzige positive Wurzel.

Eine Gleichung, deren sämmtliche Wurzeln reell sind, hat soviele positive Wurzeln wie Wechsel.

Eine Gleichung besitzt wenigstens $2k$ complexe Wurzeln, wenn $2k$ consecutive Glieder fehlen, oder wenn $2k - 1$ consecutive Glieder zwischen zwei Gliedern von demselben Vorzeichen fehlen.

Die Anzahl der reellen Wurzeln von $f(x) = 0$, welche grösser als die positive Zahl a sind, übersteigt nicht die Anzahl der Wechsel, welche die folgende Reihe von Grössen für $x = a$ besitzt:

$$\begin{aligned}
f_1 &= a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1},\\
f_2 &= a_0 x^{n-2} + a_1 x^{n-3} + \cdots + a_{n-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_{n-1} &= a_0 x + a_1,\\
f_n &= a_0,
\end{aligned}$$

auf jeden Fall aber ist die Differenz zwischen den beiden Zahlen eine gerade Zahl (*der Laguerre'sche Satz, Compt. rend.,* 89 und 91).

Die Anzahl der reellen Wurzeln, welche $f(x) = 0$ zwischen $x = a$ und $x = b$ $(a < b)$ besitzt, übersteigt nicht die Anzahl der von der Aufeinanderfolge von successiven Derivirten

$$f,\ f',\ f'',\ f''',\ \cdots$$

beim Uebergang von $x = a$ zu $x = b$ verlorenen Wechsel und jedenfalls ist die Differenz zwischen den beiden Zahlen eine gerade Zahl (*der Budan'sche Satz, Nouvelle méth.* etc., Paris 1807).[1]

---

1) Der Satz wird auch Jourien zugeschrieben, *Analyse des équat. déterm.*, Paris 1831, der ihn schon vor Budan in seinen Vorlesungen auseinandersetzte.

Man dividire f durch ihre erste Derivirte f', gebe dem Rest das entgegengesetzte Vorzeichen und bezeichne ihn mit f_2; alsdann dividire man f' durch f_2 und nenne den Rest mit geändertem Vorzeichen f_3 u. s. w.; die Reihe

$$f, f', f_2, f_3, \cdots$$

pflegt man eine *Sturm'sche Reihe* zu nennen.

Die Anzahl der reellen Wurzeln, welche $f(x) = 0$ zwischen $x = a$ und $x = b$ $(a < b)$ besitzt, ist der Anzahl der von der Sturm'schen Reihe bei dem Uebergang von $x = a$ zu $x = b$ verlorenen Wechsel genau gleich (*das Sturm'sche Theorem, Bulletin de Férussac*, 11, 1829; *Mém. prés. par divers sav.*, 6, S. 271, 1835).

Setzt man $a = -\infty$, $b = +\infty$, so erhält man die Anzahl *aller reellen Wurzeln.*

Bezeichnet man mit $s_0, s_1, s_2, \cdots$ die Summe der 0ten, 1ten, 2ten, $\cdots$ Potenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung und setzt

$$\sigma_1 = s_0,$$

$$\sigma_2 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

so erhält man das Theorem:

Die Anzahl der Paare von imaginären Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ ist, abgesehen von den vielfachen Wurzeln, der Anzahl der Zeichenwechsel in der Aufeinanderfolge σ_1, σ_2, σ_3, $\cdots$ gleich. Das Borchardt'sche Theorem, *J. de Liouville*, 12, 1846, S. 58 und *Werke*, S. 24 u. 469.

Sollen alle Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit reellen Coefficienten reell sein, so ist dazu nöthig und ausreichend, dass

$$\sigma_2 > 0,\ \sigma_3 > 0,\ \cdots,\ \sigma_n > 0 \quad \textit{sei.}$$

Berühmt ist das Problem gewesen, *die genaue Anzahl der reellen Wurzeln einer gegebenen algebraischen Gleichung zu ermitteln, welche zwischen gegebenen Grenzen speciell zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegen.* Dieses Problem, welches den Bemühungen der grössten Mathematiker Widerstand geleistet hatte, wurde auf elegante Art von Sturm mit Hülfe des obigen Theorems gelöst.

Vergl. Sylvester, *Phil. Mag.*, 1839, 15, S. 428; ib., 1853, S. 456; Cayley, *J. de Liouv.*, 11, 13; *Phil. Trans.*, 1857 und Hermite, *Compt. Rend.*, 36, 1853 etc.

§ 10. Rationale Wurzeln der Gleichungen.

Damit eine ganze Zahl α die Wurzel einer Gleichung mit ganzen Coefficienten sein könne, ist es nöthig und ausreichend, dass sie entweder den letzten Coefficienten a_n theile, oder dass α, wenn man mit p_1 das Resultat dieser Division bezeichnet, den Coefficienten a_{n-1}, um p_1 vermehrt, theile; oder, wenn man unter p_2 den Quotienten der letzten Division versteht, a_{n-2}, um p_2 vermehrt, u. s. w.

Eine ganzzahlige Gleichung, bei welcher der Coefficient der höchsten Potenz von x gleich 1 *ist, besitzt keine rational gebrochenen Wurzeln.*

Wenn eine Gleichung mit rationalen Coefficienten nur eine einzige vielfache Wurzel von der Vielfachheit k hat, so kann diese nur rational sein.

§ 11. Annähernde Bestimmung der rellen Wurzeln einer Gleichung.

Eine obere Grenze der reellen Wurzeln einer Gleichung ist eine Zahl, die grösser als alle reellen Wurzeln dieser Gleichung ist; ähnliches gilt für die *untere Grenze.*

Wenn eine Zahl $x = a$ die Functionen f, f', f'', $\cdots$ positiv macht, so ist sie eine obere Grenze der reellen Wurzeln der Gleichung $f = 0$ (Newton).

Um eine obere Grenze zu ermitteln, bestimme man zuerst die ganze Zahl, die unmittelbar grösser als die Wurzel der Gleichung $f^{(n-1)} = 0$ ist, setze diesen Werth in $f^{(n-2)}$ und addire, wenn das Resultat negativ ausfällt, soviel Einheiten, dass das Resultat gerade positiv wird. Fährt man so fort, so kommt man zu einer ganzen Zahl, welche alle Derivirten positiv macht.

Andere obere Grenzen erhält man aus den folgenden Formeln:

Wenn a_t unter den negativen Coefficienten derjenige ist, welcher den grössten absoluten Werth hat, so ist eine obere Grenze durch

$$L = 1 - \frac{a_t}{a_0} \text{ (Maclaurin) } \textit{gegeben.}$$

Versteht man unter a_s den ersten negativen Coefficienten, so erhält man eine obere Grenze aus:

$$L = 1 + \sqrt[s]{-\frac{a_t}{a_0}} \quad \text{(Lagrange).}$$

a_r sei der grösste von den Coefficienten, die dem ersten negativen Coefficienten vorangehen; eine obere Grenze ist dann:

$$L = 1 + \sqrt[s-r]{-\frac{a_t}{a_r}} \quad \text{(Tillot).}$$

Mittelst des Sturm'schen Theorems kann man *die Wurzeln trennen*, d. h. Intervalle finden, innerhalb deren je *eine einzige* reelle Wurzel der Gleichung liegt.

a und b seien die beiden Enden eines Intervalls, in dessen Innerem eine *reelle* Wurzel der Gleichung enthalten ist, und a sei ein Ende, für welches $f(a)$ und $f''(a)$ *dasselbe Vorzeichen haben.*

Bildet man die Reihenfolge von Grössen

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)},$$

so nähern sich die Zahlen a_{n+1} rasch dem Werth der Wurzel von f, die zwischen a und b liegt (das Newton'sche Theorem).

Bildet man ferner die Reihenfolge

$$b_{n+1} = \frac{b_n f(a_n) - a_n f(b_n)}{f(a_n) - f(b_n)} \quad \begin{pmatrix} a_1 = a \\ b_0 = b \end{pmatrix},$$

so convergiren die Zahlen b_{n+1} gegen dieselbe zwischen a und b liegende Wurzel (Fourier).

Bleibt man bei einem beliebigen Index n stehen, so ist der begangene Fehler kleiner als $a_n - b_n$.

Andere Annäherungsmethoden, die sich auf geometrische Betrachtungen gründen, findet man bei Catalan, *Mélanges math.*, Lüttich 1868, Bd. 1, S. 79. Die Lagrange'sche Art der Annäherung gibt die Entwickelung der Wurzel in einen

Kettenbruch, *Berl. Mem.*, 1769; *Sur la résolution des équations numériques et additions*, Oeuvres, Bd. 2, S. 539—655, Paris 1868; *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés,* Oeuvres, Bd. 8, Paris 1879. Andere Methoden sind von Euler, *Calc. Diff.*, Bd. 2, § 234, 1755, deutsch von J. A. C. Michelsen, Berlin 1790—1793; Cauchy, *Werke*, Bd. 4, S. 42—99, Paris 1884; Jacobi, *Crelle*, Bd. 6, S. 257; Heis, *Sammlung v. Beisp. und Aufg. aus der allg. Arithmetik und Algebra*, Köln 1882, § 102. Eine praktische Methode zur angenäherten Berechnung der Wurzeln rührt von Horner her; vergl. die auf S. 86 citirten Werke über Algebra.

§ 12. Die Galois'sche Theorie.

Es sei $f(x) = 0$ eine algebraische Gleichung mit lauter verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Bei jeder Gleichung sind dann *im Allgemeinen* die symmetrischen Functionen der Wurzeln die einzigen rationalen Functionen der Wurzeln, welche sich rational durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausdrücken lassen. Existiren noch ausserdem andere rationale Functionen der Wurzeln — (unter einer rationalen Function der Wurzeln soll stets eine solche verstanden werden, deren Coefficienten auch rational aus den Gleichungscoefficienten gebildet sind) —, die sich rational durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken lassen, so ist die Gleichung *speciell* oder sie hat, wie man sagt, einen *Affect*.

Die Gesammtheit von Vertauschungen zwischen den n Wurzeln $x_1, x_2, \cdots, x_n$, welche jede rationale Function der n Wurzeln, die sich rational durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken lässt, numerisch ungeändert lassen, bildet eine *Gruppe*. Diese Gruppe heisst *die Galois'sche Gruppe* der Gleichung.

Von einer Vertauschung, welche die Wurzeln $x_1, x_2, \cdots x_n$ in eine andere Reihenfolge $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}$ überführt, sagt man, sie lasse eine rationale Function $R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ numerisch ungeändert, falls $R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ und $R(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n})$ bei Einsetzung der Wurzeln von $f(x) = 0$ denselben Werth erhalten. Bei numerischer Unveränderlichkeit brauchen $R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ und $R(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n})$ nicht formal gleich zu sein.

Für die Galois'sche Gruppe einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$ gilt der Doppelsatz:

Jede rationale Gleichung, die zwischen den n Wurzeln von

$f(x) = 0$ *besteht und deren Coefficienten rational aus den Coefficienten von* $f(x)$ *gebildet sind, bleibt richtig, wenn die Wurzeln einer Substitution der Galois'schen Gruppe unterworfen werden.*

Jede rationale Function der Wurzeln von $f(x) = 0$, die *numerisch ungeändert bleibt, wenn man sämmtliche Substitutionen der Galois'schen Gruppe ausführt, ist rational durch die Coefficienten der Gleichung ausdrückbar.*

Die Gruppe der allgemeinen Gleichung ist *symmetrisch.*

Eine Gleichung ist *irreducibel,* wenn sie keine Factoren hat, deren Coefficienten sich rational durch diejenigen der Gleichung selbst ausdrücken lassen.

Die Gruppe einer irreducibelen Gleichung ist transitiv und umgekehrt.

Die Ordnung der Gruppe einer irreducibelen Gleichung vom n^{ten} *Grad, deren Wurzeln rationale Functionen einer einzigen Wurzel sind, ist die* n^{te} *und umgekehrt.*

Wir wollen mit n unbestimmten Coefficienten

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$$

die Function

$$\zeta = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

bilden, worin $x_1, \cdots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung bedeuten.

Führt man nun an dieser Function die sämmtlichen r Substitutionen der Gruppe der Gleichung aus, so erhält man r Werthe

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_r.$$

Die Gleichung

$$F(\zeta) = (\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2) \cdots (\zeta - \zeta_r) = 0$$

heisst alsdann *die Galois'sche Resolvente* der gegebenen Gleichung.

Alle Wurzeln von F sind rationale Functionen einer von ihnen; mit ihrer Hülfe lassen sich alle Wurzeln von $f(x) = 0$ *ausdrücken.*

Im Allgemeinen nennt man jede Gleichung eine *Resolvente,* durch deren Wurzeln sich die Wurzeln der gegebenen Gleichung ausdrücken lassen.

Die allgemeine Gleichung vom n^{ten} *Grad* $(n > 4)$ *lässt sich mittelst der Auflösung einer Resolvente von einem höheren als dem* 2ten *Grad lösen; es gibt aber keine Resolvente von geringerem als dem* n^{ten} *und zugleich grösserem als dem* 2ten *Grad; wenn n von 6 verschieden ist, so existirt auch keine Resolvente vom* n^{ten} *Grad, die verschied*[illegible] *Gleichung* $f(x) = 0$ *selbst*

wäre; ist $n = 6$, so gibt es eine solche Resolvente vom 6ten *Grad; die allgemeine Gleichung vom* 5ten *Grad hat eine Resolvente vom* 6ten; *die Gleichungen, für welche $n \leqq 4$ ist, haben Resolventen von geringerem Grad.*

Wenn G die Gruppe einer Gleichung ist, so bilde man eine Reihe der Zusammensetzung von G, d. h. man construire die Reihe von Untergruppen G, I, I', $\cdots$, von denen jede der grösste Normaltheiler (vergl. S. 30) *der vorhergehenden ist. Wenn alsdann diese Untergruppen die Ordnung r, $\frac{r}{r_1}$, $\frac{r}{r_1 r_2}$, $\cdots$ haben, so hängt die Auflösung von f von den Auflösungen anderer Gleichungen ab, deren Galois'schen Gruppen von der Ordnung r_1, r_2, $\cdots$ und einfach sind.*

Die allgemeinen Gleichungen von einem höheren als dem 4ten *Grad sind algebraisch nicht auflösbar (das Ruffini'sche Theorem).* Ueber die Geschichte dieses Theorems siehe H. Burkhardt, *Abh. z. Gesch. d. M.*, Schlömilch's Zeitschr., 6, 1892; ital. Uebers. von Pascal, *Ann. di mat.*, 1894.

Damit eine Gleichung vom Grad $n > 4$ durch Wurzelausdrücke (algebraisch) lösbar sei, ist es nothwendig und ausreichend, dass die Factoren der Zusammensetzung der Gruppe sämmtlich Primzahlen seien.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung, damit eine irreducibele Gleichung vom Primzahlgrade durch Wurzelziehen lösbar sei, besteht darin, dass alle Wurzeln der Gleichung sich rational durch zwei von ihnen ausdrücken lassen (Galois'sche Gleichungen).

Abel'sche Gleichungen nennt man diejenigen irreducibelen Gleichungen, bei welchen alle Wurzeln sich rational durch eine unter ihnen ausdrücken lassen, *und bei welchen die Symbole dieser rationalen Functionen vertauschbar sind; d. h. wenn*

$$x_i = R_i(x_1), \quad x_j = R_j(x_1),$$

so muss

$$R_i(R_j(x_1)) = R_j(R_i(x_1)),$$

sein.

Solche Gleichungen lassen sich algebraisch auflösen.

Die Gleichungen vom Typus $\frac{x^n - 1}{x - 1} = 0$, in denen n eine Primzahl bezeichnet, (Kreistheilungsgleichungen, siehe § 7), *sind Abel'sche.*

Die Substitutionen der Gruppe einer Abel'schen Gleichung sind miteinander vertauschbar (vergl. S. 30).

Die Auflösung einer irreducibelen Abel'schen Gleichung vom Grad $n = p^\alpha q^\beta \cdots$, worin p, q, $\cdots$ Primzahlen sind, reducirt sich auf die anderer Abel'scher Gleichungen vom Grad p^α, q^β, $\cdots$.

Die Auflösung einer Abel'schen irreducibelen Gleichung vom Grad p^α, worin p eine Primzahl bedeutet, reducirt sich auf diejenige anderer Abel'scher Gleichungen, deren Gruppen nur Substitutionen von der Ordnung p enthalten, wenn die Substitution 1 *nicht gezählt wird.*

Die Auflösung einer irreducibelen Abel'schen Gleichung vom Grad p^α, deren Gruppe nur Substitutionen von der Ordnung p enthält, reducirt sich auf diejenige von α irreducibelen Abel'schen Gleichungen von der Ordnung p.

Genaueres findet man in den Werken über Substitutionen von Netto und Jordan, vor Allem auch in Weber's *Algebra* und den übrigen in Kap. 2 citirten Arbeiten.



Kapitel VI.

Die Differentialrechnung.

§ 1. Das Unendlichkleine und das Unendlichgrosse.

Eine Variabele, die zur Grenze Null hat, ist *ein Unendlichkleines;* hat sie zur Grenze das Unendlichgrosse, so heisst sie ein *Unendlichgrosses.*

Sind α und β zwei Unendlichkleine, und ist $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, so sagt man, α sei von höherer Ordnung als β; ist $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, so ist α von niedrigerer Ordnung als β und ist $\lim \frac{\alpha}{\beta} = A$ (einer endlichen Grösse), so heissen α und β von derselben Ordnung.

Für die Unendlichgrossen bleibt die dritte Definition bestehen und sind die Vordersätze der beiden ersteren zu vertauschen.

Ist α von höherer Ordnung als β und $\lim \frac{\alpha}{\beta^n}$ eine endliche Grösse, so sagt man, α sei in Bezug auf β von der Ordnung n, wobei n eine beliebige positive ganze oder nicht ganze Zahl sein kann.

Wenn α unendlich gross oder unendlich klein ist, so bleibt es dies und behält dieselbe Ordnung, auch wenn es mit einer endlichen von Null verschiedenen Grösse multiplicirt oder dividirt wird.

Die algebraische Summe einer endlichen Anzahl von Unendlichkleinen ist wieder ein Unendlichkleines von der Ordnung, welche das Unendlichkleine von der niedrigsten Ordnung hat.

Wenn ein Unendlichkleines α die algebraische Summe einer endlichen Anzahl anderer Unendlichkleinen ist,

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m,$$

worin α_1 die niedrigste Ordnung habe, so lässt sich immer eine Umgebung der Grenzwerthe der Variabelen, von denen diese

Unendlichkleinen abhängen, derart finden, dass für jeden ihrer Punkte das Vorzeichen von α dasselbe, wie das von α_1 ist.

Die Grenze des Verhältnisses zweier Unendlichkleinen ändert sich nicht, wenn man zu ihnen Unendlichkleine bez. von höherer Ordnung hinzufügt.

Aehnliche Theoreme gelten für die Unendlichgrossen; man braucht nur die Worte *niedriger* in *höher* und *höher* in *niedriger* zu verwandeln.

Wenn die Differenz zweier Unendlichgrossen einer endlichen Grösse zustrebt, so sind die beiden Unendlichgrossen von derselben Ordnung und die Grenze ihres Verhältnisses ist die Einheit.

Man sagt, unendlich viele Unendlichkleine

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_m, \cdots$$

convergiren gleichmässig gegen Null, wenn bei beliebig klein gegebenem σ sich eine solche Umgebung der Grenzwerthe der Variabelen, von denen diese Unendlichkleinen abhängen, finden lässt, dass für die Punkte dieser Umgebung *alle* α kleiner als σ sind.

Sind zwei Reihen von unendlich vielen Unendlichkleinen

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \cdots$$
$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m, \cdots$$

gegeben, in denen jedes β_i von höherer Ordnung, als das zugehörige α_i ist, so sagt man, die β seien *gleichförmig von höherer Ordnung als die entsprechenden* α, wenn die Verhältnisse

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \cdots, \frac{\beta_m}{\alpha_m}, \cdots$$

gleichmässig gegen Null *convergiren.*

Wenn die Summe der Unendlichkleinen

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m + \cdots$$

einer endlichen Grösse zustrebt und wenn die Unendlichkleinen

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m, \cdots$$

gleichförmig von höherer Ordnung als die entsprechenden α *sind, so nähert sich die Summe der* β *der Null und ist*

$$\lim \sum_1^\infty \alpha_i = \lim \sum_1^\infty (\alpha_i + \beta_i),$$

d. h. die Summe der α *ändert sich nicht, wenn man zu jedem* α_i

das Unendlichkleine von höherer Ordnung β_i *hinzufügt (der Satz über die Substitution der Unendlichkleinen).* Beispiele von Fällen, in welchen dieser Satz *nicht* gilt, findet man in Pascal, *Note critiche* etc., S. 47 u. ff.

§ 2. Die Lehre von den Derivirten der reellen Functionen einer oder mehrerer reellen Variabelen.

Wenn y eine Function von x ist, und wenn man dem x einen beliebigen Zuwachs gibt, den wir mit Δx bezeichnen wollen, so erfährt im Allgemeinen auch y einen Zuwachs, der Δy sei.

Die Grenze des Verhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ heisst, wenn sie existirt, endlich und unabhängig von dem Vorzeichen von Δx ist, *die Derivirte (Ableitung, Differentialquotient) der Function im Punkt* x. Wenn eine solche Grenze nur für ein positives Δx und nicht für ein negatives Δx existirt oder umgekehrt, oder wenn sie zwar in beiden Fällen vorhanden ist, aber nicht denselben Werth hat, alsdann unterscheidet man zwischen *der Derivirten zur Rechten und der zur Linken des Punktes* x.

Nothwendige Bedingungen für die Existenz der Ableitung sind, dass die Function 1) *in dem Punkt stetig und zugleich* 2) *in einer Umgebung des Punktes und im Punkt selbst endlich sei.*

Wenn $f(x)$ eine stetige Function ist und sich für jedes zwischen a und b liegende x ein solches h finden lässt, dass für es selbst sowohl, wie für jede Zahl, die kleiner als h ist, mit Ausnahme von $h = 0$ der Ausdruck

$$f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)$$

von Null verschieden ist, so existirt unter allen Umständen eine rechts- oder eine linksseitige Derivirte der Function $f(x)$. Vergl. Stolz, *Grundzüge* etc., S. 35; *Arithm.*, I, S. 195.

Wenn der Zuwachs Δy *in irgend einer Umgebung des betrachteten Punktes unendlich oft das Vorzeichen wechselt, so existirt die Derivirte in diesem Punkt entweder nicht oder ist gleich Null.*

Beisp.: Die Function $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$ hat im Punkt $x = 0$ keine Derivirte; die Function

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \; f(0) = 0$$

hat im Punkt $x = 0$ zur Derivirten 0.

Die *Functionen ohne Derivirte* werden in des Verfassers: *Note critiche di calcolo,* Mailand 1895, S. 85—128 besprochen; vergl. Dini, *Grundlagen* etc., Leipzig 1892.

Man hat eine Zeit lang geglaubt, jede stetige Function sei differenzirbar; vergl. z. B. Ampère, *Journ. de l'École polyt.,* cah. 13, S. 148.

Riemann ist der erste gewesen, welcher in seiner Abhandlung über die Fourier'schen Reihen, *Abh. der Gött. Gesellsch.,* 1867 das Beispiel einer Function anführte, welche unendlich oft unstetig ist und sich doch integriren lässt. Dieses Integral war mithin eine *in unendlich vielen Punkten nicht differenzirbare Function.* Das von Riemann angegebene Beispiel veranlasste Hankel zu dem sogenannten *Princip der Condensation,* mit dessen Hülfe man, wenn eine Function mit einer Singularität in einem Punkt gegeben ist, eine andere Function bilden kann, welche dieselbe Singularität in unendlich vielen Punkten hat. Hankel, *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen,* Tübingen 1870; *Math. Ann.,* 20, S. 63. Mittelst dieses Princips lassen sich Functionen aufstellen, die in unendlich vielen Punkten (aber nicht in allen Punkten) keine Derivirte haben.

Das berühmteste Beispiel einer stetigen nicht differenzirbaren Function gab Weierstrass, der damit das Problem löste, eine stetige Function zu bilden, die in *allen* Punkten eines Intervalles keine Ableitung besitzt.

Die Function lautet:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

worin $0 < a < 1$, b ungerade und ganz, ferner

$$ab > 1 + \tfrac{3}{2}\pi \quad \text{ist.}$$

Sie hat an keiner Stelle eine Derivirte. Das Beispiel wurde zuerst veröffentlicht von Du Bois-Reymond, *Crelle,* 79, S. 21; vergl. Wiener, *Crelle,* 90, S. 221, 252 und Weierstrass, *Functionenlehre,* 1886, S. 100.

Später fand Dini, *Ann. di mat.,* 8, 2. Ser.; *Grundlagen* etc., § 119 viele andere Functionen, die in *allen* Punkten keine Ableitung besitzen; die folgenden sind die einfachsten:

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\cos\left[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)x\right]\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n+1)}\sin\left[1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n+1)x\right]\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{für}\\ \alpha>1+\frac{3}{2}\pi.\end{array}$$

Weitere in unendlich vielen aber nicht in *allen* Punkten eines Intervalls nicht differenzirbare Functionen hat H. A. Schwarz gefunden, *Ges. Abhandl.*, II, S. 269, ferner: Darboux, *Ann. de l'École norm.*, 1875, 4, S. 57 und 112; Köpcke, *Math. Ann.*, 29, S. 123, 34, S. 161, 35, S. 104; Lerch, *Crelle,* 103.

Wie aus den Beispielen Köpcke's hervorgeht, ist es, *damit die Derivirte in unendlich vielen Punkten nicht existire, nicht ausreichend, dass die Function unendlich viele Oscillationen in jedem endlichen Intervall mache.*

Die Function

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sqrt{\sin^2 n\pi x}\pm Ax,$$

worin A hinreichend gross genommen werden muss, ist ein Beispiel für eine immer wachsende oder immer abnehmende (monotone) Function, welche in allen rationalen Punkten keine Derivirte besitzt (Dini).

Bei einer Function, die sich geometrisch darstellen lässt, ist die Derivirte in einem Punkt die trigonometrische Tangente des Winkels, den die geometrische Tangente an die Bildcurve mit der x-Axe macht.

Wenn die Grenze des Zuwachsverhältnisses $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *für* $x=\infty$ *existirt und für jeden Werth von* Δx *constant ist, so kommt sie dem Grenzwerth* $\lim\limits_{x=\infty}\frac{f(x)}{x}$ *gleich (das Cauchy'sche Theorem).*

Darüber siehe Du Bois-Reymond, *Ann. di mat.*, 4; *Math. Ann.*, 16; Stolz, *Math. Ann.*, 15; Rouquet, *Nouv. Ann.*, 16 und S. 67 u. ff. der *Note critiche* etc.

Wenn die Derivirte einer Function für $x=a$ *einen Grenzwerth hat, so ist sie für* $x=a$ *stetig.*

Die Ableitung einer Constanten ist Null.

Die Ableitung einer algebraischen Summe von Functionen ist der algebraischen Summe der Ableitungen der Functionen gleich.

Die Derivirte eines Productes ist der Summe der Producte der Ableitung eines jeden Factors mit allen übrigen Factoren gleich.

Die Derivirte des Quotienten zweier Functionen ist einem Bruche gleich, dessen Zähler die Differenz zwischen den Producten der Ableitung des Zählers mit dem Nenner und der Ableitung des Nenners mit dem Zähler ist, und der zum Nenner das Quadrat des Nenners des gegebenen Bruches hat.

Ist y eine Function von z und z eine Function von x, so ist die Ableitung von y nach x dem Product aus der Ableitung von y nach z und der Ableitung von z nach x gleich.

Die Ableitung einer inversen Function ist dem arithmetischen reciproken Werth der Ableitung der directen Function gleich.

Wenn die Reihe der Derivirten der Glieder einer Reihe von Functionen (vergl. Kap. 4, § 3) *eine gleichmässig convergente Reihe vorstellt, so ist ihr Werth genau die Derivirte der gegebenen Reihe (die gliedweise Differentiation der Reihen).* Beispiele von Fällen, in denen die gliedweise Differentiation der Reihen nicht anwendbar ist, findet man in den *Note critiche*, S. 78 u. ff.

Die Derivirte einer Potenzreihe erhält man durch Bildung der Reihe der Derivirten der verschiedenen Glieder der gegebenen Reihe.

Die Derivirte von y nach x wird durch das Symbol $\frac{dy}{dx}$ dargestellt. Die Fundamentalformeln für die Differentiation sind die folgenden:

$$y = x^m, \qquad \frac{dy}{dx} = m x^{m-1},$$

$$y = \sqrt{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$y = \sin x, \qquad \frac{dy}{dx} = \cos x,$$

$$y = \cos x, \qquad \frac{dy}{dx} = -\sin x,$$

$$y = \operatorname{tg} x, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y = \operatorname{cotg} x, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$y = \sec x, \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x \cdot \sec x,$$

$$y = \operatorname{cosec} x, \qquad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cosec} x,$$

$$y = e^x, \qquad \frac{dy}{dx} = e^x,$$

$$y = a^x, \qquad \frac{dy}{dx} = a^x \log_e a,$$

$$y = \log_e x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},$$

$$y = \log_a x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e,$$

$$\left.\begin{array}{ll} y = \text{arc sin } x, & \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ y = \text{arc cos } x, & \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ y = \text{arc tg } x, & \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \\ y = \text{arc cotg } x, & \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}, \\ y = \text{arc sec } x, & \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \\ y = \text{arc cosec } x, & \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \end{array}\right\} \text{für ein zwischen 0 und } \frac{\pi}{2} \text{ gelegenes } y,$$

$$y = x^x, \qquad \frac{dy}{dx} = x^x (\log x + 1).$$

Um die Derivirte einer Determinante zu erhalten, deren Elemente Functionen von x sind, bilde man die Summe der Determinanten von demselben Grad, welche sich ergeben, wenn man den Elementen einer Zeile nach der anderen die Derivirten dieser Elemente substituirt.

Hat man eine Function $f(x_1, x_2, \cdots)$ von mehreren Variabelen und setzt für $x_2, x_3, \cdots$ ein System von Werthen $a_2, a_3, \cdots$ und bildet alsdann die Ableitung von f nach x_1, so erhält man *die partielle Derivirte* 1[ter] *Ordnung* oder *die erste partielle Ableitung* von f nach x_1. Gleiches gilt von den übrigen Variabelen.

Die partiellen Differentialquotienten bezeichnet man nach Jacobi mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots.$$

Eine Function von n Variabelen hat n partielle Ableitungen erster Ordnung.

Wiederholt man an den ersten Ableitungen die Operation des Derivirens, so ergeben sich die Derivirten 2ter, 3ter, ⋯ Ordnung oder die zweiten, dritten, ⋯ Derivirten. Man bezeichnet sie mit

$\frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}, \cdots$, wenn y die Function von x allein ist, und mit

$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x_1^2 \partial x_2}, \cdots$, wenn y eine Function von mehreren Variabelen vorstellt.

Wenn die beiden ersten Derivirten $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}$ *einer Function* f *von zwei Variabelen in einer ganzen Umgebung des Punktes mit den Coordinaten* a_1 *und* a_2 *endlich sind, und wenn eine der beiden zweiten Derivirten* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ *in dem Punkt stetig ist und in einer ganzen Umgebung des Punktes existirt, alsdann sind diese beiden zweiten Ableitungen einander gleich; es ist also dann die Reihenfolge, in der die Ableitungen gebildet werden, gleichgültig (der Satz von der Umkehrung der Differentiationen).* Vergl. darüber: Blanchet, *J. de Liouville,* 6, S. 65, 1841; Lindelöf, *Acta Soc. Fennicae,* 8, Thl. 1, S. 205; Genocchi, *Acc. Torino,* 4, S. 327, 1869; Schwarz, *Abhandl.,* 2, S. 275; Peano, *Mathesis,* 1890, S. 153; Stolz, *Grundzüge* etc., 1, S. 146 und Pascal, *Note critiche,* S. 164.

Die wichtigsten Formeln in Bezug auf die höheren Differentialquotienten sind:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = m(m-1)\cdots(m-n+1)\,x^{m-n},$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin x = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right),$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + x\right),$$

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right\} = (-1)^{n-1}\,1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\,\frac{\sin(n \arccos x)}{n};$$

Jacobi, *Crelle,* Bd. 15, S. 3; Hermite, *Math. Ann.,* Bd. 10,

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^x \sin x) = \frac{e^x}{\sin^n \frac{\pi}{4}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right),$$

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^x \cos x) = \frac{e^x}{\sin^n \frac{\pi}{4}} \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

Weitere Angaben über diesen Gegenstand findet man auf S. 148 der *Note critiche* etc.

Wenn y eine *zusammengesetzte* Function ist, z. B. eine Function von $x_1, x_2, x_3, \cdots$ und diese ihrerseits Functionen von x sind, *so ist die Ableitung von y nach x:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx} + \cdots.$$

Ist y als implicite (unentwickelte) Function von x durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ gegeben, so ergibt sich die Derivirte von y nach x aus:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Ist aber y als implicite Function der beiden Variabelen x_1, x_2 durch die Gleichung $f(y, x_1, x_2) = 0$ gegeben, so erhält man die partiellen Ableitungen aus den Formeln:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial y}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Die partiellen Derivirten einer homogenen Function sind ebenfalls homogene Functionen, deren Homogenitätsgrad um eine Einheit geringer ist.

Die Summe der Producte aus den partiellen Derivirten einer homogenen Function und den bezüglichen Variabelen ist der mit dem Grad der Homogenität multiplicirten Function gleich (das Euler'sche Theorem):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}x_2 + \cdots = rf,$$

worin r den Grad der Homogenität bedeutet. Diese Eigenschaft ist eine nothwendige und ausreichende Bedingung, wenn die Function f homogen sein soll.

§ 3. Die Lehre von den Differentialen der Functionen einer oder mehrerer Variabelen.

Differential einer unabhängigen Variabelen x nennt man einen beliebigen dieser Variabelen gegebenen Zuwachs und bezeichnet ihn mit dem Symbol dx.

Differential der Function y von x heisst das Product aus der Ableitung von y mit dem Differential der unabhängigen Variabelen. Man bezeichnet es mit dy; es ist also

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Das Differential der Function unterscheidet sich um Unendlichkleine höherer Ordnung von dem Zuwachs, welchen die Function erleidet, wenn man der unabhängigen Variabelen den Zuwachs dx gibt.

Wenn man das erste Differential der unabhängigen Variabelen für jeden Werth von x als constant annimmt, so ist das n^{te} Differential der Function dem Product der n^{ten} Derivirten der Function mit der n^{ten} Potenz des Differentials der unabhängigen Variabelen gleich.

Man bezeichnet als *totales Differential* einer Function von mehreren Variabelen die Summe der Producte der partiellen Derivirten der Function mit den Differentialen der unabhängigen Variabelen:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \cdots.$$

Wenn die ersten partiellen Derivirten der Function stetig sind, so unterscheidet sich das totale Differential von dem Zuwachs der Function um Unendlichkleine von höherer Ordnung (der Satz über das totale Differential). Beispiele, für welche dieses Theorem nicht gilt, findet man bei Thomae, *Abriss einer Theorie der complex. Funct.*, S. 17 und in des Verfassers *Note critiche*, S. 159.

Wenn man die Differentiale der Variabelen, von denen die Function f direct abhängt, als constant annehmen kann — und dieser Fall tritt ein, wenn sie entweder unabhängig oder sämmlich *lineare* Functionen einer oder mehrerer unabhängiger Variabelen sind — *alsdann lässt sich das n^{te} Differential der Function f durch die Formel*

$$d^n f = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \cdots\right)\right)^{(n)}$$

ausdrücken, in welcher das Symbol auf der rechten Seite eine symbolische Potenz bezeichnet; d. h.: man soll die n^{te} Potenz auf die gewöhnliche Art entwickeln und dann die Exponenten an den Ausdrücken $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots$ *als Differentiationszeichen ansehen.*

Im anderen Fall werden die höheren Differentiale von f nach demselben Gesetz gebildet, wie das erste Differential, vorausgesetzt, dass dx_1, dx_2, $\cdots$ bestimmte Functionen aller Variabelen sind.

§ 4. Die Lehre von den in einem ganzen Bereich derivirbaren Functionen. Die Theoreme von Rolle, vom Mittelwerth und Folgerungen.

Wenn die Function einer Variabelen in einem ganzen Intervall von a bis b immer endlich und derivirbar ist und an den beiden Endpunkten denselben Werth hat, so gibt es wenigstens einen Punkt des Intervalls, für welchen die Derivirte der Function Null ist (das Rolle'sche Theorem).

Wenn $f(x)$ in allen Punkten des Intervalls von a bis b, in dessen Enden sie den Werth Null hat, immer endlich und derivirbar bleibt und wenn ein beliebiger Werth k gegeben wird, so existirt in dem Innern des Intervalls immer ein Punkt, in welchem

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k \text{ ist (das Waring'sche Theorem).}$$

Macht man in Bezug auf die Function $f(x)$ dieselben Voraussetzungen in dem ganzen Intervall von x_0 bis $x_0 + h$, so besteht die Formel

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta h) \text{ (der Mittelwerthsatz)}$$
$$(0 \leqq \theta \leqq 1).$$

Wenn die Derivirte einer Function in einem ganzen Intervall beständig Null bleibt, so ist die Function constant.

Eine Function, deren Derivirte in einem ganzen Intervall constant bleibt, ist eine lineare Function von x.

Wenn drei Functionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ in einem ganzen Intervall (a, b) endlich und derivirbar sind, so existirt in ihm ein Punkt x', in welchem

$$\begin{vmatrix} \varphi'(x'), & \psi'(x'), & \chi'(x') \\ \varphi(a), & \psi(a) & \chi(a) \\ \varphi(b), & \psi(b) & \chi(b) \end{vmatrix} = 0 \text{ ist.}$$

Wenn $f(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ eine in einem ganzen Bereich endliche und derivirbare Function ist, und wenn

$$(a_1, a_2, \cdots), \quad (a_1 + h_1, a_2 + h_2, \cdots)$$

die Coordinaten zweier in dem Bereich gelegener Punkte sind, welche die Beschaffenheit haben, dass die sie verbindende Gerade vollständig in dem Bereich enthalten ist, (dass also, analytisch ausgedrückt, im Allgemeinen, wenn man

$$x_1 = a_1 + xh_1, \quad x_2 = a_2 + xh_2, \quad x_3 = a_3 + xh_3, \quad \cdots$$

setzt, auch die den Werthen $0 < x < 1$ entsprechenden Punkte sämmtlich in dem Bereich liegen), alsdann hat die Formel Gültigkeit:

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \cdots) - f(a_1, a_2, \cdots)$$
$$= \left(h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots\right)_{\substack{x_1 = a_1 + \theta h_1 \\ x_2 = a_2 + \theta h_2 \\ \cdots\cdots}}$$
$$(0 \leqq \theta \leqq 1).$$

Eine Function, für welche dieselben Bedingungen wie in dem vorigen Satz gelten, und deren Derivirte in dem ganzen Bereich immer Null bleibt, ist eine in dem ganzen Bereich constante Function.

§ 5. Die Lehre von der Taylor-Maclaurin'schen Formel; die Entwickelbarkeit der Functionen in Reihen.

Wenn eine Function $f(x)$ in einem ganzen Intervall von x_0 bis $x_0 + h$ endlich und derivirbar ist und es zugleich ihre $n-1$ ersten Derivirten sind, so besteht die Formel:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n (1-\theta)^{n-p}}{p\,(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \theta h),$$

worin p eine beliebige positive Zahl und $0 \leqq \theta \leqq 1$ ist.

Für $p = n$ oder $p = 1$ nimmt der letzte Term die beiden speciellen Formen an:

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h) \quad \text{(Lagrange)},$$

$$R_n = \frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \theta h) \quad \text{(Cauchy)}.$$

Die obige Formel ist unter dem Namen *der Taylor'schen Formel* bekannt und der letzte Term wird *der Rest der Formel* genannt. Setzt man $x_0 = 0$ und $h = x$, so ergibt sich *die Maclaurin'sche Formel.*

Sind $f(x)$, $F(x)$ zwei in dem ganzen Intervall $(x_0, x_0 + h)$ endliche und derivirbare Functionen und wird die Derivirte von F in diesem Intervall niemals Null, so besteht die Formel:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{F(x_0 + h) - F(x_0)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{F'(x_0 + \theta h)}.$$

Wenn eine Function $f(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ mehrerer Variabelen in einem ganzen Bereich endlich und derivirbar bleibt und es zugleich ihre sämmtlichen Ableitungen bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung bleiben, und wenn $(a_1, a_2, \cdots)$, $(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \cdots)$ zwei solche Punkte des Bereiches sind, dass die Zwischenpunkte der Geraden, welche sie verbindet, d. h. alle Punkte mit den Coordinaten $a_1 + \theta h_1$, $a_2 + \theta h_2$, $\cdots$ $(0 \leqq \theta \leqq 1)$ ebenfalls dem Bereich angehören, alsdann gilt die Formel:

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \cdots) &= f(a_1, a_2, \cdots) + \left(\frac{\partial f}{\partial a_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} h_2 + \cdots\right) \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial a_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} h_2 + \cdots\right)\right)^{(2)} + \cdots \\ &+ \frac{1}{(n-1)!}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial a_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} h_2 + \cdots\right)\right)^{(n-1)} + R_n, \end{aligned}$$

in welcher unter $\frac{\partial f}{\partial a_1}, \frac{\partial f}{\partial a_2}, \cdots$ die Derivirten für den Punkt $(a_1, a_2, \cdots)$ verstanden sind und durch die symbolischen Klammern

$$\left(\left(\frac{\partial f}{\partial a_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} h_2 + \cdots\right)\right)^{(i)}$$

angegeben wird, dass man die i^{te} Potenz dieses Polynoms auf die gewöhnliche Art entwickeln und alsdann den i^{ten} Potenzen oder Producten der i Derivirten $\frac{\partial f}{\partial a_1}, \frac{\partial f}{\partial a_2}, \cdots$ die entsprechenden i^{ten} Derivirten von f substituiren soll, und in welcher schliesslich R_n eine der beiden Formen

$$R_n = \frac{1}{n!}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \cdots\right)\right)^{(n)}_{\substack{x_1 = a_1 + \theta h_1 \\ x_2 = a_2 + \theta h_2 \\ \cdots\cdots}} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1)$$

oder

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}h_2 + \cdots\right)\right)^{(n)}_{\substack{x_1=a_1+\theta h_1\\ x_2=a_2+\theta h_2\\ \cdots\cdots}} \quad (0 \leqq \theta \leqq 1)$$

hat.

Diese Formel ist die sogenannte *Taylor'sche Formel für die Functionen mehrerer Variabelen.*

Wenn die für die Taylor'sche Formel angegebenen Bedingungen für jeden beliebigen Werth des Index n gelten und wenn die Grenze von R_n für $n = \infty$ Null ist, alsdann lassen sich

$$f(a_0 + h) \quad \text{oder} \quad f(a_1 + h_1,\ a_2 + h_2,\ \cdots)$$

in eine nach Potenzen (in dem ersten Fall) von h oder (in dem zweiten Fall) von h_1, h_2, $\cdots$ geordnete Reihe entwickeln und man erhält das, was man im eigentlichen Sinn *die Taylor'sche Reihe* zu nennen pflegt.

Soll eine Function in Taylor'sche Reihen entwickelbar sein, so muss sie und alle ihre Derivirten von beliebiger aber endlicher Ordnung für jeden willkürlichen Punkt des Intervalls d. h. für alle Punkte von der Form $x_0 + \theta h$ *oder* $a_1 + \theta h_1$, $a_2 + \theta h_2$, $\cdots$ $(0 \leq \theta \leq 1)$ *stets endlich sein.*

Wenn $f^{(n)}(x_0 + \theta h)$ *oder* $f^{(n)}(a_1 + \theta h_1,\ a_2 + \theta h_2,\ \cdots)$ *für jedes beliebige* θ *und jedes beliebige* n *stets kleiner als eine endliche Zahl bleibt, d. h. wenn* $f^{(n)}$ *nicht zugleich mit* n *dem Unendlichgrossen zustrebt, so lässt sich die Function in Taylor'sche Reihen entwickeln.*

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, unter welcher eine Function einer Variabelen in Taylor'sche Reihen entwickelt werden kann, besteht darin, dass

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \theta h)$$

für $n = \infty$ *gleichmässig gegen Null convergire* (Pringsheim).

Siehe Pringsheim, *Math. Ann.*, Bd. 44 und Pascal, *Note critiche di calcolo*, S. 176—214 und *Rivista di mat.*, 5, S. 37, 1895.

Lässt sich eine Function einer Variabelen in eine nach aufsteigenden ganzen Potenzen der Variabelen geordnete Reihe entwickeln, so kann diese Reihe nur eine Taylor'sche sein.

Soll eine Function $f(x)$ *in Taylor'sche Reihen entwickelbar sein, so ist es nothwendig, dass die Derivirten von beliebiger endlicher Ordnung für jedes zwischen* x_0 *und* $x_0 + h$ *liegende* x *sämmtlich endlich sind.* Lagrange, *Oeuvr.*, 9, S. 65; 10, S. 72

hatte geglaubt, dass die Bedingung auch *ausreichend* wäre; Cauchy aber, *Leçons sur le calcul infin.*, 1823, S. 152; 1826, S. 105 hat zuerst ein Beispiel gefunden, bei welchem die Derivirten zwar endlich sind, das jedoch diese Entwickelbarkeit nicht besitzt.

Die Cauchy'sche Function lautet

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f(0) = 0.$$

Andere Beispiele sind von Du Bois-Reymond, *Math. Ann.*, 21, S. 111; Pringsheim, *Math. Ann.*, 42, S. 161; 44, S. 41; Mittag-Leffler, *Acta math.*, 15, S. 279; vergl. *Note critiche*, S. 180—196.

Die binomische Reihe

$$(1+x)^m = 1 + (m)_1 x + (m)_2 x^2 + \cdots$$

ist gültig für ein beliebiges m und $|x| < 1$,
oder „ „ positives m und $x = \pm 1$,
oder „ „ negatives $m > -1$ und $x = +1$

$$(m)_i = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-i+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots i}.$$

Die geometrische Reihe

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ gilt für $|x| < 1$ und ist ein specieller Fall der vorigen.

Die Exponentialreihen

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1!} + \frac{x^2 (\log a)^2}{2!} + \frac{x^3 (\log a)^3}{3!} + \cdots$$

gelten für jedes x und jedes a.

Die goniometrischen Reihen

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

gelten für jedes x.

Die logarithmische Reihe

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ gilt für $-1 < x \leqq +1$

und

$\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots$ gilt für $0 < x \leqq 2$.

Die cyclometrische Reihe

$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ gilt für $-1 \leqq x \leqq +1$.

Andere Taylor'sche Reihen sind:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} + \cdots$$

$$= \sum_1^\infty \beta_{2m} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!},$$ welche für $-\pi < x < +\pi$ gilt, und

worin $\beta_{2m} = \frac{2^{2m}(2^{2m}-1)}{2m} B_{2m}$ ist und die B_{2m} die sogenannten Bernoulli'schen Zahlen sind (Kap. 18, § 3).

$$\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \frac{1}{4725}x^7 - \frac{2}{93555}x^9 - \cdots$$

$$= -\sum_1^\infty \frac{2^{2m}}{2m!} B_{2m} x^{2m-1},$$ welche für $-\pi < x < +\pi$ gilt.

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{61x^6}{6!} + \cdots + E_{2m}\frac{x^{2m}}{2m!} + \cdots,$$ welche für $x < \frac{\pi}{2}$ gilt,

und worin die E_{2m} die Euler'schen Zahlen bedeuten (Kap. 18, § 3).

$$\operatorname{cosec} x - \frac{1}{x} = \frac{x}{3!} + \frac{7x^3}{3\cdot 5!} + \frac{29x^5}{3\cdot 7!} + \cdots$$

$$+ \frac{2(2^{2m+1}-1)}{(2m+2)!} B_{2m+2} x^{2m+1} + \cdots$$ gültig für $0 < x < \pi$.

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots$$

$$= \sum_0^\infty \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$$ gültig für $x^2 < 1$.



$$\log \sin x = \log x - \sum_{1}^{\infty} \frac{2^{2m-1}}{m} \frac{B_{2m}}{2m!} x^{2m} \text{ gültig für } -\pi < x < \pi.$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} - \frac{3x^6}{6!} + \cdots.$$

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \frac{B_2 x^2}{2!} - \frac{B_4 x^4}{4!} + \cdots$$ *ist die Function, welche die Bernoulli'schen Zahlen* $B_2, B_4, \cdots$ *liefert.*

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \frac{B_2 x^2}{2!} - \frac{B_4 x^4}{4!} + \cdots.$$

$$\log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} - \cdots \text{ gilt für } |x| < 1.$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 \cdot x^4}{4!} - \frac{2^5 \cdot x^6}{6!} + \cdots \text{ gilt für jedes } x.$$

$$\cos(m \arcsin x) = 1 - \frac{m^2}{2!}x^2 +$$
$$+ \frac{m^2(m^2 - 2^2)}{4!}x^4 - \frac{m^2(m^2 - 2^2)(m^2 - 4^2)}{6!}x^6 + \cdots \text{ gilt für } |x| < 1.$$

$$e^{ax}\cos bx = 1 + r\cos\varphi \cdot x + \frac{r^2 \cos^2\varphi}{2!}x^2 + \cdots,$$
worin $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ ist.

§ 6. Die Lehre von den unbestimmten Formen.

Wenn man bei der Anwendung der gewöhnlichen Theoreme über die Grenzen und bei dem Aufsuchen der *Grenze* einer Function zu einem Resultat von der Form

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \cdot \infty,\ \infty^0,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty - \infty$$

kommt, so sagt man, es habe sich ein Problem der unbestimmten Formen geboten; dieses Problem auflösen, heisst auf irgend eine Art mittelst irgend eines geeigneten Verfahrens ermitteln,

welchen Grenzwerth, wenn ein solcher existirt, die gegebene Function hat.

Das Aufsuchen der Werthe der oben angegebenen Formen lässt sich immer auf die Ermittelung des Werthes der ersten Form zurückführen.

In Bezug auf die Werthbestimmung des vieldeutigen Ausdrucks $\frac{0}{0}$ gelten die folgenden Sätze:

Wenn $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *in einem Punkt a und in einer seiner Umgebungen definirt und in a Null sind, wenn sie ferner in diesem Punkt eine Ableitung besitzen, alsdann ist, falls* $\varphi'(a)$, $\psi'(a)$ *nicht beide Null oder beide* ∞ *sind oder falls zwar* $\psi'(a) = 0$ *ist, aber* $\frac{\psi(a+h)}{h}$ *bei dem Variiren von h das Vorzeichen nicht wechselt, die Grenze* $\lim_{x=a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *gleich* $\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$, *unter der Voraussetzung, dass man* $\frac{1}{\pm 0} = \pm \infty$ und $\frac{1}{\pm \infty} = 0$ *setzt.*

Wenn die Grenzen von φ *und* ψ *für* $x = a$ *Null sind, wenn die Grenze des Verhältnisses ihrer Derivirten für* $x = a$ *existirt und wenn schliesslich in einer ganzen Umgebung von a die Derivirte von* ψ *immer von Null verschieden ist, alsdann existirt die Grenze von* $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *und ist der Grenze des Verhältnisses der Derivirten gleich.*

Ueber die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$ gilt der folgende Satz:

Wenn die Grenzen von φ *und* ψ *für* $x = a$, ∞ *sind, wenn die Grenze des Verhältnisses der Derivirten existirt und wenn* $\psi'(x)$ *in der ganzen Umgebung von a nicht nur niemals Null wird, sondern auch immer dasselbe Vorzeichen behält, so existirt die Grenze des Verhältnisses der Functionen und ist der Grenze des Verhältnisses der Derivirten gleich.*

Ueber die Sätze, welche die unbestimmten Formen betreffen, vergl. Du Bois-Reymond, *Ann. di mat.*, 4, S. 346; Stolz, *Math. Ann.*, 14, S. 235; 15, S. 558; 33, S. 244; Rouquet, *Nouv. Ann.*, 16, 113 und Stolz, *Grundzüge der Diff.- u. Integr.-Rechnung,* Leipzig 1893, I, S. 72—84. Weitere Angaben findet man in Pascal, *Note critiche,* S. 233—247.

Es folgen hier die Grenzen einiger unbestimmten Formen:

$$\lim_{x=\infty} \frac{x - \sin x}{x + \cos x} = 1, \qquad \lim_{x=0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\log(1+x)} = 0,$$

$$\lim_{x=0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = 1, \qquad \lim_{x=0} x^x = 1,$$

$$\lim_{x=0} x e^{\frac{1}{x}} = \infty, \qquad \lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} ax - ax}{\operatorname{tg} bx - bx} = \frac{a^3}{b^3};$$

$$\lim_{x=0} \frac{a^x - b^x}{x} = \log a - \log b, \qquad \lim_{x=0} x^p \log \frac{1}{x} = 0 \quad (p > 1),$$

$$\lim_{x=0} \frac{\log x}{x^m} = 0 \quad (m > 0).$$

§ 7. Wachsende und abnehmende Functionen. Maxima und Minima der Functionen einer oder mehrerer Variabelen.

Eine Function einer einzigen Variabelen $f(x)$ heisst in einem Punkt x_0 *wachsend*, wenn immer ein solcher Werth k existirt, dass für jedes $h < k$ gleichzeitig die beiden Ungleichheiten

$$f(x_0 - h) - f(x_0) < 0,$$
$$f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$$

gelten.

Abnehmend dagegen heisst die Function, wenn die anderen Ungleichheiten bestehen:

$$f(x_0 - h) - f(x_0) > 0,$$
$$f(x_0 + h) - f(x_0) < 0.$$

Wenn die 1ten, 2ten, $\cdots$, $(n-1)^{\text{ten}}$ *Derivirten in dem Punkt* x_0 *Null sind, die* n^{te} *Derivirte dagegen nicht, so wächst in diesem Punkt, falls* n *eine gerade Zahl ist, die Function weder noch nimmt sie ab; ist* n *dagegen eine ungerade Zahl, so wächst die Function, wenn die* n^{te} *Derivirte in* x_0 *positiv ist, und nimmt ab, wenn die* n^{te} *Derivirte negativ ist.*

Eine Function einer einzigen Variabelen (oder mehrerer x_1, x_2, $\cdots$) hat in einem Punkt x_0 (oder einem Punkt mit den Coordinaten a_1, a_2, $\cdots$) *einen grössten Werth oder ein Maximum*, wenn sich eine solche Grösse k (oder ein solches System von Werthen k_1, k_2, $\cdots$) finden lässt, dass für jedes $h < k$ (oder für jedes System von Werthen $h_1 < k_1$, $h_2 < k_2$, $\cdots$) immer

$$f(x_0 \pm h) - f(x_0) < 0$$

oder

$$f(a_1 + h_1,\ a_2 + h_2,\ \cdots) - f(a_1,\ a_2,\ \cdots) < 0 \text{ ist.}$$

Sie hat dagegen in einem solchen Punkt ***einen kleinsten Werth oder ein Minimum,*** wenn das Zeichen $>$ in den Ungleichheiten an die Stelle des Zeichens $<$ tritt.

Soll eine Function in einem Punkt ein Maximum oder Minimum haben, so muss die 1te Derivirte (oder alle partiellen ersten Derivirten) gleich Null sein.

Soll ferner eine Function in einem Punkt ein Maximum oder Minimum haben, so muss die Ordnung n der in diesem Punkt von Null verschiedenen Ableitung niedrigster Ordnung (oder der partiellen Ableitungen niedrigster Ordnung, die in diesem Punkt nicht sämmtlich Null sind) eine gerade Zahl sein.

*In dem Fall einer Function einer einzigen Variabelen erhält man, wenn n die Ordnung der von Null verschiedenen Ableitung niedrigster Ordnung angibt, ein **Maximum**, wenn $f^{(n)}(x_0)$ negativ, und ein **Minimum**, wenn $f^{(n)}(x_0)$ positiv ist.*

In dem Fall einer Function mehrerer Variabelen muss man, wenn ein gerades n die Ordnung der partiellen Ableitungen niedrigster Ordnung, welche nicht sämmtlich Null sind, angibt, den symbolischen Ausdruck

$$\left(\left(\frac{\partial f}{\partial a_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} h_2 + \cdots\right)\right)^{(n)}, \text{ (siehe die Taylor'sche Formel, § 5),}$$

*untersuchen, welcher bei seiner Entwickelung eine Form von der n^{ten} Dimension in Bezug auf $h_1,\ h_2,\ \cdots$ liefert. Wenn diese Form für jedes beliebige System von Werthen $h_1,\ h_2,\ \cdots$ immer dasselbe Vorzeichen behält und für keine anderen Werthe der Grössen h, als für $h_1 = h_2 = \cdots = 0$, Null wird (eine **definite** Form ist), alsdann tritt in diesem Punkt wirklich ein **Maximum** ein, falls die genannte Form beständig negativ ist, und im entgegengesetzten Fall ein **Minimum**.*

Wenn die genannte Form für andere von $h_1 = h_2 = \cdots = 0$ verschiedene Werthe der Grössen h verschwindet und constantes Vorzeichen hat (also eine *semidefinite* Form ist), alsdann sind andere specielle Untersuchungen zur Entscheidung der Frage nöthig, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt oder nicht. Wenn dagegen diese Form kein constantes Vorzeichen hat (eine *indefinite* Form ist), alsdann existirt in diesem Punkt weder ein Maximum noch ein Minimum.

Für den speciellen Fall $n = 2$ und für zwei Variabele ist die obige Form

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2} h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial a_2^2} h_2^2;$$

soll sie eine definite Form sein, so ist es nothwendig und genügt es, wenn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial a_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_2}\right)^2$$

positiv und von Null verschieden ist; in einem solchen Fall tritt ein Maximum oder Minimum ein, je nachdem $\frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2}$ negativ oder positiv ist.

Die Lehre von den Maxima und Minima der Functionen mehrerer Variabelen hat zu wichtigen Untersuchungen die Veranlassung gegeben. Siehe Scheeffer, *Math. Ann.*, Bd. 35; Dantscher, ebenda, Bd. 42; Stolz, *Wiener Berichte*, 1868, 1890, 1891, 1893; *Grundzüge* etc., 1, S. 211—258; Mayer, *Leipzig. Berichte*, 1892, S. 85; Genocchi-Peano, *Differentialrechnung* etc., Leipzig 1899, S. 177—189 und Pascal, *Note crit.* etc., S. 226.

Kapitel VII.

Die Integralrechnung.

§ 1. Die Integrirbarkeit.

$f(x)$ sei eine von $x = a$ bis $x = b$ stets endliche Function. Wir wollen das Intervall (a, b) in eine Anzahl n von Theilintervallen $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$ zerlegen und f_r sei ein Werth, den f in einem beliebigen Punkt des Intervalls δ_r annimmt oder auch die obere oder untere Grenze der Werthe, die der Function f in δ_r zukommen. Wir wollen nun die Summe

$$\sum_{r=1}^{n} f_r \delta_r$$

bilden und die Ausdehnung aller Theilintervalle unbegrenzt klein werden lassen, während ihre Anzahl n unbegrenzt wachse.

Wenn für $n = \infty$ ein Grenzwerth der obigen Summe existirt und stets derselbe bleibt, auf welche Art man auch das Gesetz bilden mag, nach welchem die Intervalle δ_r gegen Null convergiren und nach welchem der Werth f_r in dem Intervall δ_r ausgewählt wird, alsdann sagt man, *die Function f sei in dem Intervall a, b integrirbar* und dieser Grenzwerth sei *das bestimmte Integral der Function von a bis b genommen.* Man bezeichnet ein solches Integral mit dem Symbol

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Die Werthe a, b heissen *die untere und obere Grenze* des Integrals.

Die Bezeichnung der *Grenzen des Integrals* rührt von Fourier her, *Théorie analyt. de la chaleur,* S. 252, 1822; *Oeuvres,* 1, S. 226.

Ueber die Definition des Integrals siehe Riemann, *Werke*, S. 225; Du Bois-Reymond, *Ztschr. für Math. u. Phys.*, 20, S. 123; *Crelle*, 79, S. 259; Darboux, *Ann. Éc. norm.*, 4, 1875; Pasch, *Math. Ann.*, 30, S. 144; Volterra, *Giorn. di Batt.*, 19; Ascoli, *Acc. Lincei*, 2, 1878; *Ann. di mat.*, 23; Peano, *Acc. Torino*, 1883; *Ann. di mat.*, 23.

Die Definition erfordert in zwei Fällen Modificationen:

1) wenn es einen oder mehrere Punkte des Intervalls gibt, in denen die Function unendlich gross wird;

2) wenn eine der Integrationsgrenzen unendlich gross ist.

Wird $f(x)$ für $x = c$ unendlich gross, $a < c < b$, so nennt man den Ausdruck

$$\lim_{\varepsilon'=0} \int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon''=0} \int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)\,dx$$

das bestimmte Integral von a bis b der $f(x)$, wobei natürlich vorausgesetzt wird, dass diese Grenzwerthe existiren und immer dieselben bleiben, auf welche Art man auch ε' und ε'' unabhängig von einander gegen Null convergiren lassen mag.

Ein solches Integral heisst ein *uneigentliches* bestimmtes Integral.

Tritt der Fall ein, dass die Grenze der Summe der beiden Integrale nur dann existirt, wenn man sich ε'', ε' durch eine Beziehung verbunden denkt, so erhält man *die singulären uneigentlichen Integrale* (Cauchy).

Wenn eine der Grenzen oder beide das Unendlichgrosse sind, so heisst der Grenzwerth

$$\lim_{x'=\infty} \int^{x'} f(x)\,dx$$

oder

$$\lim_{\substack{x'=-\infty \\ x''=+\infty}} \left\{ \int_{x'}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{x''} f(x)\,dx \right\}$$

das uneigentliche bestimmte Integral von $f(x)$, vorausgesetzt, dass diese Grenzwerthe unabhängig von der Art existiren, auf welche x' und x'' gegen ∞ convergiren.

Falls die Grenze nur dann existirt, wenn man sich x' und x'' durch eine Bedingung verbunden vorstellt, erhält man auch hier *ein singuläres uneigentliches Integral.*

Ein *uneigentliches Integral* heisst ***absolut (unbedingt) convergent,*** falls die Grenze, von welcher in seiner Definition die Rede ist, auch dann existirt, wenn man, statt die Function mit ihrem richtigen Vorzeichen zu nehmen, ***ihren absoluten Werth*** in Betracht zieht; es heisst ***einfach (bedingt) convergent,*** wenn dieses nicht der Fall ist.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit eine endliche Function in einem ganzen Intervall integrirbar sei, besteht darin, dass die Grenze

$$\lim_{n=\infty} \sum_{r=1}^{n} D_r \delta_r,$$

worin D_r die Schwankung der Function in dem Intervall δ_r darstellt, Null sein muss.

Soll eine endliche Function integrirbar sein, so ist es nothwendig und ausreichend, dass $\lim\limits_{n=\infty} \tau = 0$ sei, wenn man mit τ die Summe der Intervalle δ_r bezeichnet, in denen die Schwankung der Function grösser als eine beliebige festgesetzte Grösse ist.

Jede stetige Function ist integrirbar.

Jede punktirt unstetige Function (siehe Kap. 1, § 9) *ist integrirbar (das Riemann'sche Theorem).*

Der Werth des bestimmten Integrals einer integrirbaren Function ändert sich nicht, wenn man den Werth der Function in einem oder mehreren Punkten oder allgemeiner in unendlich vielen Punkten ändert; doch müssen die letzteren so angeordnet sein, dass sich in jedem beliebig kleinen Intervall immer ein Punkt befindet, in welchem der Werth der Function unverändert bleibt.

Eine endliche Function, welche in dem ganzen Integrationsintervall immer wächst oder immer abnimmt, ist integrirbar.

Jede stetige Function mehrerer integrirbarer Functionen (speciell die Summe oder das Product) ist auch ihrerseits integrirbar (*das Du Bois-Reymond'sche Theorem, Math. Ann.,* 16, 20).

Die bestimmten Integrale haben die Eigenschaften:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx; \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$



Es gilt die Formel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n=\infty}\frac{\sum_1^n f_r}{n}\cdot$$

Dem bestimmten Integral des Products zweier Functionen kann man die folgenden Formen geben (der Mittelwerthsatz):

$$1.\quad \int_a^b f(x)\,f_1(x)\,dx = f\{a+\vartheta(b-a)\}\int_a^b f_1(x)\,dx,$$

worin ϑ zwischen 0 *und* 1 *liegt, f und f_1 stetig sind und vorausgesetzt wird, dass f_1 innerhalb des Integrationsintervalles niemals das Vorzeichen wechselt;*

$$2.\quad \int_a^b f(x)\,f_1(x)\,dx = f(a)\int_a^{a+\vartheta(b-a)} f_1(x)\,dx,$$

wenn man voraussetzt, dass $f(x)$ und $f_1(x)$ integrirbare Functionen sind und $f(x)$ im Integrationsintervall eine beständig positive und durchweg abnehmende oder eine beständig negative und durchweg zunehmende Grösse ist; ϑ bedeutet eine zwischen 0 *und* 1 *gelegene Zahl;*

$$3.\quad \int_a^b f(x)\,f_1(x)\,dx = f(a)\int_a^{a+\vartheta(b-a)} f_1(x)\,dx + f(b)\int_{a+\vartheta(b-a)}^b f_1(x)\,dx,$$

wenn man annimmt, $f(x)$ und $f_1(x)$ seien integrirbare Functionen und $f(x)$ sei eine im Integrationsintervall entweder stets abnehmende oder stets zunehmende Grösse.

Man beachte, dass in den vorstehenden Formeln der Werth von ϑ verschieden ist, je nachdem es sich um die eine oder die andere Formel handelt.

Ueber diese Mittelwerthsätze vergl. Bonnet, *J. de Liouville,* 14; Du Bois-Reymond, *Crelle,* 69, 79; *Math. Ann.,* 7; Meyer, *Math. Ann.,* 6 etc. Siehe Harnack, *Die Elemente* etc., S. 270 und Stolz, *Grundzüge* etc., 1, S. 420.

Die folgenden Theoreme geben die Bedingungen an, unter welchen die uneigentlichen Integrale convergiren.

Wenn eine Function $f(x)$ gegeben ist, die in einem Punkt b unendlich gross wird und in jedem Intervall von a bis $b-\varepsilon$

integrirbar ist, und wenn sich eine solche positive Zahl $\nu < 1$ *finden lässt, dass*

$$(x - b)^{\nu} f(x)$$

für $x = b$ *einer endlichen Grösse zustrebt oder zwischen endlichen Grenzen schwankt, so genügt dieses, um den Schluss zu ziehen, dass das bis* b *erstreckte Integral absolut convergent sei.*

Ist die $f(x)$ *des vorstehenden Satzes eine Function, die immer dasselbe Vorzeichen behält, so besteht die nothwendige Bedingung, damit das bis* b *erstreckte Integral convergent sei, darin, dass die Grenze*

$$\lim_{x=b} (x - b) f(x)$$

entweder verschwinde oder zwischen zwei Grenzen schwanke, die nach der gemachten Hypothese kein verschiedenes Vorzeichen haben können, und von welchen die eine Null ist.

Wenn eine in jedem beliebigen Intervall (bis ∞*) integrirbare Function vorliegt, und sich ein* $\nu > 1$ *von der Beschaffenheit finden lässt, dass die Grenze*

$$\lim_{x=\infty} x^{\nu} f(x)$$

endlich (bez. Null) ist, oder dass, wenn diese Grenze nicht existirt, das Product zwischen endlichen Grenzen schwankt, so ist das Integral der $f(x)$ *von* a *bis* ∞ *absolut convergent.*

Macht man dieselben Voraussetzungen und fügt noch die Hypothese hinzu, die $f(x)$ *wechsele von einem gewissen Punkt an bis* ∞ *niemals das Vorzeichen, so besteht eine nothwendige Bedingung, damit das Integral einen endlichen Grenzwerth besitze, darin, dass das Product* $x f(x)$ *für* $x = \infty$ *entweder zur Grenze Null habe oder zwischen zwei Grenzen schwanke, von welchen die eine Null ist.*

Die uneigentlichen Integrale werden behandelt in Riemann, *Werke,* Leipzig 1876, S. 229; Dirichlet, *Crelle,* 17, S. 60, Anm.; Du Bois-Reymond, *Crelle,* 76; *Math. Ann.,* 13; Pringsheim, *Math. Ann.,* 37 etc. Siehe auch des Verfassers *Note critiche,* S. 272.

Das bestimmte Integral, dessen obere Grenze x ist, stellt eine Function von x dar und heisst *die Integralfunction.*

Wenn man zu der Integralfunction eine beliebige Constante hinzufügt, so erhält man eine Function, die sich ebenfalls durch ein bestimmtes Integral darstellen lässt, welches zur oberen Grenze x *und zur unteren eine von der früheren verschiedene Zahl hat.*

Bezeichnet man mit $\varphi(x)$ die Integralfunction, so drückt die Formel

$$F(x) = \varphi(x) + C,$$

in welcher C eine unbestimmte Constante bedeutet, eine unbestimmte Function aus, die man *das unbestimmte Integral der Function* nennt und mit

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

bezeichnet.

Kennt man das unbestimmte Integral, so wird das bestimmte mittelst der Formel

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

berechnet.

Die Integralfunction ist immer eine stetige Function.

Wenn die unter dem Integralzeichen stehende Function $f(x)$ stetig ist, so lässt sich die Integralfunction differenziren und ihre Ableitung ist dem Werth der Function $f(x)$ gleich.

Ist $f(x)$ stetig, so bestehen die Gleichungen

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)\, dx = f(b), \quad \frac{d}{da}\int_a^b f(x)\, dx = -f(a).$$

Transformation des einfachen Integrals. *Es sei*

$$I = \int_a^b f(x)\, dx;$$

setzt man $x = \psi(y)$ und versteht dabei unter ψ eine solche derivirbare Function von y, dass sich in dem Intervall a, b auch y als einwerthige Function von x betrachten lässt, so erhält man

$$I = \int_{a'}^{b'} f\{\psi(y)\} \frac{dx}{dy}\, dy,$$

worin a', b' die Werthe von y sind, welche sich aus den Gleichungen $a = \psi(y)$, $b = \psi(y)$ ergeben.

Man habe

$$\varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx,$$

worin $a(y)$, $b(y)$ zwei Functionen von y vorstellen.

Nimmt man nun an, $f(x, y)$ sei eine stetige Function der beiden Variabelen, die Functionen $f(x, y)$, $a(y)$, $b(y)$ lassen sich nach y differenziren und die Derivirte f'_y sei in Bezug auf beide Variabelen stetig, so erhält man die Formel:

$$\frac{d\varphi}{dy} = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)\,dx - f(a, y)\frac{da(y)}{dy} + f(b, y)\frac{db(y)}{dy}.$$

Sind a, b constant, so lässt sich das Zeichen für das Differenziren nach y mit dem Integrationszeichen vertauschen; d. h. die Ableitung des Integrals ist dem Integral der Ableitung gleich (der Satz von der Differentiation unter dem Integralzeichen).

Dieser Satz besteht immer dann, wenn

$$F(x, y) = \int f(x, y)\,dx$$

eine Function von x, y ist, für welche das Theorem von der Umkehrbarkeit der beiden Ableitungen nach x und y gilt.

Sind sowohl die Grenzen a, b als auch c, d constant und ist $f(x, y)$ eine stetige Function, so gilt die Gleichung

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy$$

(das Theorem von der Integration unter dem Integralzeichen).

Ueber die Bedingungen, unter welchen die Sätze über die Differentiation und Integration unter dem Integralzeichen gelten, siehe Dini, *Grundlagen* etc.; Arzelà, *Rend. Lincei,* Ser. 4, Bd. 1, S. 533; *Acc. Bologna,* 1888, 1889; Meyer, *Math. Ann.,* 6; De la Vallée-Poussin, *Ann. de Bruxelles,* 16, Thl. 2, S. 171; Stolz, *Math. Ann.,* 26; *Grundzüge* etc., 1, S. 440 u. ff.; 3, S. 1, 23; Harnack, *Math. Ann.,* 26. Vergl. auch die *Note critiche,* S. 299 u. ff., in denen Beispiele von Ausnahmen angegeben sind.

Gliedweise Integration der Reihen. Wenn eine Reihe, deren Glieder Functionen einer Variabelen x sind, in einem ganzen Intervall gleichmässig convergirt, so ist sie eine integrirbare Function von x und ihr Integral durch die Reihe der Integrale der einzelnen Glieder gegeben.

Speciell gilt der Satz:

Eine Potenzreihe (vergl. S. 64) *ist gliedweise integrirbar in einem Intervall, welches in dem Convergenzbereich der Reihe enthalten ist.*

Man hatte früher geglaubt, eine convergente Reihe sei immer gliedweise integrirbar. So hat z. B. Cauchy diese irrige Meinung gehabt. Weierstrass stellte zuerst das für die gliedweise Integration grundlegende Theorem auf, *Crelle,* 71, S. 353. Andere Arbeiten über diesen Gegenstand sind von Darboux, *Mém. sur les fonct. discont., Ann. École norm.,* 1875; Kronecker, *Berl. Berichte,* 1878, S. 54; Dini, *Grundlagen* etc., § 286 u. ff.; Arzelà, *Rend. Lincei,* 1, Ser. 4ª, S. 321, 532; Du Bois-Reymond, *Berl. Berichte,* 1886, S. 359; *Math. Ann.,* 22; *Abh. der bayer. Akad.,* 12.

§ 2. Unbestimmte Integrale.

Die unbestimmten Grundintegrale sind:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad \text{für ein von } -1 \text{ verschiedenes } m,$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log x, \qquad \int e^x dx = e^x,$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x,$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\operatorname{cotg} x,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{arc} \sin x = -\operatorname{arc} \cos x + \text{Const.},$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = -\operatorname{arc} \operatorname{cotg} x + \text{Const.},$$

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \qquad \int \frac{dx}{1-x^2} = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

$$\int \log x\, dx = x \log x - x, \qquad \int \operatorname{tg} x\, dx = -\log \cos x,$$

$$\int \sec x\, dx = \tfrac{1}{2} \log \frac{1+\sin x}{1-\sin x},$$

$$\int \operatorname{arc} \sin x\, dx = x \operatorname{arc} \sin x + \sqrt{1-x^2},$$

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x\, dx = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \tfrac{1}{2} \log (1+x^2),$$

$$\int \operatorname{arc} \sec x\, dx = x \operatorname{arc} \sec x - \log \left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Um Integrale auch anderer Functionen zu berechnen, sucht man sie durch ein geeignetes Verfahren auf einen dieser Grundtypen zurückzuführen. Solche Verfahrungsarten sind unter anderen:

1. Das sogenannte *Substitutionsverfahren,* wobei $x = \psi(z)$ gesetzt und die Function ψ so gewählt wird, dass das transformirte Integral (vergl. § 1) entweder bekannt oder leichter zu ermitteln ist.

2. Die sogenannte *theilweise Integration,* die in der Anwendung der identischen Formel

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

besteht. Man denkt sich die zu integrirende Function in das Product zweier Functionen

$$u, \quad \frac{dv}{dx}$$

derart zerlegt, dass sich aus dem Ausdruck für $\frac{dv}{dx}$ leicht derjenige für v finden lässt und dass das Product $v\frac{du}{dx}$ leichter zu integriren ist, als die gegebene Function. Manchmal hat man erst dann Erfolg mit dieser Methode, wenn man sie mehrere Mal anwendet. Man vergl. die Werke über Integralrechnung, z. B. das des Verfassers, Mailand 1895.

Unbestimmte Integrale rationaler Functionen.

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \sqrt{\frac{1}{ab}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x\right),$$ wenn a und b dasselbe Vorzeichen haben,

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{-ab}} \log \frac{x\sqrt{-b}+\sqrt{a}}{x\sqrt{-b}-\sqrt{a}},$$ wenn a und b verschiedene Vorzeichen haben.

$$\int \frac{dx}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{2a} \log \frac{x^2}{a+bx^2},$$

$$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \log \frac{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}},$$ wenn $b^2-4ac>0$ ist,

$$= \frac{2}{b+2cx},$$ wenn $b^2-4ac=0$, und

$$= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}},$$ wenn $b^2-4ac<0$ ist,

$$\int \frac{x^2 dx}{a^6-x^6} = \frac{1}{6a^3} \log \frac{a^3+x^3}{a^3-x^3}.$$

Um das Integral einer rationalen Function zu finden, zerlege man zuerst die Function in elementare Brüche (*siehe die*

Zerlegung rational gebrochener Functionen, Kap. 1, § 6, S. 14 und 15) *und führe dann die Integration aus.*

Die Integration einer rationalen Function $\frac{F(x)}{f(x)}$ lässt sich auf diese Art auf die Integration der Functionen vom Typus (vergl. die eben citirte Stelle)

$$\left.\begin{aligned}&\int \frac{dx}{(x-a)^n}\\ &\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}\,dx\end{aligned}\right\}\quad (n \geqq 1)$$

zurückführen. Dabei bedeutet a eine *reelle* Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ und $x^2 + px + q$ einen Factor mit conjugirt complexen Wurzeln von $f(x) = 0$.

Die erste dieser beiden Functionen wird integrirt, indem man sie mittelst der Substitution $x - a = y$ auf einen der *Grundtypen* (siehe oben) reducirt.

Bei der zweiten setzt man

$$x^2 + px + q = (x-\alpha)^2 + \beta^2,$$

wobei $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ zwei conjugirt complexe Wurzeln von $f(x) = 0$ sind, und erhält so

$$P\int \frac{x-\alpha}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx + (P\alpha + Q)\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

Es ist aber

$$\int \frac{x-\alpha}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,dx = -\frac{1}{2n-2}\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} \text{ für } n > 1$$

$$= \tfrac{1}{2}\log[(x-\alpha)^2+\beta^2)] \text{ für } n = 1$$

und

$$\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} = \frac{x-\alpha}{(2n-2)\beta^2[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} +$$

$$+ \frac{2n-3}{(2n-2)\beta^2}\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} \text{ für } n > 1,$$

$$= \frac{1}{\beta}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\alpha}{\beta} \text{ für } n = 1.$$

Diese Formeln sind Recursionsformeln, aus welchen sich unter allen Umständen die Werthe der linken Seiten ableiten lassen.

Das Integral einer reellen rationalen Function besteht immer lediglich aus den drei folgenden Functionsformen.

1) rationalen Functionen,
2) logarithmischen Functionen,
3) der cyclometrischen Function arc tg.

Durch die Einführung der dritten Form wird das Auftreten complexer Grössen in der Rechnung vermieden.

Integrale irrationaler Functionen.

Die Integrale irrationaler Functionen vom Typus

$$f(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma, \cdots),$$

worin f das Symbol einer *rationalen* Function ist und α, β, γ gebrochene Exponenten sind, werden ermittelt, indem man

$$x = y^\mu$$

setzt und dabei unter μ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller Nenner der Brüche α, β, γ versteht. Auf diese Art wird das Integral in ein solches einer *rationalen Function von y* verwandelt.

Ein Integral vom Typus

$$\int f\left(x, \sqrt{R(x)}\right) dx,$$

worin f das Symbol einer *rationalen* Function zweier Argumente bedeutet und

$$R(x) = a + bx + cx^2$$

ist, wird derart integrirt, dass man

$$\sqrt{R} = y + \sqrt{c}\,x$$

setzt. Daraus folgt

$$x = \frac{y^2 - a}{2(b - \sqrt{c}\,y)}.$$

Bei dieser Methode können complexe Grössen auftreten, wenn c negativ ist; alsdann müssen aber, wenn f für jedes *reelle* x eine *reelle* Function sein soll, *die beiden Wurzeln* α, β *von* $R = 0$ *reell sein*, und man kann dann stets die andere (reelle) Transformation machen:

$$\sqrt{R} = y(x - \alpha),$$

woraus

$$x = \frac{c\beta - \alpha y^2}{c - y^2}$$

folgt.

Durch jede dieser beiden Substitutionen wird die gegebene Function in eine rationale r e e l l e *Function von y verwandelt.* Ueber die Integrale von dem hier betrachteten Typus siehe

Mertens, *Monatshefte* etc., 2, 1891 und Stolz, *Grundzüge* etc., 1, S. 312 u. ff.

Integration binomischer Differentiale.

Unter dem Namen der binomischen Differentiale versteht man Ausdrücke von der Form

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

worin m, n, p *beliebige* Zahlen sind.

1) Wenn p eine ganze positive oder negative Zahl ist, so lässt sich das Integral leicht auf den ersten der oben besprochenen irrationalen Typen zurückführen.

2) Ist $\frac{m+1}{n}$ eine ganze Zahl, so führt die Substitution

$$a + bx^n = y$$

auf das Integral einer rationalen Function.

3) Ist $\frac{m+1}{n} + p$ eine ganze Zahl, so kommt man zu dem Typus einer rationalen Function, wenn man

$$ax^{-n} + b = y$$

setzt.

Bei einer Substitution von der Form $x = \sqrt[q]{R(y)}$, worin R eine *rationale* Function bedeutet, sind die Fälle 1, 2 und 3 die einzigen, in welchen man auf das Integral einer rationalen Function kommt. Kapteiyn, *Bull. de Darboux,* 12, 2. Ser.

In anderen Fällen muss man suchen, durch theilweise Integration das gegebene Integral so zu transformiren, dass einer der obigen Fälle zutrifft. Solche *Reductionsformeln* sind z. B.

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx =$$

$$= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} - \frac{bpn}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}dx =$$

$$= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+pn+1} + \frac{apn}{m+pn+1}\int x^m (a+bx^n)^{p-1}\, dx.$$

Neuere Arbeiten über die Integrale binomischer Differentiale sind von: Hermite, *Ann. di mat.,* 1, 1867, welcher die Integrale von der Form

$$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

untersuchte; ferner von: Cayley, *Messenger,* 11; siehe auch *Bulletin de Darboux,* 10, 2. Serie, 1886; Combescure, ib., 11, 2. Serie, 1887; Kapteiyn, ib., 12, 2. Serie, 1888 etc.

$$\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{x}} = \pm \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{bx}{a}},$$ wenn a und b dasselbe Vorzeichen haben,

$$= \frac{1}{\sqrt{-ab}} \log \frac{a - bx + 2\sqrt{x}\sqrt{-ab}}{a+bx},$$ wenn a und b verschiedene Vorzeichen haben,

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a+bx} = \frac{2\sqrt{x}}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{\sqrt{x}(a+bx)},$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}},$$ wenn $a > 0$ ist,

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}},$$ wenn $a < 0$ ist,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin x,$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \tfrac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),$$

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx = \sqrt{1+x^2} - \log\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x},$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-1} - \arccos\frac{1}{x},$$

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{1-x^2} + \log\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log\left\{x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}\right\},$$ wenn $b > 0$ ist,

$$= \frac{1}{\sqrt{-b}} \arcsin\left(\sqrt{-\frac{b}{a}}\cdot x\right),$$ wenn $b < 0$ ist,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log\left(a+2bx+2\sqrt{b}\sqrt{ax+bx^2}\right),$$ wenn $b > 0$ ist,

$$= \frac{1}{\sqrt{-b}} \arcsin\frac{a+2bx}{-a},$$ wenn $b < 0$ ist.

Integrale trigonometrischer Functionen.

Ein Integral von der Form

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx$$

wird mittelst der Substitution $\sin x = t$ in das *Integral eines binomischen Differentials* verwandelt.

Es besteht ferner die bemerkenswerthe Formel

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \\ + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx.$$

Integrale vom Typus $\int f(\sin x, \cos x) \, dx$, worin f das Symbol einer *rationalen* Function zweier Argumente ist, werden auch durch die Substitution $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ auf das Integral einer rationalen Function gebracht. Diese Substitution ist meistens am bequemsten.

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right),$$

$$\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} \, dx = x \operatorname{tg} \frac{x}{2},$$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\tfrac{1}{4} \sin 2x + \tfrac{1}{2} x,$$

$$\int \sin ax \cos bx \, dx = \frac{1}{b^2 - a^2} \{ b \sin bx \sin ax + a \cos bx \cos ax \},$$

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{a-b} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{a+b}}, \text{ wenn } a > b \text{ ist,}$$

$$= \frac{1}{a} \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \text{ wenn } a = b \text{ ist,}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{\sqrt{b-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{b+a}}, \text{ wenn } a < b \text{ ist,}$$

siehe Lobatto, *Crelle*, 9.

$$\int \frac{dx}{1 - k^2 \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{1 - k^2} \operatorname{tg} x\right).$$

Ueber das Integral $\int \frac{\sin^{m+1} x}{x} \, dx$ siehe Besso, *Giorn. di Batt.*, 7.

Integrale von Functionen mit Logarithmen.

$$\int x^n \log x\, dx = x^{n+1}\left\{\frac{\log x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right\},$$ wenn n von 1 verschieden ist,

$$\int \frac{\log x\, dx}{(a+bx)^m} = -\frac{\log x}{(m-1)\,b\,(a+bx)^{m-1}} +$$
$$+\frac{1}{(m-1)\,ab}\left\{\frac{1}{(m-2)(a+bx)^{m-2}} +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{(m-3)\,a\,(a+bx)^{m-3}} + \cdots + \frac{1}{1\cdot a^{n-3}(a+bx)}\right\} +$$
$$+\frac{1}{(m-1)\,a^{m-1}\,b}\log\frac{x}{a+bx},$$

$$\int \sin(\log x)\,dx = \frac{x}{2}\{\sin(\log x) - \cos(\log x)\},$$

$$\int \cos(\log x)\,dx = \frac{x}{2}\{\sin(\log x) + \cos(\log x)\},$$

$$\int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx = \log x \log(\log x) - \log x,$$

$$\int \log(a+\cos x)\,dx = \frac{1+a\cos x}{a+\cos x}.$$

Ueber die Integrale $\int F(x)\log f(x)\,dx$, worin F und f rationale Functionen bezeichnen, siehe Besso, *Giorn. di Batt.*, 12, 15.

Integrale von Functionen mit Exponentialgrössen.

Eine Function von der Form $f(e^x)$, worin f eine *rationale* Function bezeichnet, wird integrirt, indem man $e^x = y$ setzt; man erhält so das Integral einer rationalen Function von y.

$$\int x^n a^x dx = \frac{a^x x^n}{\log a} - \frac{n a^x x^{n-1}}{\log^2 a} + \frac{n(n-1)\,a^x x^{n-2}}{\log^3 a} - \cdots$$
$$\cdots \pm \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{\log^{n+1} a}\,a^x,$$

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \log\frac{e^x}{1+e^x},$$

$$\int \frac{dx}{ae^{mx}+be^{-mx}} = \frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arc\,tg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right),$$

$$\int \frac{dx}{a + be^{mx}} = \frac{1}{am}\{mx - \log(a + be^{mx})\},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + be^{mx}}} = \frac{1}{m\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{a + be^{mx}} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + be^{mx}} + \sqrt{a}},$$

$$\int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x},$$

$$\int xe^x dx = e^x(x-1),$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx + b \cos bx)}{a^2 + b^2},$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}.$$

$$\int \sqrt{1 + e^{ax}} \, dx = \frac{2\sqrt{1 + e^{ax}}}{a} + \frac{1}{a} \log \frac{\sqrt{1 + e^{ax}} + 1}{\sqrt{1 + e^{ax}} - 1}.$$

Ueber das Integral $\int e^{x^2} dx$ siehe Stieltjes, *Acta math.*, 9, 1886.

Integrale von Ausdrücken mit cyclometrischen Functionen:

$$\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x,$$

$$\int \frac{\arcsin x}{(\sqrt{1-x^2})^3} dx = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \tfrac{1}{2} \log(1-x^2),$$

$$\int \frac{x \arcsin x}{(\sqrt{1-x^2})^3} dx = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \tfrac{1}{2} \log \frac{1-x}{1+x},$$

$$\int \frac{x^2 \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \tfrac{1}{2} \log(1+x^2) - \tfrac{1}{2} (\operatorname{arc\,tg} x)^2,$$

$$\int \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} \operatorname{arc\,tg} x +$$

$$+ \sqrt{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x,$$

$$\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(\sqrt{a+bx^2})^3} dx = \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{a\sqrt{a+bx^2}} - \frac{1}{a\sqrt{b-a}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{a+bx^2}{b-a}},$$

wenn $a < b$ ist,

$$= \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{a\sqrt{a+bx^2}} - \frac{1}{a\sqrt{a-b}} \log \frac{\sqrt{a+bx^2} - \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+bx^2} + \sqrt{a-b}},$$

wenn $a > b$ ist.

Integration durch Reihen.

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx = x - \frac{x^3}{3!\,3} + \frac{x^5}{5!\,5} - \cdots.$$

Die durch diese Reihe definirte Function von x ist eine neue transcendente Function, welche *der Integralsinus* heisst, und mit $Si(x)$ bezeichnet wird. Vergl. Dienger, *Integr.-Rechn.*, 2, S. 311. Ebenso wird die Function $\int \frac{\cos x}{x}\, dx$ *der Integralcosinus* genannt und mit $Ci(x)$ bezeichnet.

$$\int \frac{e^x}{x}\, dx = \log x + x + \frac{x^2}{2!\,2} + \frac{x^3}{3!\,3} + \cdots.$$

Auch diese Function ist eine neue transcendente Function, heisst *der Integrallogarithmus* und wird mit $Li(x)$ bezeichnet. Soldner hat sie untersucht und Tabellen für sie zusammengestellt, *Théorie et tables d'une nouvelle fonct. transcend.*, München 1809; *Monatl. Corr. von Zach*, 23, 1810, S. 182—188; eine spätere Arbeit ist von Bessel, *Arch. f. Naturw. u. Math.*, 1812. Ueber die sämmtlichen Functionen siehe auch Besso, *Giorn. di Batt.*, 6; Schlömilch, *Zeitschr. f. Math.*, 10, 18; Bachmann, *Math. Ann.*, 15; Kronecker, *Vorles. über die Theor. d. einf. und vielf. Integr.*, hrsg. v. E. Netto, Leipzig 1894, S. 199.

Setzt man $x = \log y$, so lässt sich der Integrallogarithmus auch schreiben:

$$\int \frac{dy}{\log y} = \log(\log y) + \frac{\log y}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{\log^2 y}{2!} + \frac{1}{3}\,\frac{\log^3 y}{3!} + \cdots.$$

Mit dem Integrallogarithmus in dieser Gestalt hat sich schon Euler, *Inst. Calc. Int.*, 1, Kap. 4, § 228 beschäftigt; später benutzte ihn Gauss zu der Theorie der sogenannten *Frequenz der Primzahlen* (vergl. Kap. 20, § 1).

$$\int \log(1 - 2\varrho\cos x + \varrho^2)\, dx = -2\sum \frac{\varrho^n}{n^2}\sin(nx), \quad \text{wenn } \varrho < 1 \text{ ist},$$

$$\int \frac{\log(a+bx)}{x}\, dx = \log a \log x + \frac{b}{a}x - \frac{1}{2^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2 + \frac{1}{3^2}\left(\frac{b}{a}\right)^3 x^3 - \cdots$$

$$= \frac{1}{2}(\log bx)^2 - \left(\frac{a}{b}\right)\frac{1}{x} + \frac{1}{2^2}\left(\frac{a}{b}\right)^2\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3^2}\left(\frac{a}{b}\right)^3\frac{1}{x^3} + \cdots.$$

§ 3. Bestimmte und uneigentliche Integrale.

Bestimmte Integrale zwischen 0 *und* 1 *sind:*

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}, \qquad \int_0^1 \sqrt{\log\frac{1}{x}}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\log\frac{1}{x}}} = \sqrt{\pi},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log(\log x)} = 0, \qquad \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2+e\sqrt{\pi}}{4e},$$

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\, dx = -\frac{\pi^2}{12}, \qquad \int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx = -\frac{\pi^2}{6},$$

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}\, dx = -\frac{\pi^2}{8}, \qquad \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,sin} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\log 2,$$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\, dx = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2},$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(\log x)^n\, dx = (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}},$$

$$\int_0^1 \log(\log x)\, dx = -A,$$ worin A die Euler'sche Constante bedeutet, vergl. Kap. 18, § 4,

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\log x} + \frac{1}{1+x}\right) dx = A.$$

Ueber die Integrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}$$

siehe Hermite, *Ann. di mat.*, 3, 1869 und *Bull. des sciences math.*, 1870.

Bestimmte Integrale zwischen 0 *und* $\frac{\pi}{4}$ *oder* 0 *und* $\frac{\pi}{2}$ *oder zwischen* 0 *und* π *sind:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx = \tfrac{1}{2} \log 2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^m x\, dx = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{m+2n+1},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - \sin x \cos \lambda} = (\pi - \lambda) \operatorname{cosec} \lambda,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{p + q \cos x} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - q^2}} \arccos \frac{q}{p}, \text{ wenn } q < p \text{ ist,}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q^2 - p^2}} \log \frac{q + \sqrt{q^2 - p^2}}{q}, \text{ wenn } q > p \text{ ist,}$$

$$= \frac{1}{p}, \text{ wenn } q = p \text{ ist,}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{tg} x\, dx = \infty, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

Ueber den allgemeinern Fall, in welchem die Klammer im Nenner nicht in das Quadrat, sondern in die n^{te} Potenz zu erheben ist, siehe Tortolini, *Crelle,* 34.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{tg} x\, dx = 0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{n(n-2)\cdots 5\cdot 3}, \text{ wenn } n \text{ eine gerade Zahl ist,}$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ wenn } n \text{ ungerade ist,}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right\},$$

Ueber diese und ähnliche Integrale vergl. § 4.

$$\int_0^{\pi} \sin ax \sin bx\, dx = \int_0^{\pi} \cos ax \cos bx\, dx = 0,$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos x} = 0,$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{p+q\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{p^2-q^2}}, \text{ wenn } p^2 > q^2 \text{ ist,}$$

$$= 0, \text{ wenn } p^2 < q^2 \text{ ist,}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{-p+q\cos x} = \frac{-\pi}{\sqrt{p^2-q^2}}, \text{ wenn } p^2 > q^2 \text{ ist;}$$

$$= 0, \text{ wenn } p^2 < q^2 \text{ ist,}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-2\varrho\cos x+\varrho^2} = \frac{\pi}{1-\varrho^2}, \text{ wenn } \varrho^2 < 1 \text{ ist,}$$

$$= \frac{\pi}{\varrho^2-1}, \text{ wenn } \varrho^2 > 1 \text{ ist,}$$

$$\int_0^{\pi} \log(1-2\varrho\cos x+\varrho^2)\,dx = 0, \text{ wenn } \varrho < 1 \text{ ist,}$$

$$= 2\pi\log\varrho, \text{ wenn } \varrho > 1 \text{ ist.}$$

$$\int_0^{\pi} e^{ia\cos x}\,dx = \pi J(a) = \text{ der } \textit{Bessel'schen Function} \text{ mit dem Index Null.}$$ Vergl. Kap. 18, § 9.

Uneigentliche Integrale mit unendlich grossen Grenzen:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\varrho^2 x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\varrho},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos(2px)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-p^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx = n!,$$ wenn n eine ganze Zahl ist,

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} \, dx = \Gamma(n)$$ = der Euler'schen Function 2ter Art (n ist beliebig). Vergl. Kap. 18, § 5.

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{x^2}} \, dx = \sqrt{\pi},$$

$$\int_0^\infty \sin^2 \varrho x \, dx = \int_0^\infty \cos^2 \varrho x \, dx = \infty,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin b x}{\sin a x} \, dx = 0, \quad b < a,$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} \, dx = \frac{\pi^2}{12}, \qquad \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} \, dx = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{2a-1}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} \, dx = \frac{2^{2a} - 1}{4a} B_{2a},$$ worin B eine Bernoulli'sche Zahl bedeutet, vgl. Kap. 18, § 3.

$$\int_0^\infty \frac{\sin \varrho x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}, \text{ wenn } \varrho > 0,$$

$$= 0, \text{ wenn } \varrho = 0,$$

$$= -\frac{\pi}{2}, \text{ wenn } \varrho < 0,$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos \varrho x}{x} \, dx = \infty, \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{tg} \varrho x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos q x}{1 - x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} \sin q,$$

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{1 - \cos p x}{x} \, dx = \frac{1}{2} \log(1 + p^2),$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin a x}{1 + 2\varrho \cos a x + \varrho^2} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{1 + \varrho}, \text{ wenn } \varrho < 1,$$

$$= \frac{1}{2\varrho} \frac{\pi}{1 + \varrho}, \text{ wenn } \varrho > 1,$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos \varrho x}{x\sqrt{x}}\, dx = -\sqrt{2\varrho\pi},$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}-1}{x} + \frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{x} = A - 1,$$

$$\int_0^\infty \left(e^{-x} - \frac{1}{1+x^2}\right)\frac{dx}{x} = -A,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\, dx = A,$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\log x\, dx = -A$$

, worin A die Euler'sche Constante bedeutet, vergl. Kap. 18, § 4,

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin\left(x\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n}\right)\frac{dx}{x} = \frac{n-1}{n}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2-qx}\, dx = e^{\frac{q^2}{4p}}\sqrt{\frac{\pi}{p}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(px^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2p}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(px^2)\, dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\, dx = \pi,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin px}{q^2+x^2}\, dx = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin px}{q^2+x^2}\,\frac{dx}{x^a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos px}{q^2+x^2}\, dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos px}{q^2+x^2}\, dx = \frac{\pi}{q}\, e^{-pq}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin px}{q^2+x^2}\, dx = \pi e^{-pq}.$$

Ueber die allgemeineren Integrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos px}{q^{2n}+x^{2n}}\, dx, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin px}{q^{2n}+x^{2n}}\, dx$$

siehe Bachmann, *Math. Ann.*, 15, S. 428.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{tg} px}{x}\, dx = \pi,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^x} x e^x dx = -A,$$ der Euler'schen Constante.

Ueber das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sin bx} \frac{dx}{1+x^2}$ siehe **Schläfli**, *Acta math.*, 7, 1885 und über $\int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a+b}}$ vergl. **Stieltjes**, *Bull. de Darboux,* 1885.

Eine sehr reiche Sammlung bestimmter Integrale findet man in dem bekannten Buch **Bierens de Haan's**: *Nouvelles tables d'intégr. déf.*, Leiden 1867. Die Tafeln wurden zuerst 1858 in Bd. 4 der *Memoiren der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Amsterdam* veröffentlicht und enthielten etwa 7300 Formeln; in den *Nouvelles tables* sind dagegen 8359 Formeln aufgeführt.

In einer Arbeit desselben Autors, die in Bd. 8 der Amsterdamer Memoiren, 1862 erschien und den Titel: *Exposé de la théorie des propriétés des formules de transf. et des méthodes d'évaluation des intégral. déf.* führt, findet man eine reichhaltige Zusammenstellung von Methoden zur Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale.

Andere Bücher über die bestimmten Integrale sind: **Meyer**, *Vorles. über die Theor. der best. Int.*, Leipzig 1871; **Thomae**, *Einleitung in die Theor. der best. Int.*, Halle 1875; die Vorlesungen von **Kronecker**, Leipzig 1894 und *die bestimmten Integrale* von G. **Brunel** in Bd. 2 der Encycl. d. m. W., S. 135.

§ 4. Die elliptischen Integrale.

(Zum besseren Verständniss dieses Paragraphen und bez. der Bedeutung der vorkommenden Symbole vergleiche man Kap. 16, über die elliptischen Functionen.)

Zwischen den beiden Variabelen x und y bestehe eine algebraische Beziehung

$$f(x, y) = 0$$

und die algebraische Curve, welche durch diese Gleichung dar-

gestellt wird, sei von dem Geschlecht $p = 1$. Vergl. Bd. 2, Kap. 6, § 1. Das Integral

$$\int F(x, y)\, dx,$$

in welchem F das Symbol einer beliebigen *rationalen Function* von x und y ist, und man sich x, y durch die obige Beziehung $f(x, y) = 0$ verbunden zu denken hat, ist ein *allgemeines elliptisches Integral.*

Nimmt man an, f habe die specielle Form

$$y^2 = X_4,$$

worin X_4 ein allgemeines Polynom 4ten Grades in x bedeutet, so kann man dem elliptischen Integral immer die Gestalt

$$\int \frac{R\, dx}{\sqrt{X_4}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

geben, worin R eine beliebige rationale Function von x bezeichnet.

Mittelst einer linearen Substitution der Variabelen, d. h. indem man $x = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$ setzt, lässt sich ein solches Integral immer in der Form

$$\int \frac{R_1\, dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}$$

ausdrücken, worin unter R_1 eine rationale Function von t verstanden wird.

Das Integral (1) *nun kann stets aus einer linearen Combination von algebraischen Functionen und von Integralen von drei verschiedenen Typen zusammengesetzt werden.* Diese drei Fundamentaltypen, von welchen jeder andere charakteristische Eigenschaften hat, kann man in der Legendre'schen Gestalt oder in der Weierstrass'schen darstellen.

Die Legendre'schen Formen der drei Typen sind:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$, die Integrale erster Gattung,

2. $\int \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$, diejenigen zweiter und

3. $\int \frac{dx}{(1 + n x^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}$ die dritter Gattung.

Man kann immer annehmen, in diesen Formeln sei k eine Zahl, deren Modul kleiner als 1 ist.

Setzt man

$$x = \sin\varphi,$$

so erhalten die drei Integrale die Gestalt:

$$1.\quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k,\varphi),$$

$$2.\quad \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = E(k,\varphi),$$

$$3.\quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \Pi(n,k,\varphi).$$

Die Grössen k und φ heissen *der Modul* bez. *die Amplitude* und die Zahl n *der Parameter* des Integrals 3[ter] Gattung.

Mit der Reduction eines allgemeinen elliptischen Integrals auf lineare Combinationen der drei Fundamentalintegrale beschäftigte sich Legendre, *Fonct. ellipt.*, 1, Kap. 4, 5; später Richelot, *Crelle,* 34; Plana, *Crelle,* 36.

Das zweite Integral wird mit dem Buchstaben E bezeichnet, weil sich mit seiner Hülfe der Ellipsenbogen ausdrücken lässt. Siehe Bd. 2, Kap. 17, § 8.

In der Weierstrass'schen Form lauten die drei Typen:

1. $\int_{\infty}^{p} \frac{dp}{\sqrt{4p^3-g_2p-g_3}}$, die Integrale erster Gattung,

2. $\int_{\infty}^{p} p\frac{dp}{\sqrt{4p^3-g_2p-g_3}}$, diejenigen zweiter, welche man mit Z zu bezeichnen pflegt, und

3. $\frac{1}{2}\int_{\infty}^{p} \frac{\sqrt{4p^3-g_2p-g_3}+\sqrt{4q^3-g_2q-g_3}}{p-q}\cdot\frac{dp}{\sqrt{4p^3-g_2p-g_3}}$ die dritter Gattung.

In dem letzten Integral, für welches man das Sympol Π_q benutzt, ist q eine willkürliche constante Grösse. Statt seiner

kann man auch als normales Integral dritter Gattung das sogenannte Klein'sche ansehen (*Math. Ann.*, 27, S. 456):

$$Q = \frac{1}{2}\int\limits_{\infty}^{p} \left\{ \frac{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3} - \sqrt{4q^3 - g_2 q - g_3}}{p - q} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3} - \sqrt{4q_1^3 - g_2 q_1 - g_3}}{p - q_1} \right\} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}},$$

welchem man auch die Gestalt eines Doppelintegrals

$$Q = \int\limits_{u_1'}^{u'} du' \int\limits_{0}^{u} du\, p(u' - u)$$

geben kann, indem man

$$q = p(u'), \quad q_1 = p(u_1')$$

setzt und unter p die sogenannte *Weierstrass'sche p-Function* versteht. Siehe darüber Kap. 16, § 4 oder Pascal, *Funz. ellittiche*, Milano 1896, S. 212.

Die elliptischen Integrale sind ein specieller Fall der Abel'schen. Vergl. Kap. 15, § 4 u. ff. Die charakteristischen Eigenschaften der drei Grundgattungen der elliptischen Integrale sind die folgenden:

Denkt man sich die bestimmte Integralfunction in dem allgemeinsten Sinn, d. h. auch auf den Fall complexer Variabelen ausgedehnt (siehe Kap. 13), *so wird ein Integral* 1ter *Gattung niemals, für keinen Punkt, d. h. für keinen reellen oder complexen Werth von x unendlich gross; ein Integral* 2ter *Gattung dagegen wird nur algebraisch unendlich gross, d. h. derart, dass die Grenze seines Verhältnisses zu einer gewissen algebraischen Function, die in demselben Punkt ebenfalls unendlich gross wird, endlich bleibt. Ein Integral* 3ter *Gattung schliesslich wird nur logarithmisch unendlich gross; d. h. derart, dass die Grenze seines Verhältnisses zu dem Logarithmus einer gewissen algebraischen Function, welche in demselben Punkt unendlich gross wird, endlich bleibt.* Des besseren Verständnisses wegen sehe man Kap. 13 und 15 nach.

Eine wichtige Eigenschaft der elliptischen Integrale ist das sogenannte *Additionstheorem*, welches ein specieller Fall des sogenannten *Abel'schen Theorems* in Bezug auf die allgemeinen Abel'schen Integrale ist. Vergl. Kap. 15, § 8. Für die Integrale 1ter Gattung lautet das Additionstheorem:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} =$$

$$= \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

wenn zwischen den Variabelen x, z, t die algebraische Relation

$$t = \frac{x\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2} + z\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}{1-k^2x^2z^2}$$

besteht.

Dieser Satz stimmt einerseits mit dem Additionstheorem für die elliptischen Functionen $\sin am$, $\cos am$, $\Delta\, am$ (vergl. Kap. 16, § 2) und andererseits mit jener Integration der sogenannten Euler'schen elliptischen Differentialgleichung (vergl. Kap. 8, § 2) überein, deren Resultat die Eigenschaft hat, *algebraisch* zu sein, während die unmittelbare Integration der Gleichung (in welcher die Variabelen getrennt sind) ein *transcendentes* Integral liefern würde.

Für die Weierstrass'schen elliptischen Integrale 1ter Gattung nimmt das Additionstheorem die Form an:

$$\int_\infty^p \frac{dp}{\sqrt{4p^3-g_2p-g_3}} + \int_\infty^q \frac{dq}{\sqrt{4q^3-g_2q-g_3}} = \int_\infty^r \frac{dr}{\sqrt{4r^3-g_2r-g_3}},$$

wenn zwischen p, q, r die Relation besteht:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ \sqrt{4p^3-g_2p-g_3} & \sqrt{4q^3-g_2q-g_3} & \sqrt{4r^3-g_2r-g_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Die ersten Untersuchungen über dieses Theorem waren von Euler, *Novi Comm. Petrop.*, 1761, 6, 7. Später erschien eine Arbeit von Lagrange, *Misc. Taur.*, 4, 1766, 1769 und eine zweite von Euler, *Acta Acad. Imp. Sc.*, 1778. Wir erwähnen noch: Richelot, *Crelle*, 23, 44; Liouville, *Compt. Rend.*, 1856, worin eine elegante Methode C. Sturm's zur Integration der elliptischen Differentialgleichung besprochen wird, und Schellbach, *Crelle*, 54. Historische Angaben findet man in Genocchi, *Bollettino di Boncompagni*, 3, 1870.

Das Additionstheorem für das elliptische Integral 2[ter] Gattung hat Legendre, *Fonct. ellipt.*, 1 aufgestellt. Es lautet:

$$E(k, \varphi) + E(k, \psi) - E(k, \chi) = k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\chi,$$

wenn zwischen φ, ψ, χ eine Relation besteht, die man aus der oben angegebenen erhält, falls, wie gewöhnlich,

$$x = \sin\varphi, \quad z = \sin\psi, \quad t = \sin\chi$$

gesetzt wird.

Auch das Additionstheorem für die elliptischen Integrale 3[ter] Gattung ist von Legendre a. a. O.:

$$\Pi(u, k, \varphi) + \Pi(u, k, \psi) - \Pi(n, k, \chi) =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{(1+n)(k^2+n)}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sin\varphi \sin\psi \sin\chi \sqrt{n(1+n)(k^2+n)}}{1 + n\sin^2\chi - n\sin\varphi \sin\psi \cos\chi \,\Delta\chi}\right),$$

wenn man $\Delta\chi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\chi}$ *setzt.*

Will man in dem Gebiet der reellen Grössen bleiben, so muss diese Formel modificirt werden, wenn n negativ und kleiner als 1 ist. Man kann auf diese Art eine Formel erhalten, in welcher auf der rechten Seite direct ein *Logarithmus* auftritt. Sollen dagegen imaginäre Grössen eingeführt werden, so drücke man den arc tg durch einen Logarithmus aus mittelst der Gleichung

$$\operatorname{arc\,tg} \omega = \frac{1}{2i} \log \frac{i - \omega}{i + \omega}.$$

Die Ausdrücke

$$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$F\left(k', \frac{\pi}{2}\right), \quad k' = \sqrt{1 - k^2},$$

in welchen die Integrationswege als *geradlinig* angenommen werden, heissen bez. *vollständige Legendre'sche Integrale* 1[ter] Gattung und werden mit den Symbolen K, K' bezeichnet. Vergl. Kap. 16, § 2.

Aehnlich heissen

$$E\left(k, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$E\left(k', \frac{\pi}{2}\right), \quad k' = \sqrt{1 - k^2}$$

vollständige Integrale 2[ter] *Gattung* und werden mit E, E' bezeichnet.

Es ist (über die Symbole $\sin am v$, $\cos am v$, $\Delta am v$ vergl. Kap. 16)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \int_0^K \log \sin am v \, dv = \frac{1}{2} K \log \frac{1}{k} - \frac{\pi}{4} K',$$

$$\int_0^K \log \cos am v \, dv = K \log \sqrt{\frac{k'}{k}} - \frac{1}{4} \pi K',$$

$$\int_0^K \log \Delta am v \, dv = \frac{1}{2} K \log k'.$$

Roberts, *J. de Liouville,* 1. Ser., 19, 1854; Schlömilch, *Zeitschr. f. Math.*, 2, 1857; Genocchi, ib.; Sylvester, *Phil. Mag.*, 1860; Brioschi, *Ann. di mat.*, 1. Ser., 3, 1860 und Wangerin, *Schlömilch's Zeitschr.*, 34.

Reihenentwickelungen für die Integrale K und E sind:

$$K = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots \right\},$$

$$E = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \cdots \right\}.$$

Andere Entwickelungen für den Fall, in welchem k der Einheit sehr nahe kommt, findet man bei Legendre, *Mém. de Paris,* 1780; *Fonct. ellipt.*, 1 und Schlömilch, *Schlömilch's Zeitschr.*, 2, S. 49.

Zwischen den bestimmten Integralen K, K', E, E' bestehen die Beziehungen

$$\frac{\partial K}{\partial k} = -\frac{K}{k} + \frac{E}{kk'^2}, \qquad \frac{\partial K'}{\partial k} = \frac{kK'}{k'^2} - \frac{E'}{kk'^2},$$

$$\frac{\partial E}{\partial k} = -\frac{K}{k} + \frac{E}{k}, \qquad \frac{\partial E'}{\partial k} = \frac{kK'}{k'^2} - \frac{KE'}{k'^2}$$

$$KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}$$ (die Legendre'schen Beziehungen).

Eine vollständige Theorie der Grössen K, K', E, E' findet man bei Glaisher, *Quart. J.*, 20, 1885. Ueber die Gestalt, welche diese Formeln im Fall der Weierstrass'schen elliptischen Integrale annehmen, siehe Kap. 16, § 3.

Die Integrale 2ter und 3ter Gattung lassen sich durch die elliptischen ϑ- oder σ-Functionen ausdrücken, wenn man das Integral 1ter Gattung zum Argument nimmt. Vergl. Kap. 16.

Diese Formeln werden für die Weierstrass'schen Integrale sehr einfach:

Setzt man nämlich

$$u = \int_{\infty}^{p} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}},$$

so wird

$$Z = -\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)},$$

$$\Pi_q = \log \frac{\sigma(u)}{\sigma(u - u_1)} - \frac{\sigma'(u_1)}{\sigma(u_1)} u,$$

$$Q = \log \frac{\sigma(u - u_1)}{\sigma(u - u_2)},$$

wenn

$$q = p(u_1), \quad q_1 = p(u_2) \text{ ist.}$$

Die Landen'sche Transformation, *Phil. Trans.*, 1771, 1775 kann zur angenäherten Berechnung der elliptischen Integrale erster Gattung dienen (siehe Kap. 16, § 6, die Transformation der elliptischen Functionen).

Man erhält:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{1}{1 + k'} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - k'}{1 + k'}\right)^2 \sin^2 \varphi}},$$

worin

$$\left.\begin{aligned} \sin \varphi_1 &= \frac{(1 + k') \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \\ \cos \varphi_1 &= \frac{1 - (1 + k') \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned}\right\} (\varphi_1 > \varphi) \text{ ist.}$$

Ist $k < 1$, so ist der Modul des zweiten Integrals, d. h.

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'},$$

kleiner als k; bei wiederholter Anwendung dieser Formel kommt man daher schliesslich zu einem Integral mit sehr kleinem Modul und sehr grosser Amplitude. Verfährt man dagegen umgekehrt, so erhält man ein elliptisches Integral, dessen Modul beliebig nahe an 1 liegt und dessen Amplitude sehr klein ist.

Bezeichnet man mit $k_1, k_2, \cdots$ die successiven transformirten Moduln, mit $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ die successiven Amplituden und mit K, wie gewöhnlich (vergl. Kap. 16), das vollständige

(complete) Integral Legendre's, d. h. den **Werth von** F, wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist und die Integration auf directem, also geradlinigem Wege ausgeführt wird, so erhält man

$$K = \frac{\pi}{2}(1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\cdots,$$

$$F(\varphi, k) = \frac{2K}{\pi}\frac{\varphi_r}{2^r},$$

als Annäherungsformel für ein hinreichend grosses r.

Zur Berechnung der Grössen φ_r kann man die Recursionsformeln benutzen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) &= \cos\vartheta \operatorname{tg}\varphi, & \sin\vartheta &= k,\\ \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) &= \cos\vartheta_1 \operatorname{tg}\varphi_1, & \sin\vartheta_1 &= k_1,\\ \operatorname{tg}(\varphi_3 - \varphi_2) &= \cos\vartheta_2 \operatorname{tg}\varphi_2, & \sin\vartheta_2 &= k_2,\\ &\cdots \end{aligned}$$

Kehrt man dagegen die Landen'sche Transformation um, so ergibt sich die Formel

$$F(\varphi, k) = \sqrt{\frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_r}{k}}\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi_r}{2}\right),$$

in welcher

$$\lambda_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad \lambda_2 = \frac{2\sqrt{\lambda_1}}{1+\lambda_1}, \quad \lambda_3 = \frac{2\sqrt{\lambda_2}}{1+\lambda_2}, \quad \cdots,$$

$$\begin{aligned} \sin(2\psi_1 - \varphi) &= k\sin\varphi,\\ \sin(2\psi_2 - \psi_1) &= \lambda_1\sin\psi_1,\\ \sin(2\psi_3 - \psi_2) &= \lambda_2\sin\psi_2,\\ &\cdots \end{aligned}$$

ist.

Die *Gauss'sche Transformation, Comment. Gotting.*, 4, 1818; *Werke*, 3, S. 333 ist die folgende:

Gibt man dem elliptischen Integral die Gestalt

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}} = \Phi$$

und setzt

$$\begin{aligned} m' &= \frac{m+n}{2}, & n' &= \sqrt{mn},\\ m'' &= \frac{m'+n'}{2}, & n'' &= \sqrt{m'n'},\\ &\cdots \end{aligned}$$

$$\Delta = \sqrt{m^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi},$$
$$\Delta' = \sqrt{mm' \frac{n + \Delta}{m + \Delta}},$$
$$\Delta'' = \sqrt{m'm'' \frac{n' + \Delta'}{m' + \Delta'}},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

so ist

$$\operatorname{tg} \mu \Phi = \operatorname{tg} \varphi \frac{\Delta' \Delta'' \Delta''' \cdots}{m m' m'' \cdots}$$ (Jacobi, *Fundamenta nova*, § 38; *Werke*, 1, S. 152),

worin μ die gemeinschaftliche Grenze bezeichnet, gegen welche die Grössen $m^{(r)}$ und $n^{(r)}$ convergiren (das sogenannte Gauss'sche arithmetisch-geometrische Mittel, siehe Kap. 1, § 7, die Grenzen).

Bei der Gauss'schen Transformation reducirt sich die Berechnung des Integrals einfach auf:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\varphi'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\mu^2 \cos^2 \varphi + \mu^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\varphi'}{\mu},$$

worin μ das genannte arithmetisch-geometrische Mittel und φ' die Grenze der Grössen φ, φ_1, φ_2, $\cdots$ bedeutet, welche durch die Formeln

$$\sin \varphi = \frac{m \sin \varphi_1}{m' \cos^2 \varphi_1 + m \sin^2 \varphi_1},$$
$$\sin \varphi_1 = \frac{m \sin \varphi_2}{m'' \cos^2 \varphi_2 + m' \sin^2 \varphi_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

bestimmt werden.

Ueber die Gauss'sche Transformation siehe auch Borchardt, *Crelle*, 58; *Berl. Monatsber.*, 1876.

Das erste sehr umfangreiche Werk war von Legendre, *Traité des fonctions ellipt.* etc., Paris 1825—1828. Man beachte jedoch, dass Legendre *elliptische Functionen* nannte, was wir jetzt elliptische *Integrale* nennen; den Namen *elliptische Functionen* hat Jacobi und Abel für andere Functionen benutzt.

Ueber die elliptischen Integrale gibt es eine ausgedehnte Literatur; alle Bücher, welche von den elliptischen Functionen handeln, beschäftigen sich selbstverständlich auch mit diesen Integralen. Wir verweisen daher auf die betreffenden Angaben in Kap. 16.

§ 5. Die mehrfachen Integrale.

Es sei eine Function z zweier Variabelen x, y gegeben und in einem begrenzten ebenen Gebiete überall bestimmt; wir wollen diese Ebene in beliebig gewählte Flächenstücke zerlegen und in einem jeden derselben, die

$$\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n$$

heissen mögen, willkürlich einen Punkt auswählen, in dem f_r als Werth der Function z berechnet sei; alsdann bilden wir die Summe

$$\sum f_r \sigma_r$$

und suchen den Grenzwerth dieser Summirung, wenn er existirt, für den Fall, dass alle Flächenstücke $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ unbegrenzt abnehmen, während ihre Anzahl ins Unendlichgrosse wächst.

Wenn eine solche Grenze existirt und von der Auswahl der Werthe f_r, der Wahl der σ und der Art, auf welche diese der Null zustreben, unabhängig ist, alsdann sagt man, diese Grenze sei *das bestimmte Doppelintegral der Function in der gegebenen begrenzten Ebene* und stellt es durch das Symbol

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy$$

dar.

Aehnliche Definitionen gelten für *die dreifachen, vierfachen etc. Integrale.*

Jedes Doppelintegral lässt sich durch zwei aufeinander folgende einfache Integrale ausdrücken, von denen das erste sich auf die eine Variabele bezieht und zwischen Grenzen genommen wird, die Functionen der anderen Variabelen sind, während das zweite sich auf die letztere Variabele bezieht und constante Grenzen hat. Der Beweis dieses Satzes hat eine Controverse zwischen Stolz und Harnack hervorgerufen. Vergl. *Math. Ann.*, 26 und Arzelà, *Acc. Bologna,* 1892.

Eine leicht zu beweisende Formel ist die sogenannte Dirichlet'sche, *Crelle*, 17:

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y)\, dx.$$

Man sehe darüber Andrejewsky, *Math. Ann.*, 4, S. 550.

Das mehrfache Integral sei

$$\int \cdots \int f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n,$$

und man denke sich, die Grössen x seien Functionen von anderen n Variabelen $y_1, y_2, \cdots, y_n$. Will man nun dieses Integral in ein solches transformiren, welches die Variabelen y enthält, so gestalte man zuerst die Function f unter dem Integralzeichen so um, dass nur noch die neuen Variabelen y in ihr vorkommen, und multiplicire sie dann mit der Functionaldeterminante der früheren Variabelen x in Bezug auf die neuen y. Theorem über die Transformation der mehrfachen Integrale von Jacobi, *De determ. funct.*, *Crelle*, 12, 22; *Werke*, 3. Für $n = 2$ hatte schon Euler, für $n = 3$ Lagrange die Transformation ausgeführt. Bemerkungen über diesen Satz findet man bei Kronecker, *Crelle*, 72 und *Vorlesungen zur Theorie der Integr.*, Leipzig 1894, S. 235.

Es lässt sich immer eine Function F von x und y derart finden, dass der Werth des in einer gegebenen begrenzten Ebene bestimmten Doppelintegrals

$$\int\int f(x, y)\, dx\, dy$$

nur von den Werthen abhängt, welche die Function F in der Umgrenzung der gegebenen Ebene und nicht in den Punkten in ihrem Inneren annimmt.

Die Function F wird durch die Relation

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = f(x, y)$$

definirt; die Transformationsformel lautet dann

$$\int\int_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_s F(x, y)\, dy,$$

wobei das Doppelintegral auf der linken Seite über die einfach zusammenhängende begrenzte Ebene A (vergl. Bd. 2, Kap. 18) und das Integral auf der rechten Seite über die Begrenzung s dieser Ebene zu erstrecken ist; d. h., bei der Bildung des Integrals sollen nur solche Werthepaare x, y berücksichtigt werden, welche der Gleichung der Begrenzungscurve s genügen.

Sind zwei Functionen F, F_1 von x und y gegeben, so erhält man ähnlich die Green'sche Formel (1828):

$$\int\int_A \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_s (F\, dy + F_1\, dx).$$

Wir bemerken, dass sich jeder Function die Form $\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$ geben lässt, und dass man, wenn $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ ist, aus dieser Formel ein Cauchy'sches Theorem ableiten kann. Vergl. Kap. 13, § 5.

Für den Fall dreier Variabelen und dreifacher Integrale gilt die Formel

$$\iiint_R \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint_\sigma (X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma)\, d\sigma,$$

worin die erste Integration über einen einfach zusammenhängenden *Körper* R (vergl. Bd. 2, Kap. 18) und die zweite über die diesen Körper begrenzende *Fläche* σ zu erstrecken ist und α, β, γ die Richtungswinkel der Normalen zu dieser Fläche angeben. Diese Formel rührt von Stokes her, *Cambridge, Univ.-Kalender,* 1854; über andere Erweiterungen der Green'schen Formel siehe Thomson und Tait, *Treatise on nat. phil.,* 1, S. 167, 2. ed.; C. Neumann, *Zeitschr. für Math.,* 12, S. 117 und Beltrami, *Acc. Bol.,* 8, 2. ser., 1868.

Eine wichtige Arbeit über die Doppelintegrale, speciell die *uneigentlichen* Doppelintegrale ist von C. de la Vallée-Poussin, *Journ. d. math.,* Paris 1892. Wir citiren noch in Betreff der Doppelintegrale den *Cours d'analyse* von Jordan, die *Vorlesungen* von Kronecker, Leipzig 1894 und den eben erschienenen Bd. 3 der *Grundzüge* etc. von Stolz: *Die Lehre von den Doppelintegralen,* Leipzig 1899, Teubner.

§ 6. Bedingungen für die Integrirbarkeit der linearen Differentialformen. Integrirende Factoren und Multiplicatoren.

Ein in den ersten Differentialen von n Variabelen homogener ganzer rationaler Ausdruck mit Coefficienten, welche Functionen dieser Variabelen sind, heisst *eine Differentialform erster Ordnung.* Wenn die Differentiale $dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$ darin linear auftreten, heisst die Form *linear* und hat daher den Typus

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \cdots + X_n\, dx_n,$$

worin die X Functionen der x sind.

Es handelt sich nun um die Lösung des Problems: Wann ist eine lineare Differentialform das genaue totale Differential einer Function der x?

Die $\frac{n(n-1)}{2}$ *nothwendigen und ausreichenden Bedingungen hierfür sind*

$$\frac{\partial X_r}{\partial x_s} = \frac{\partial X_s}{\partial x_r}.$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so verfährt man, um die Function zu ermitteln, von welcher die gegebene Differentialform das totale Differential ist, auf die folgende Art: Man sucht den Werth des Integrals

$$\int X_1\, dx_1,$$

indem man nur x_1 als variabel ansieht, die übrigen x dagegen als Constante; von der so erhaltenen Function $L_1(x_1, x_2, \cdots x_n)$ bildet man das totale Differential und zieht es von dem gegebenen ab; man findet so ein neues totales Differential, welches einen Term und eine Variabele weniger enthält, also nur die Variabelen $x_2, x_3, \cdots, x_n$. Verfährt man mit diesem neuen Differential, wie mit dem früheren, so kommt man zu einer Function $L_2(x_2, x_3, \cdots, x_n)$ und schliesslich zu n Functionen

$$L_1, L_2, \cdots, L_n,$$

von welchen die erste alle Variabelen enthält, die zweite alle mit Ausnahme der ersten, die dritte alle von x_3 bis x_n u. s. w. *Die Summe*

$$L_1 + L_2 + \cdots + L_n + \text{Const.}$$

ist das gesuchte Integral.

Jedes totale Differential, bei welchem n gleich 2 ist, lässt sich durch Multiplication mit dem Factor μ, einer Function der beiden Variabelen, auf ein genaues Differential zurückführen (vergl. Kap. 8, § 2, *der integrirende Factor).*

Für $n = 3$ kann das Differential

$$X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + X_3\, dx_3$$

durch Multiplication mit einem Factor auf ein genaues Differential gebracht werden, wenn die Beziehung

$$X_1\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_2}\right) + X_2\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_3}\right) + X_3\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1}\right) = 0$$

besteht.

Soll für $n > 3$ ein Factor, welcher das gegebene Differential genau macht, existiren, so müssen

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Beziehungen bestehen, die der obigen ähnlich sind und aus ihr erhalten werden, indem man einen der Indices unverändert lässt und die übrigen beiden auf jede nur mögliche Art vertauscht.

Es gibt unendlich viele integrirende Factoren; ist μ ein solcher von der Beschaffenheit, dass identisch

$$\mu(X_1 dx_1 + \cdots + X_n dx_n) = d\varphi$$

ist, so hat jeder andere integrirende Factor die Gestalt

$$\mu' = \mu f(\varphi),$$

worin f eine beliebige Function bezeichnet.

Die Kenntniss eines integrirenden Factors hängt von der Integration von partiellen Differentialgleichungen 1[ter] Ordnung ab (vergl. Kap. 8, § 2).

Die Lehre von den integrirenden Factoren hat Euler eingeführt. Neuere Arbeiten über die Integration der genauen linearen Differentialformen und über die integrirenden Factoren sind von De Morgan, *Quart. J.*, 2, 1858; Natani, *Crelle*, 58; Du Bois-Reymond, *Crelle*, 70; *Math. Ann.*, 12; Collet, *Ann. de l'École norm.*, 1. Ser., 7, 1870; Bertrand, *Compt. Rend.*, 83, 1876, S. 1191. Siehe auch das erste Kapitel des Forsyth'schen Werkes, *Theorie of diff. equat.*, 1, Cambridge 1890.

Es seien m lineare Differentialausdrücke von der Form

$$dx_{n-m+1} - \sum_{i=1}^{n-m} X_{n-m+1,\,i}\, dx_i$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$dx_n - \sum_{i=1}^{n-m} X_{n,\,i}\, dx_i$$

gegeben. Wir wollen sie bez. mit $\mu_{11}, \cdots, \mu_{m1}$ multipliciren und ihre Summe bilden, sie darauf mit $\mu_{12}, \cdots, \mu_{m2}$ multipliciren und wieder die Summe bilden u. s. w. und schliesslich sie mit $\mu_{1m}, \cdots, \mu_{mm}$ multipliciren und sie wieder addiren.

Die Bedingungen dafür, dass man auf diese Art m genaue Differentiale erhalten könne, werden durch

$$F_i(F_j\varphi) - F_j(F_i\varphi) = 0, \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n-m)$$

ausgedrückt, worin im Allgemeinen unter F_i die Operation

$$\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=n-m+1}^{n} X_{\lambda i} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \quad \textit{zu verstehen ist.}$$

Die vorstehenden Beziehungen, die für jedes beliebige φ identisch erfüllt sein müssen, zerfallen in die folgenden:

$$F_i(X_{kj}) - F_j(X_{ki}) = 0 \qquad \binom{k = n-m+1, \cdots, n}{i, j = 1, 2, \cdots, n-m}.$$

Die Determinante μ der Coefficienten $\mu_{11}, \mu_{12}, \cdots, \mu_{mm}$

$$\mu = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_{m1} & \cdots & \mu_{mm} \end{vmatrix}$$

heisst der *Multiplicator* des gegebenen Systems von linearen Differentialformen (Lie); vergl. auch die Darstellung in Jacobi's Vorlesungen über Dynamik, herausg. von Clebsch, Berlin 1866.

Es gibt unendlich viele Multiplicatoren und jeder andere ist durch die Formel

$$\mu' = \mu f(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)$$

gegeben.

Eine lineare Differentialform lässt sich im Allgemeinen in eine andere transformiren, die eine Variabele weniger enthält. Dieses Problem führt zu dem sogenannten Pfaff'schen, siehe Kap. 8, § 8.

Setzt man eine Differentialform gleich Null, so ergibt sich eine sogenannte Gleichung totaler Differentiale, von welcher in demselben Kap. 8, § 8 die Rede sein wird. Der Leser findet dort auch Literaturnachweise.

Ueber Sätze, die den hier behandelten analog sind, aber für Differentialformen gelten, die *nicht linear* oder *nicht von der* 1ten *Ordnung* sind, siehe die Arbeiten von Guldberg, die an dem eben angegebenen Ort citirt werden.

§ 7. Die Bedingungen, unter welchen die Ausdrücke mit den Ableitungen einer oder mehrerer Functionen einer Variabelen integrirbar sind.

Es liege eine Function

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(r)})$$

vor, in welcher y eine Function von x ist. Wir wollen fest-

stellen, unter welchen Voraussetzungen sich F *ohne vorherige Kenntniss der Function y von x* integriren lässt, d. h., F die genaue Derivirte einer Function von $x, y, y', \cdots, y^{(r-1)}$ wird.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür besteht darin, dass

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} - \cdots (-1)^r \frac{d^r}{dx^r}\frac{\partial F}{\partial y^{(r)}} = 0$$

sein muss.

Enthält F noch eine zweite Function z und ihre Derivirten, so tritt zu der vorstehenden Bedingung noch eine andere ihr ähnliche hinzu, die man aus dieser erhält, indem man y mit z vertauscht u. s. w.

Dieses Problem steht in Beziehung zur Variationsrechnung. Das Theorem ist von Euler, 1764; der erste aber, welcher es bewies, war der Marquis von Condorcet, *Mém. de l'Ac. d. Paris,* 1765. Spätere Arbeiten sind von Lexell, *Novi Comm. Petrop.,* 15, 16, 1771, 1772; Lagrange, *Leçons sur le calcul des fonct.,* Paris 1806; Poisson, *Mém. de l'Acad. d. Paris,* 12, 1833 etc. Vergl. des Verfassers *Variationsrechnung,* Leipzig 1899, S. 132.

Wir fügen hier die Angabe einiger Lehrbücher über Differential- und Integralrechnung hinzu:

J. A. Serret, *Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung,* deutsch von Harnack, 3 Bde., Leipzig 1885, die 2 ersten Bände in 2. Aufl. bearb. von Bohlmann, 1897, 1899; C. Jordan, *Cours d'analyse* etc.; R. Lipschitz, *Lehrbuch der Analysis,* 2 Bde., Bonn 1877, 1880; M. Pasch, *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung* etc.; Genocchi-Peano, *Differentialrechnung und Anfangsgründe der Integralrechnung,* deutsch von Bohlmann und Schepp, Leipzig 1898, 1899; Harnack, *Elemente der Differential- und Integralrechnung* etc.; Stolz, *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung,* 3 Thle., Leipzig 1893, 1896, 1899; Pascal, *Calcolo infinitesimale,* 3 Thle., Mailand 1895—1897; Gomes Teixeira, *Analyse infinitesimal* (portugiesisch), Porto, 3. Ausg., 1896; Cesàro, *Calcolo infinitesimale,* Napoli 1899. Vergl. auch die *Uebersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimalrechnung von Euler bis auf die heutige Zeit,* von Bohlmann, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, VI, 2.

Kapitel VIII.

Die Differentialgleichungen.

§ 1. Allgemeines.

Eine Beziehung zwischen einer unbekannten Function y, ihren Derivirten nach der unabhängigen Variabelen x bis zur n^{t}ⁿ Ordnung und der Variabelen x selbst wird *eine gewöhnliche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung genannt.*

Wenn m Beziehungen zwischen x, den m Functionen

$$y_1, y_2, \cdots, y_m$$

von x und ihren Derivirten vorliegen, so ist dies *ein System von m gewöhnlichen Differentialgleichungen.*

Die Gleichung oder das System von Gleichungen *integriren oder auflösen* heisst die Function y oder die Functionen y_1, $y_2, \cdots, y_m$ auffinden.

Wenn die unbekannte Function oder die unbekannten Functionen mehrere Variabelen enthalten und eine oder mehrere Beziehungen zwischen ihnen, den Variabelen und den partiellen Derivirten der Functionen bestehen, so ist dies *ein System von Gleichungen mit partiellen Ableitungen (von partiellen Differentialgleichungen).*

Jede Gleichung und jedes System von Gleichungen lässt immer ein Integral zu, wenn man voraussetzt, die auf den linken Seiten der Gleichungen stehenden Functionen seien stetig.

Beweise dieses Theorems findet man bei Cauchy, *Leçons de calcul différentiel et intégral,* redigées par M. Moigno, Tome 2, deutsch von Schnuse, Braunschweig 1846; Briot et Bouquet, *Journ. de l'école polyt.*, 36. Heft; Lipschitz, *Ann. di mat.*, 2; *Lehrbuch der Analysis,* Bd. 2, Bonn 1880; *Bull. de Darboux*, 10; Volterra, *Giorn. di Batt.*, 19; Peano, *Acc. Torino,* 1886; *Math. Ann.*, 37; Arzelà, *Acc. Bologna,* 1896 etc. Man vergleiche neben dem Cauchy'schen Beweis den Existenz-

beweis durch successive Approximation von Em. Picard, *Traité d'analyse,* Bd. 2, S. 291 und Bd. 3, S. 89.

Ein Integral y einer gewöhnlichen Differentialgleichung von der n^{ten} Ordnung heisst *das allgemeine,* wenn es n Constanten $c_1, c_2, \cdots, c_n$ von solcher Beschaffenheit enthält, dass die Functionaldeterminante von $y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}$ in Bezug auf $c_1, c_2, \cdots, c_n$ von Null verschieden ist.

Ein *particuläres* Integral erhält man aus dem *allgemeinen,* indem man den Constanten specielle Werthe beilegt, oder sie durch bestimmte Beziehungen verbindet.

Ein *singuläres* Integral lässt sich aus dem *allgemeinen* auf die beiden vorstehend angegebenen Arten nicht ableiten; man erhält es aus dem allgemeinen, wenn man den Constanten c Werthe ertheilt, die Functionen von x sind.

Wenn eine Differentialgleichung von der n^{ten} Ordnung vorliegt und man eine Beziehung zwischen einer beliebigen Constanten, den x, y und den Derivirten von y bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung findet, so heisst diese Beziehung *ein erstes Integral* der gegebenen Gleichung.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung von der n^{ten} Ordnung lässt n verschiedene erste Integrale zu; löst man eines von ihnen nach der Constanten auf und differenzirt dann, so ergibt sich die gegebene Differentialgleichung, eliminirt man dagegen die Grössen

$$y', y'', \cdots, y^{(n-1)},$$

so erhält man das allgemeine Integral.

Die analogen Definitionen für *partielle Differentialgleichungen* findet man weiter unten in § 7. Ueber die *totalen Differentialgleichungen* siehe § 8.

§ 2. Differentialgleichungen erster Ordnung. Der integrirende Factor. Singuläre Integrale.

Wenn eine gewöhnliche Differentialgleichung 1ter Ordnung auch 1ten Grades in Bezug auf die Derivirte $\frac{dy}{dx}$ ist, so lässt sie sich auf die Form $M dx + N dy = 0$ bringen. Sind M, N Functionen bez. von x allein und von y allein, so hat die Gleichung den Typus derjenigen, *bei welchen sich die Variabelen trennen lassen.* In diesem Fall erhält man das Integral unmittelbar aus der Formel

$$\int M dx + \int N dy = \text{Const.}$$

Wir wollen annehmen, eine Gleichung 1ter Ordnung sei auf die Gestalt gebracht:

$$M\,dx + N\,dy = 0.$$

Wenn dann μ ein Ausdruck von der Art ist, dass

$$\mu M\,dx + \mu N\,dy$$

ein genaues Differential wird, so heisst μ *der integrirende Factor* (Euler), vergl. Kap. 7, § 6. Die Auflösung der Gleichung kann man von der Kenntniss von μ abhängig machen.

Es gibt unendlich viele integrirende Factoren.

Kennt man einen von ihnen μ, so sind alle anderen in der Form

$$\mu f(\varphi)$$

enthalten, in welcher $d\varphi = \mu M\,dx + \mu N\,dy$ ist.

Sind zwei verschiedene μ, μ' bekannt, so liefert ihr Verhältniss, wenn es einer Constanten gleichgesetzt wird, das Integral der Gleichung.

Der integrirende Factor μ genügt der partiellen Differentialgleichung:

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} - \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = 0.$$

Wenn

$$-\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

eine Function nur von x ist, und den Werth $\psi(x)$ hat, so existirt ein integrirender Factor, der eine Function von x allein ist, nämlich

$$\mu = e^{\int \psi(x)\,dx}.$$

Wenn ferner

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

eine Function nur von y ist, und den Werth $\psi(y)$ hat, so gibt es einen integrirenden Factor, der eine Function von y allein ist, nämlich

$$e^{\int \psi(y)\,dy}.$$

Lässt sich

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

auf die Form

$$N\varphi(x) - M\psi(y)$$

bringen, so gibt es einen integrirenden Factor, der das Product einer Function von x allein mit einer Function von y allein ist.

Wenn M, N die Gestalt

$$M = \varphi_1(x)\,\varphi_2(y), \qquad N = \psi_1(x)\,\psi_2(y)$$

haben, so ist ein integrirender Factor $\frac{1}{\varphi_2(y)\,\psi_1(x)}$, *und die Gleichung ist der Art, dass die Variabelen sich trennen lassen.*

Wenn M, N homogene Functionen von demselben Grad sind, also eine homogene Gleichung vorliegt, so ist

$$\frac{1}{Mx + Ny}$$

ein integrirender Factor.

In demselben Fall einer homogenen Gleichung lässt sich dieser Gleichung, wenn man $\frac{y}{x} = z$ setzt, leicht die unmittelbar integrirbare Form geben:

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, z)}{M(1, z) + zN(1, z)}\,dz = 0.$$

Die linearen Gleichungen von der Gestalt

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q,$$

worin P, Q Functionen nur von x sind, werden mittelst der Formel

$$y = e^{-\int P\,dx}\left[\int Q e^{\int P\,dx}\,dx + \text{Const.}\right]$$

integrirt.

Die Gleichungen von der Form

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right),$$

worin die Determinante

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ a', & b' \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, werden auf den Typus der homogenen Gleichungen gebracht, indem man

$$ax + by + c = x', \qquad a'x + b'y + c' = y' \quad \text{setzt.}$$

Verschwindet aber die Determinante, so wird

$$a'x + b'y + c' = m(ax + by + c) + n,$$

und man erhält, wenn man die Variabele x' allein an der Stelle von x einführt, eine Differentialgleichung von der Form, welche die Trennung der Variabelen ermöglicht.

Die Bernoulli'sche Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = Py + Qy^m,$$

in welcher P und Q Functionen von x sind, wird in eine lineare verwandelt, indem man $y^{1-m} = z$ setzt.

Die Gleichung

$$X dx + Y dy + Z(x dy - y dx) = 0,$$

in welcher X, Y, Z homogene Functionen sind, und X, Y überdies denselben Grad haben, wird mittelst der Substitution $y = zx$ in eine Bernoulli'sche umgeformt.

Die Riccati'sche Gleichung lautet

$$\frac{dy}{dx} + by^2 = cx^{m-2}, \quad (b \text{ und } c = \text{Const.}).$$

Setzt man zuerst

$$y = \frac{z}{x},$$

und dann

$$z = \frac{1}{b} + \frac{x^m}{z_1},$$

$$z_1 = \frac{m+1}{c} + \frac{x^m}{z_2},$$

$$z_2 = \frac{2m+1}{b} + \frac{x^m}{z_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

und ist $\frac{m-2}{2m}$ eine ganze Zahl k, so kommt man nach k solchen Substitutionen zu einer Gleichung, in welcher die Variabelen sich trennen lassen, wenn man schliesslich noch

$$z_k \text{ für } x^{km+1}v \quad \text{substituirt.}$$

Macht man dagegen die Substitutionen

$$z = \frac{x^m}{z_1},$$

$$z_1 = \frac{m-1}{c} + \frac{x^m}{z_2},$$

$$z_2 = \frac{2m-1}{b} + \frac{x^m}{z_3},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

und ist $\frac{m+2}{2m}$ eine ganze Zahl k, so erhält man nach k Substitutionen eine Gleichung, deren Variabelen sich trennen lassen, wenn man noch

$$z_k = x^{km-1}v \quad \text{setzt.}$$

Wenn entweder $\frac{m-2}{2m}$ oder $\frac{m+2}{2m}$ einer ganzen Zahl gleich ist, so besteht *das Integral der Riccati'schen Gleichung aus einer endlichen Anzahl von Gliedern.* Ueber die Integration durch unendliche Reihen siehe § 5 dieses Kap.

Mittelst der Substitution

$$y = \frac{1}{b}\frac{d\log z}{dx}$$

verwandelt sich die *Riccati'sche Gleichung* in

$$z'' = bcx^{m-2}z;$$

setzt man darin

$$x^{\frac{m}{2}} = \frac{m}{2\sqrt{bc}}t,$$

so wird

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{m-2}{m}\frac{1}{t}\frac{dz}{dt} - z = 0;$$

diese Gleichung wird *die Riccati'sche Gleichung* 2ter *Ordnung* genannt, s. Königsberger, S. 321.

Poisson gab die Lösung der Riccati'schen Gleichung durch ein bestimmtes Integral, *Journ. de l'éc. polyt.*, Heft 16. Näheres findet man bei Cayley, *Phil. Magaz.*, 36, 1868; Schlaefli, *Ann. di Mat.*, 1; Catalan, *Brux., Ac. sc. Bull.*, 31, 1871; Glaisher, *Quart. Journ.*, 11, 12; Bach, *Ann. de l'Éc. norm.*, (2), 3.

Vergl. die Darstellung bei L. Königsberger, *Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabelen*, 1889, Leipzig, S. 272.

Man nennt eine Gleichung vom Typus

$$\frac{dy}{dx} = P + Qy + Ry^2,$$

worin P, Q, R Functionen von x sind, auch wohl eine *allgemeine Riccati'sche Gleichung*. Sie hat interessante Eigenschaften:

1) lässt sie sich auf den Typus der Bernoulli'schen zurückführen, wenn man ein partikuläres Integral u von ihr kennt und $y = u + v$ setzt, worin v die neue unbekannte Function ist;

2) verwandelt sie sich in eine Gleichung von demselben Typus, wenn man $y = \frac{Az + B}{Cz + D}$ setzt, worin A, B, C, D Functionen von x sind, und z die neue unbekannte Function ist;

3) das anharmonische Verhältniss von vier partikulären Integralen ist constant, d. h. unabhängig von x;

4) mittelst der Substitution

$$y = -\frac{1}{R}\,\frac{d \log z}{dx}$$

wird sie zu einer *linearen* Gleichung 2ter Ordnung.

Die Jacobi'sche Gleichung. Crelle, 24

$$(A + A'x + A''y)(x\,dy - y\,dx) - (B + B'x + B''y)\,dy + (C + C'x + C''y)\,dx = 0$$

reducirt sich mittelst der Substitutionen

$$x = u + \alpha,$$
$$y = v + \beta$$

und bei einer solchen Bestimmung von α und β, dass

$$A + A'\alpha + A''\beta = \frac{C + C'\alpha + C''\beta}{\beta} = \frac{B + B'\alpha + B''\beta}{\alpha} = k \text{ wird,}$$

und k eine Wurzel von

$$\begin{vmatrix} A - k, & A', & A'' \\ B, & B' - k, & B'' \\ C, & C', & C'' - k \end{vmatrix} = 0$$

ist, auf die bereits oben untersuchte Gleichung, in welcher die Coefficienten der Differentiale homogene Functionen sind. Siehe Winckler, *Wien. Ber.*, Bd. 64; vergl. auch Hesse's *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*, 3. von Gundelfinger besorgte Ausg., Leipzig 1877, S. 95.

Eine Gleichung, deren Typus der vorigen ähnlich ist, in welcher jedoch die Coefficienten der Differentiale ganz allgemein rationale Functionen von x und y sind, heisst *Darboux'sche Gleichung;* siehe Darboux, *Bull. des sciences math.*, 2. Serie, Bd. 2.

Die Euler'sche Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} = 0,$$

in welcher

$$f(x) = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$$

ist, hat zum Integral

$$y\sqrt{f(x)} + x\sqrt{f(y)} = C(1 - k^2 x^2 y^2),$$ vergl. Kap. 7, § 4.

Die Gleichungen, welche weder x noch y, sondern nur y' enthalten, werden integrirt, indem man

$$\frac{y - c}{x}, \quad (c = \text{Const.}),$$

an die Stelle von y' substituirt.

Gleichungen vom Typus

$$x = \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) = \varphi'(p)$$

werden integrirt, indem man p aus ihnen und aus

$$y = \int p\varphi'(p)\,dp + \text{Const.}$$ *eliminirt.*

Das Integral der Gleichungen

$$y = \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) = \varphi(p)$$

erhält man durch Elimination von p aus ihnen und aus

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp + \text{Const.}$$

Das Integral der (Monge'schen) Gleichungen

$$y = xf\left(\frac{dy}{dx}\right) + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) = xf(p) + \varphi(p)$$

wird durch Elimination von p gefunden, indem man

$$x = e^{-\int \frac{f'(p)\,dp}{f(p)-p}} \left\{ -\int \frac{\varphi'(p)}{f(p)-p} e^{\int \frac{f'(p)\,dp}{f(p)-p}} dp + \text{Const.} \right\}$$

hinzunimmt.

Die Clairaut'sche Gleichung (Ac. de Paris, 1734)

$$y = xp + \varphi(p), \quad p = \frac{dy}{dx},$$

wird dadurch integrirt, dass man an die Stelle von p eine willkürliche Constante setzt.

Ein singuläres Integral der Clairaut'schen Gleichung erhält man durch Elimination von p aus ihr und der Relation

$$x + \varphi'(p) = 0.$$

Im Allgemeinen muss man, um ein singuläres Integral einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zu erhalten, die linke Seite der Beziehung, welche das allgemeine Integral darstellt, nach der willkürlichen Constanten differenziren, diese Derivirte gleich Null setzen und alsdann die Constante aus ihr und dem allgemeinen Integral eliminiren.

Die so erhaltene singuläre Lösung stellt geometrisch die Einhüllende der dem allgemeinen Integral entsprechenden Curven dar, siehe Bd. 2, Kap. 16, § 6.

Eine Differentialgleichung erster Ordnung, die in Bezug auf y' vom ersten Grade ist, gestattet niemals eine singuläre Lösung.

Nimmt man an, die linke Seite der Differentialgleichung sei algebraisch, rational und ganz in Bezug auf x, y, y', und bezeichnet man die Discriminante der gegebenen Gleichung für die Variabele y' mit Δ, *so muss, wenn eine singuläre Lösung existiren soll, für diese $\Delta = 0$ werden.*

Die singulären Integrale hat zuerst Clairaut (1734) gefunden; später beschäftigte sich Euler, *Ac. de Berlin,* 1756; d'Alembert, *Ac. de Paris,* 1769 und Laplace, ib., 1772 mit ihnen. Darauf folgte eine ausführliche Arbeit von Lagrange, *Mém. de Berlin,* 1774; *Oeuvres,* 4, S. 5. Der letztere Autor hat die *singulären* Integrale *particuläre* genannt; wir verstehen bekanntlich unter dieser Bezeichnung eine andere Art von Integralen.

Von neueren Arbeiten über diesen Gegenstand citiren wir Darboux, *Compt. Rend.,* Bd. 70, 1870; Cayley, *Messenger,*

1872; Casorati, *Ist. Lomb.*, 1874, 1875; *Lincei*, 1876, 1879; *Ann. di mat.*, Bd. 19. Ein Verzeichniss der einschlägigen Arbeiten findet man bei Lia Predella, *Giorn. di Batt.*, Bd. 33.

§ 3. Die linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Die Gleichung vom Typus

$$X_0 y^{(n)} + X_1 y^{(n-1)} + \cdots + X_n y = X_{n+1},$$

in welcher die Functionen X nur die Variabele x enthalten, heisst *eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung;* ist $X_{n+1} = 0$, so heisst sie *homogen*, im anderen Fall *nicht homogen.*

Die homogene lineare Gleichung lässt sich durch die Substitution

$$y = e^{\int z\,dx}$$

in eine solche von der $(n-1)^{\text{ten}}$ *Ordnung umformen, die aber nicht mehr linear ist.*

Kennt man n particuläre Lösungen

$$y_1, y_2, \cdots y_n$$

der homogenen linearen Gleichung von der Beschaffenheit, dass ihre Wronski'sche Determinante von Null verschieden ist, so wird das allgemeine Integral durch

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

gegeben. d'Alembert, *Misc. Taur.*, 3, S. 362; Libri, *Crelle*, 10.

Dem allgemeinen Integral kann man stets diese Form geben.

Das System von Integralen $y_1, \cdots, y_n$ heisst alsdann ein *Fundamentalsystem.*

Wenn man von der homogenen linearen Gleichung der n^{ten} *Ordnung ein particuläres Integral* $y = y_1$ *kennt, so lässt sich durch die Substitution*

$$y = y_1 \int z\,dx$$

die Integration der homogenen Gleichung auf die einer anderen Gleichung von demselben Typus, aber der $(n-1)^{\text{ten}}$ *Ordnung zurückführen.* Lagrange, *Berl. Ak.*, 1775.

Wenn ein Integral y_1 der gegebenen homogenen Gleichung auch eine Lösung der Gleichung

$$n X_0 y^{(n-1)} + (n-1) X_1 y^{(n-2)} + \cdots + X_{n-1} y = 0$$

ist, so heisst y_1 eine *doppelte Lösung* der Gleichung, wie es analog bei der Theorie der algebraischen Gleichungen der Fall

ist. Alsdann reducirt die Substitution $y = y_1 \int dx \int z\, dx$ die gegebene Gleichung auf eine homogene lineare Gleichung von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Wenn das allgemeine Integral einer linearen Gleichung m^{ter} Ordnung einer Gleichung von der Ordnung $n > m$ genügt, so lässt sich die Lösung dieser letzteren von derjenigen der Gleichung m^{ter} Ordnung und einer anderen von der $(n-m)^{\text{ten}}$ Ordnung abhängig machen. Das Libri'sche Theorem, Crelle, 10.

Diese Sätze führen zu den Untersuchungen über die den Systemen linearer Differentialgleichungen gemeinsamen Integrale. Siehe darüber Brassine, Anm. 3 in Bd. 2 der *Analysis* von Sturm; Frobenius, *Crelle,* 76; v. Escherich, *Denkschr. d. Wien. Ak.*, 46; Schlesinger, *Lineare Differentialgleichungen,* Leipzig 1895, 1, S. 42.

Nennt man die n linear unabhängigen particulären Integrale der homogenen Gleichung $y_1, \cdots, y_n$, so wird ihre Wronski'sche Determinante durch die Liouville'sche Formel ausgedrückt:

$$W = Ce^{-\int \frac{X_1}{X_0} dx}.$$

Jede rationale ganze Function der $y_1, \cdots, y_n$ und ihrer Ableitungen, welche bis auf einen Factor unverändert bleibt, wenn man die y durch die Elemente $z_1, \cdots, z_n$ eines anderen Fundamentalsystems ersetzt, ist eine rationale ganze mit einer Potenz von W multiplicirte Function der Grössen $\frac{X_1}{X_0}, \cdots, \frac{X_n}{X_0}$. Das Appell'sche Theorem, *Ann. de l'École norm.*, 2. Ser., 10, S. 400.

Nennt man die linke Seite der linearen homogenen Differentialgleichung P_y und nimmt der Einfachheit wegen an, der erste Coefficient sei 1, indem man die ganze Gleichung mit X_0 dividirt, und ist dann eine Function $F(x)$ derart, dass ihr Product mit P_y die genaue Ableitung eines linearen Ausdrucks mit den Derivirten von y bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, alsdann heisst $F(x)$ der *Multiplicator;* Lagrange, *Misc. Taur.*, 3, S. 179; *Werke,* 1, S. 471; Abel, *Werke,* S. 47; Jacobi, *Crelle,* 32.

Der Multiplicator $F(x)$ genügt der homogenen linearen Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{X_{n-i}}{X_0} z\right) = 0,$$

welche die zur gegebenen Gleichung *adjungirte Differentialgleichung* genannt wird (Lagrange).

Umgekehrt genügt ein Multiplicator dieser Gleichung der gegebenen Gleichung. Der Reciprocitätssatz von Thomé, *Crelle,* 76 und Frobenius, ib.

Die linke Seite der *adjungirten* Differentialgleichung heisst der *adjungirte lineare Differentialausdruck* desjenigen *Differentialausdrucks,* den die linke Seite der gegebenen Gleichung bildet. Die Beziehungen zwischen diesen Differentialausdrücken hat speciell Hesse studirt, *Crelle,* 54; Frobenius, ib., 76, 85; Fuchs, ib., 76 etc. Mit diesen Untersuchungen steht der Beweis eines Theorems von Jacobi in Verbindung, *Crelle,* 17 in Bezug auf die Transformation der zweiten Variation eines bestimmten Integrals. Vergl. Pascal, *Variationsrechnung,* Leipzig 1899, § 20.

Um eine homogene Differentialgleichung mit constanten Coefficienten $a_0, a_1, \cdots, a_n$ integriren zu können, hat man die algebraische (charakteristische) Gleichung

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad \textit{aufzulösen.}$$

Für jede reelle einfache Wurzel α derselben ist

$$y = e^{\alpha x}$$

ein particuläres Integral der gegebenen Gleichung; für jede reelle r-fache Wurzel α der charakteristischen Gleichung sind

$$y = e^{\alpha x},\ y = x e^{\alpha x},\ \cdots,\ y = x^{r-1} e^{\alpha x}$$

r particuläre Integrale der gegebenen, und für jedes Paar complexer Wurzeln $\alpha = m \pm ni$ sind

$$y = \cos(nx)\, e^{mx}, \quad y = \sin(nx)\, e^{mx}$$

zwei particuläre Integrale.

Hat man daher die charakteristische Gleichung aufgelöst, so lassen sich auf diese Art n unabhängige particuläre Integrale aufstellen; mit ihrer Hülfe kann man dann das allgemeine Integral bilden.

Um eine nicht homogene lineare Gleichung zu integriren, löse man die entsprechende homogene Gleichung auf; d. h. diejenige, welche sich aus der gegebenen ergibt, wenn man die rechte Seite gleich Null setzt. Ist das so erhaltene allgemeine Integral

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n,$$

so löse man weiter die folgenden linearen Gleichungen nach den $\frac{dc}{dx}$ auf:

$$\begin{aligned}
&\frac{dc_1}{dx} y_1 + \cdots + \frac{dc_n}{dx} y_n = 0, \\
&\frac{dc_1}{dx} y_1' + \cdots + \frac{dc_n}{dx} y_n' = 0, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\frac{dc_1}{dx} y_1^{(n-2)} + \cdots + \frac{dc_n}{dx} y_n^{(n-2)} = 0, \\
&\frac{dc_1}{dx} y_1^{(n-1)} + \cdots + \frac{dc_n}{dx} y_n^{(n-1)} = \frac{X_{n+1}}{X_0}
\end{aligned}$$

und integrire die sich ergebenden Beziehungen

$$\frac{dc_1}{dx} = \varphi_1(x), \quad \frac{dc_2}{dx} = \varphi_2(x), \quad \cdots, \quad \frac{dc_n}{dx} = \varphi_n(x);$$

auf diese Art findet man die Grössen c, welche Functionen von x sind und, in den Ausdruck für y eingesetzt, das allgemeine Integral liefern. Die Methode der *Variation der Constanten* von Lagrange, *Nouv. Mém. de l'Ac. de Berlin,* 1775; *Werke,* 4, S. 159.

Wenn man ein particuläres Integral der nicht homogenen Gleichung kennt und das allgemeine Integral der entsprechenden homogenen Gleichung, so ist die Summe beider das allgemeine Integral der nicht homogenen Gleichung.

Wenn die gegebene nicht homogene Gleichung constante Coefficienten besitzt und die rechte Seite die Form $Pe^{\lambda x}$ hat, worin P ein Polynom in x vorstellt, so ist

$$Q \cdot x^{\mu} e^{\lambda x}$$

eine particuläre Lösung der nicht homogenen Gleichung. Darin ist μ die Anzahl derjenigen Wurzeln der charakteristischen Gleichung, welche gleich λ sind, sowie μ gleich Null, wenn λ keine Wurzel der charakteristischen Gleichung ist; Q bezeichnet ein Polynom von demselben Grad, wie P, dessen Coefficienten sich bestimmen lassen, indem man den obigen Ausdruck an die Stelle von y setzt und die Bedingungen dafür zum Ausdruck bringt, dass die gegebene Gleichung durch diese Substitution identisch erfüllt ist (siehe Jordan, *Analyse,* Paris 1893, Bd. 3, S. 158).

Kennt man ein particuläres Integral der nicht homogenen Gleichung, so lässt sich die Integration auf diejenige einer anderen linearen Gleichung zurückführen, die von derselben Ordnung aber homogen ist.

[illegible] *particuläres Integral der homogenen* [illegible] *die Integration der nicht homogenen* [illegible] *einer anderen nicht homogenen Gleichung* [illegible] *reduciren.*

[illegible] *Gleichung zweiter Ordnung*

$$y'' + Py' + Qy = X$$

[illegible] *particuläres Integral von*

$$y'' + Py' + Qy = 0$$

[illegible]

$$y_1 y' - y y_1' = z$$

[illegible]

$$z = e^{-\int P\,dx}\left\{\int X y_1 e^{\int P\,dx} + C_1\right\}$$

[illegible] *Integral der gegebenen Gleichung*

$$y = y_1 \int \frac{z}{y_1^2}\,dx + C_2 y_1.$$

[illegible] y_2 *zwei linear unabhängige particuläre Integrale* [illegible] *linearen Gleichung zweiter Ordnung sind, so* [illegible] *Nullpunkte von* y_1 *mit denen von* y_2 *ab; d. h. zwischen* [illegible] *Nullpunkten von* y_1 *existirt immer einer von* y_2 *und ebenso* [illegible] *Nullpunkten von* y_2 *immer einer von* y_1. Das [illegible] von Sturm, *J. de Liouville,* 1, 1836 und führt [illegible] *Oscillationstheorem;* es wurde von Klein erweitert, [illegible] 18, S. 410; autographirte Vorlesungen 1891—94. [illegible] hat sich Bôcher mit ihm beschäftigt, *Bull. of* [illegible] 1898.

[illegible] *Gleichungen von der Form*

$$[\text{illegible}] + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$$

[illegible] *die Substitution*

$$ax + b = e^t$$

[illegible] *der Gleichungen mit constanten Coefficienten bringen.*

Die Laplace'schen Gleichungen haben die Gestalt

$$[\text{illegible}] + (a_1 + b_1 x)\,y^{(n-1)} + \cdots + (a_n + b_n x)\,y = 0.$$

Setzt man

$$a z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = \psi(z),$$

$$b z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n = \varphi(z)$$

und

$$T = \frac{C}{\varphi(t)} e^{\int \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} dt}, \quad C = \text{Const.},$$

so hat ihr allgemeines Integral die Form

$$\left\{C_1 \int_{\beta_0}^{\beta_1} + C_2 \int_{\beta_0}^{\beta_2} + \cdots + C_{n+1} \int_{\beta_0}^{\beta_{n+1}} \right\} e^{xt}\, T\, dt,$$

worin die Grössen C durch eine Bedingung miteinander verbunden sind und die Werthe von β sich bestimmen lassen Siehe Jordan, *Traité d'analyse*, Bd. 3, S. 253.

Der Gleichung

$$k(1-k^2)\frac{d^2(ky)}{dk^2} - (1+k^2)\frac{d(ky)}{dk} + y = 0$$

wird durch die Perioden des elliptischen Jacobi'schen Integrals

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

genügt, wenn man sie als Functionen von k betrachtet. (Siehe die elliptischen Functionen, Kap. 16, § 2.)

Die Gleichung

$$(x^3-1)y''' - 3ax^2y'' + 3a(a+1)xy' - a(a+1)(a+2)y = 0$$

hat zur allgemeinen Lösung

$$y = C_1(x-1)^{a+2} + C_2(x-\varepsilon)^{a+2} + C_3(x-\varepsilon^2)^{a+2},$$

worin ε eine Kubikwurzel aus der Einheit ist.

Das allgemeine Integral der Gleichung

$$y'' = x^2 y$$

ist:

$$y = C_1 \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\, d\lambda}{(1-\lambda^2)^{\frac{3}{4}}} + C_2 x \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\frac{\lambda}{2}x^2}\, d\lambda}{(1-\lambda^2)^{\frac{1}{4}}}$$

(Spitzer, *Grunert's Archiv*, 52).

Die Gleichung

$$y^{(n)} = Ax^2y'' + Bxy' + Cy$$

hat Spitzer untersucht, *Math. Ann.*, 3; *Grunert's Arch.*, 53 und die Lösung durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt.

Die Gleichung

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

in welcher P und Q rationale Functionen von x sind, hat Euler erörtert und der Lösung die Gestalt eines bestimmten Integrals gegeben. Der Fall, in welchem P und Q lineare Functionen von x sind, wurde von Winckler behandelt, *Wien. Berichte*, Bd. 67.

Ueber die Integration von $y^{(n)} = x^m y$ durch bestimmte Integrale siehe Kummer, *Crelle*, 19.

In Betreff der Gauss'schen, Legendre'schen, Bessel'schen und Lamé'schen linearen Differentialgleichungen vergl. den § 5 und Kap. 18, §§ 6, 7, 8, 10.

§ 4. Die Gleichungen von höherer als der ersten Ordnung.

Eine Gleichung vom Typus

$$f(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \quad \text{oder} \quad y^{(n)} = \varphi(y^{(n-1)})$$

liefert, wenn man

$$y^{(n-1)} = p$$

setzt,

$$x = \int \frac{dp}{\varphi(p)} + \text{Const.}$$

Eliminirt man p aus den beiden letzten Beziehungen, so ergibt sich $y^{(n-1)}$ als Function von x; durch successive Quadraturen lässt sich dann y finden.

Die Gleichungen vom Typus

$$y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$$

geben, wenn man

$$y^{(n-2)} = p, \quad y^{(n-1)} = q$$

setzt,

$$\tfrac{1}{2}q^2 = \int f(p)\,dp + \text{Const.},$$

$$x = \int \frac{dp}{q} + \text{Const.}$$

Hat man so zuerst p und dann $y^{(n-1)}$ als Function von x gefunden, so ergibt sich schliesslich y durch successive Integrationen.

Wenn man annimmt, x, y seien lineare Functionen von t und daher $\frac{dy}{dx}$ vom nullten, $\frac{d^2y}{dx^2}$ vom $(-1)^{\text{ten}}$ Grade, und wenn alsdann alle Glieder der Gleichung denselben Grad in Bezug auf t haben, so lässt sich die Ordnung der Gleichung dadurch erniedrigen, dass e^θ für x und ze^θ für y substituirt wird.

Die in Bezug auf die Variabele y und ihre Derivirten *homogenen Gleichungen* werden von niedrigerer Ordnung, wenn

$$y = e^z, \quad \frac{dz}{dx} = u \quad \text{oder} \quad y' = uy \quad \text{gesetzt wird.}$$

Die Gleichungen, in denen x explicite nicht vorkommt, erhalten eine niedrigere Ordnung, wenn man $y' = \frac{dy}{dx} = p$ setzt und y zur unabhängigen Variabelen nimmt.

Legt man der Veränderlichen x die erste Dimension, y die n^{te}, y' die $(n-1)^{\text{te}}, \cdots$, schliesslich $y^{(n)}$ die nullte Dimension bei, und ist dann die Gleichung homogen vom r^{ten} Grad, so verringert sich die Ordnung der Gleichung, wenn man

$$x = e^t, \quad y = e^{rt}\cdot z \quad \text{setzt.}$$

Die Gleichung zweiter Ordnung

$$y'' + Py' + Qy'^2 = 0,$$

in welcher P und Q nur x und y enthalten, kann in den folgenden Fällen auf eine solche 1ter Ordnung erniedrigt werden:

1. Wenn P und Q Functionen nur von x sind. Substituirt man p für $\frac{dy}{dx}$, so ergibt sich eine Bernoulli'sche Gleichung (vergl. § 2).

2. Wenn P und Q Functionen nur von y sind. Wird

$$y' = \frac{1}{x'}, \quad y'' = -\frac{x''}{x'^2}$$

gesetzt, und werden dabei unter x' und x'' die Derivirten von x nach y verstanden, so kommt man auf den vorigen Fall zurück.

3. Wenn P eine Function nur von x und Q eine solche nur von y ist. Ein *erstes Integral* der Gleichung ist dann

$$\log\left(\frac{dy}{dx}\right) + \int P\,dx + \int Q\,dy = \text{Const.}$$

und das allgemeine Integral

$$\int dy\, e^{\int Q\,dy} = c_1 \int e^{-\int P\,dx}\, dx = c_2.$$

In dem dritten Fall heisst die Gleichung *die Liouville'sche.*

§ 5. Die Integration der Differentialgleichungen durch Reihen.

Um eine gewöhnliche Differentialgleichung von der n^{ten} Ordnung durch Reihen zu integriren, verfährt man in der Regel, wie folgt: Man löst die Gleichung nach $y^{(n)}$ auf und ermittelt durch Differentiation der so erhaltenen Beziehung die Werthe von $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}$, $\cdots$ als Functionen von $x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}$. Alsdann legt man

$$y, y', \cdots, y^{(n-1)} \quad \text{für} \quad x = x_0$$

beliebige Werthe bei und bildet die Reihe

$$y = y_0 + (x - x_0)\, y_0' + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\, y_0'' + \cdots.$$

Wenn diese Reihe in einer Umgebung von x_0 convergirt, so stellt sie ein Integral der gegebenen Gleichung dar.

Wenn man ferner den Grössen

$$y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}$$

durchaus willkürliche Werthe beilegt und sich keine Unzuträglichkeiten bei den Werthen von

$$y_0^{(n)}, \; y_0^{(n+1)}, \cdots$$

ergeben, auch die Reihe immer convergent bleibt, so ist das Integral ein *allgemeines;* kann man dagegen den

$$y_0,\ y_0',\ \dots,\ y_0^{(n-1)}$$

keine beliebigen, sondern nur gewisse bestimmte Werthe geben, so stellt die Reihe, wenn sie convergirt, *ein particuläres Integral* dar.

In den Fällen, in welchen das Integral der Riccati'schen Gleichung (§ 2) sich in endlichen Ausdrücken nicht darstellen lässt, kann man unendliche Reihen benutzen.

Betrachten wir *die Riccati'sche Gleichung*

$$y' + y^2 = cx^{m-2}$$

und setzen

$$y = \frac{z'}{z},$$

so wird

$$z'' - cx^{m-2}z = 0;$$

wenn z_1, z_2 zwei particuläre Integrale hiervon sind, so ist das allgemeine Integral der Gleichung

$$y = \frac{z_1' + Cz_2'}{z_1 + Cz_2}.$$

Setzt man nun

$$z = ue^{\int c^{\frac{1}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} dx},$$

so ergibt sich die Gleichung

$$u'' + 2c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}u' + \left(\frac{m}{2} - 1\right)c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{m}{2}-2}u = 0,$$

von welcher sich zwei particuläre Integrale nach aufsteigenden Potenzen von x entwickeln lassen. Sie sind, wenn man n statt $\frac{m}{2} - 1$ schreibt:

$$u_1 = 1 + \sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^r c^{\frac{r}{2}} \frac{n(3n+2)(5n+4)\cdots[(2r-1)n+2(r-1)]}{r!(n+1)^r n(2n+1)(3n+2)\cdots(rn+r-1)} x^{r(n+1)}$$

$$u_2 = x\left\{1 + \sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^r c^{\frac{r}{2}} \frac{(n+2)(3n+4)\cdots[(2r-1)n+2r]}{r!(n+1)^r(n+2)(2n+3)\cdots(rn+r+1)} x^{r(n+1)}\right\}.$$

Die beiden Reihen convergiren für jedes x.

Literatur über die Riccati'sche Gleichung wurde in § 2 angegeben.

Die Gauss'sche Gleichung lautet:

$$y'' + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)} y' - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)} y = 0.$$

Sie hat ein particuläres Integral

$$y_1 = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots,$$

welches convergirt, wenn $|x| < 1$ ist (siehe *die hypergeometrische Reihe,* Kap. 18, § 6).

Die Legendre'sche Gleichung (Kap. 18, § 7)

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

hat die particulären Integrale

$$y_1 = x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)} x^{(n-4)} - \cdots,$$

$$y_2 = x^{-(n+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)} x^{-(n+3)} + \\ + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4(2n+3)(2n+5)} x^{-(n+5)} + \cdots,$$

welche für $|x| < 1$ gelten. Wenn $2n$ eine ungerade positive oder negative Zahl ist, so sind die beiden Integrale nicht unabhängig von einander.

Die Gleichung

$$xy'' + y' + y = 0$$

hat für jedes beliebige x das particuläre Integral

$$y_1 = 1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{1^2\cdot 2^2} - \frac{x^3}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2} + \cdots.$$

Die Bessel'sche Gleichung (Kap. 18, § 9) lautet

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

Eines ihrer particulären Integrale ist

$$x^n\left\{1 - \frac{x^2}{2^2(n+1)} + \frac{x^4}{2!\,2^4\cdot(n+1)(n+2)} - \right. \\ \left. - \frac{x^6}{3!\,2^6(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right\};$$

ein zweites ergibt sich, wenn n mit $-n$ vertauscht wird. Ist n eine ganze Zahl, so sind die durch Vertauschung von n mit $-n$ gewonnenen zwei particulären Integrale nicht unabhängig und genügen daher nicht mehr zur Bildung des allgemeinen Integrals.

Setzt man in der Bessel'schen Gleichung

$$y = t^\alpha \cdot z,$$
$$x = \gamma t^\beta,$$

so verwandelt sie sich in:

$$t^2 z'' + (2\alpha + 1) t z' + (\alpha^2 - \beta^2 n^2 + \beta^2 \gamma^2 t^{2\beta}) z = 0.$$

Auf diese Form lässt sich jede Gleichung vom Typus

$$t^2 z'' + m t z' + (b + c t^\lambda) z = 0$$

zurückführen, wenn man über α, β, γ, n auf geeignete Weise verfügt.

So erhält man für

$$\alpha = \frac{m-1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma^2 = 4q, \quad n = m - 1$$

die Gleichung

$$t z'' + m z' + q t z = 0,$$

von welcher

$$z = 1 - \frac{1 \cdot q}{2!\,(m+1)} t^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot q^2}{4!\,(m+1)(m+3)} t^4 - \cdots$$

ein weiteres particuläres Integral ist ausser demjenigen, welches sich aus der allgemeinen Formel ergeben würde.

Als specieller Fall für

$$2\alpha + 1 = 0, \quad \alpha^2 - \beta^2 n^2 = 0$$

ergibt sich eine Transformation der Riccati'schen Gleichung (siehe oben).

Für $\alpha = \frac{n}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$ erhält man

$$t z'' + (n + 1) z' + \frac{1}{4} z = 0.$$

§ 6. Systeme von simultanen Differentialgleichungen.

Es liege ein System von n Differentialgleichungen vor, welches eine Variabele x, n Functionen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ und die Derivirten dieser Functionen nach x bis zu einer gewissen

Ordnung enthält. Ein solches System wird ein *System simultaner Differentialgleichungen* genannt. Wenn Derivirte von höherer als der ersten Ordnung vorhanden sind, so setze man

$$\frac{dy_1}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{d^2 y_1}{dx^2} = u, \quad \cdots$$

und vereinige diese neuen Gleichungen mit den gegebenen; *auf diese Art wird das System auf ein System von n Gleichungen mit n unbekannten Functionen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ reducirt, welches nur die ersten Derivirten dieser Functionen enthält.*

Ein solches System lässt sich stets integriren, wobei man n endliche Beziehungen zwischen $x, y_1, y_2, \cdots, y_n$ und n willkürliche Constanten erhält.

Löst man diese Beziehungen nach den n Constanten auf, so heissen die linken Seiten der so erhaltenen Gleichungen die n *Integralfunctionen* des vorgelegten Systems.

Aus einem derartigen System kann man $n - 1$ der unbekannten Functionen sammt ihren Derivirten eliminiren und eine gewöhnliche Differentialgleichung von der n^{ten} Ordnung ableiten, die mit n Constanten zu integriren ist. Zu diesem Zweck empfiehlt sich die folgende Methode:

Man löst die Gleichungen nach den Derivirten auf:

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n);$$

differenzirt die erste der vorstehenden Gleichungen nach x, setzt auf der rechten Seite an die Stelle der Derivirten von y ihre durch dieselben vorstehenden Gleichungen gegebenen Werthe und wiederholt dieses Verfahren $(n - 1)$ mal. Man findet

$$y_1', \; y_1'', \; \cdots, \; y_1^{(n)}$$

als Functionen von $x, y_1, y_2, \cdots, y_n$ und durch Elimination von $y_2, y_3, \cdots, y_n$ die Differentialgleichung in y_1.

Kennt man n erste Integrale dieser Differentialgleichung:

$$w_1(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(n-1)}) = c_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w_n(x, y_1, y_1', \cdots, y_1^{(n-1)}) = c_n,$$

und substituirt in sie die vorher gefundenen Werthe von $y_1', y_1'', \cdots, y_1^{(n-1)}$, so erhält man n Beziehungen zwischen $x, y_1, y_2, \cdots, y_n, c_1, c_2, \cdots, c_n$.

Wenn die gegebenen Gleichungen sich nicht nach den ersten Derivirten auflösen lassen, so differenzire man eine jede $(n-1)$ *mal; man erhält* n^2 *Gleichungen zwischen* x *und*

$$\begin{array}{l} y_1,\ y_1',\ \cdots,\ y_1^{(n)}, \\ y_2,\ y_2',\ \cdots,\ y_2^{(n)}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y_n,\ y_n',\ \cdots,\ y_n^{(n)}; \end{array}$$

eliminirt man alsdann die in dem vorstehenden Schema unter der ersten Horizontalreihe stehenden $n(n-1)$ *Grössen, so kommt man zu der Differentialgleichung von der* n^{ten} *Ordnung in* y_1. *Eliminirt man ferner aus einem jeden ihrer ersten Integrale und den* n^2 *obigen Gleichungen die Grössen des vorstehenden Schemas mit Ausnahme derjenigen der ersten Columne, so erhält man eine Beziehung zwischen* x, y_1, y_2, $\cdots$, y_n *und einer Constanten.*

Gibt man den gegebenen Gleichungen die Gestalt

$$\begin{array}{l} dy_1 - f_1\,dx = 0, \\ dy_2 - f_2\,dx = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ dy_n - f_n\,dx = 0, \end{array}$$

so ergibt sich ein System von n *totalen Differentialgleichungen* oder *Pfaff'schen Gleichungen* (§ 8), welches immer mit n Gleichungen integrirbar, oder, wie man sagt, ein *unbeschränkt integrabeles System* ist; das heisst: es lassen sich immer n Systeme von n Functionen von x und y_1, $\cdots$, y_n nämlich

$$\begin{array}{l} \mu_{11},\ \cdots,\ \mu_{1n}, \\ \mu_{21},\ \cdots,\ \mu_{2n}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \mu_{n1},\ \cdots,\ \mu_{nn} \end{array}$$

von der Beschaffenheit finden, dass man durch Multiplication der gegebenen Gleichungen mit ihnen und Summirung der Producte n genaue Differentiale $d\varphi_1$, $\cdots$, $d\varphi_n$ erhält. Die Determinante μ der Grössen μ heisst *der Jacobi'sche Multiplicator.* Für $n = 1$ reducirt er sich auf den gewöhnlichen integrirenden Factor (§ 2).

Der Multiplicator μ *genügt der Relation*

$$\frac{d\mu}{dx} + \mu\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\right) = 0.$$

Wenn man zwei Multiplicatoren kennt, so ist ihr Quotient eine Integralfunction des gegebenen Systems; und umgekehrt ist jede Integralfunction der Quotient zweier Multiplicatoren.

Kennt man einen Multiplicator und eine Integralfunction, so kann man das System in ein anderes transformiren, welches eine Gleichung und eine Variabele y weniger hat, und kann einen Multiplicator des reducirten Systems ausfindig machen.

Sind $n-1$ Integralfunctionen und ein Multiplicator bekannt, so lässt sich das gegebene System auf eine einzige Gleichung zwischen der Function y und der Variabelen x reduciren und von dieser Gleichung ein Multiplicator auffinden. Dies ist *das Jacobi'sche Theorem des letzten Multiplicators.* In Bezug hierauf vergl. man die schon S. 165 citirten Vorlesungen von Jacobi über Dynamik.

Das System von Gleichungen

$$\frac{dy_1}{dx} = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = \alpha' y_1 + \beta' y_2 + \gamma',$$

worin α, β, γ, α', β', γ' Constanten bedeuten, hat zu Integralen

$$y_1 + \lambda_1 y_2 + \mu_1 = C_1 e^{(\alpha+\alpha'\lambda_1)x},$$

$$y_1 + \lambda_2 y_2 + \mu_2 = C_2 e^{(\alpha+\alpha'\lambda_2)x}.$$

Dabei sind λ_1, λ_2 die als verschieden vorausgesetzten Wurzeln der Gleichung 2ten Grades $\beta + \beta'\lambda = \lambda(\alpha + \alpha'\lambda)$ und sind μ_1, μ_2 die entsprechenden Werthe von

$$\mu = \frac{\alpha + \alpha'\lambda}{\gamma + \gamma'\lambda}.$$

Ist $\lambda_1 = \lambda_2$ und mithin auch $\mu_1 = \mu_2$, so hat das eine der Integrale die oben angegebene Form; das andere ist

$$y_2 + \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{(\alpha + \alpha'\lambda_1)^2} = e^{(\alpha+\alpha'\lambda_1)x}(C_2 + C_1\alpha' x).$$

Der Fall, in welchem auf der rechten Seite der gegebenen Gleichungen auch ein Glied auftritt, welches eine Function von x allein ist, wird dadurch erledigt, dass man annimmt, in der vorstehenden Lösung seien C_1, C_2 Functionen von x und alsdann die beiden Differentialbedingungen aufsucht, denen sie genügen müssen *(Variation der Constanten).*

Das System simultaner Gleichungen

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \cdots,$$

worin

$$\begin{aligned}
X &= ax + by_1 + cy_2 + \cdots + e,\\
Y_1 &= a'x + b'y_1 + c'y_2 + \cdots + e',\\
Y_2 &= a''x + b''y_1 + c''y_2 + \cdots + e'',\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

ist, liefert, wenn man jedes der $n+1$ Verhältnisse gleich $\frac{dt}{t}$ setzt, als Integrale $n+1$ Ausdrücke vom Typus

$$t = C_i(\lambda_i x + \mu_i y_1 + \nu_i y_2 + \cdots + h_i)^{\frac{1}{k_i}},$$

worin die Grössen k_i die $n+1$ Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix}
a-k, & a', & a'', & \cdots\\
b, & b'-k, & b'', & \cdots\\
c, & c', & c''-k, & \cdots\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{vmatrix} = 0$$

bezeichnen und die Werthe von $\lambda, \mu, \nu, \cdots, h$ sich aus den Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned}
\lambda_i a + \mu_i a' + \nu_i a'' + \cdots &= \lambda_i k_i,\\
\lambda_i b + \mu_i b' + \nu_i b'' + \cdots &= \mu_i k_i,\\
\lambda_i c + \mu_i c' + \nu_i c'' + \cdots &= \nu_i k_i,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
\lambda_i e + \mu_i e' + \nu_i e'' + \cdots &= h_i k_i.
\end{aligned}$$

Eliminirt man t aus den $n+1$ so erhaltenen Ausdrücken, so findet man n Integrale mit n Constanten, die nicht homogen sind ($n+1$ homogenen).

§ 7. Die partiellen Differentialgleichungen.

Es sei eine Gleichung zwischen $y, x_1, x_2, \cdots, x_n$ und den ersten partiellen Derivirten $p_1, p_2, \cdots, p_n$ von y nach den Variabelen x gegeben. Jede Beziehung $F=0$ zwischen $y, x_1, \cdots, x_n$ und n willkürlichen Constanten, welche derart ist, dass man durch Ermittelung der n Derivirten von y aus ihr und durch Elimination der Constanten wieder auf die gegebene partielle Differentialgleichung zurückkommt, heisst *ein vollständiges Integral der gegebenen Gleichung.*

Ist F ein vollständiges Integral mit den Constanten $c_1, \cdots, c_n$ und setzt man

$$\frac{\partial F}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c_2} = 0, \quad \cdots, \quad \frac{\partial F}{\partial c_n} = 0$$

und eliminirt aus diesen Gleichungen und F alle c, so erhält man *das singuläre Integral.*

Setzt man dagegen eine der Constanten, z. B. a_n einer willkürlichen Function Φ aller übrigen gleich und eliminirt die Constanten aus dem vollständigen Integral F, aus Φ und den $n-1$ Beziehungen:

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial a_n} \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_{n-1}} + \frac{\partial F}{\partial a_n} \frac{\partial \Phi}{\partial a_{n-1}} = 0,$$

so erhält man eine Lösung, in welcher eine willkürliche Function vorkommt, die sogenannte *allgemeine Lösung* oder *das allgemeine Integral.*

Kennt man ein vollständiges Integral, so lassen sich alle übrigen Integrale aus ihm ableiten.

Jede Lösung ist stets in einer dieser drei Gattungen von Integralen enthalten.

Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche in Bezug auf die Derivirten *linear* ist, hat die Form

$$P_1 p_1 + \cdots + P_n p_n = P,$$

worin $P_1, \cdots, P_n, P$ Functionen der unbekannten Function y und der Variabelen $x_1, \cdots, x_n$ bezeichnen und $p_1, \cdots, p_n$ die Derivirten von y nach den Variabelen x sind.

Man bilde nun das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dy}{P},$$

integrire und die n Integrale seien

$$u_1 = \text{Const.}, \cdots, u_n = \text{Const.},$$

worin $u_1, \cdots, u_n$ Functionen von $y, x_1, \cdots, x_n$ sind.

Eine *willkürliche* gleich Null gesetzte *Function* aller u ist alsdann *das allgemeine Integral* der gegebenen Gleichung (die Lagrange'sche Lösung).

Falls die Gleichung in Bezug auf $p_1, \cdots, p_n$ nicht linear sein sollte, so wird die Integration auf diejenige linearer Gleichungen zurückgeführt; die entsprechenden Methoden sind unter dem Namen *der Jacobi'schen* und *der Pfaff'schen Methode* bekannt.

Liegt nämlich die Gleichung

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y, p_1, p_2, \cdots, p_n) = 0$$

vor, so ermittelt man nach Jacobi weitere $n-1$ ähnliche Beziehungen mit $n-1$ Constanten:

$$F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, y, p_1, \cdots, p_n) = a_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_n, y, p_1, \cdots, p_n) = a_{n-1},$$

welche von der Beschaffenheit sind, dass die aus den n Gleichungen sich ergebenden Grössen $p_1, p_2, \cdots, p_n$ die rechte Seite von

$$dy = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

zu einem *genauen Differential* machen, Jacobi, *Crelle*, 60.

Integrirt man alsdann diese Gleichung, so findet man y als Function von x und einer letzten Constanten a_n.

Die Ermittelung der Functionen $F_1, \cdots, F_{n-1}$ hängt von der Integration von Gleichungen mit *linearen* partiellen Derivirten ab; setzt man nämlich

$$\left(\frac{\partial F_m}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial F_m}{\partial x_i} + \frac{\partial F_m}{\partial z} p_i,$$

so ergibt sich F_1 aus der partiellen Differentialgleichung

$$0 = [FF_1] = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right), & \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\right) \\ \frac{\partial F}{\partial p_i}, & \frac{\partial F_1}{\partial p_i} \end{vmatrix}$$

und alsdann F_2 aus den beiden Gleichungen

$$[FF_2] = 0, \quad [F_1F_2] = 0,$$

F_3 aus den drei Gleichungen

$$[FF_3] = 0, \quad [F_1F_3] = 0, \quad [F_2F_3] = 0, \text{ u. s. w.}$$

Von diesen Gleichungen braucht man die allgemeinen Integrale nicht zu kennen, sondern nur irgend welche particuläre. Wir halten uns bei diesen Einzelheiten nicht auf.

Nach der Pfaff'schen Methode dagegen wird die Auflösung der gegebenen Gleichung auf die Lösung des Problems zurückgeführt, n Integrale eines Ausdrucks von der Form

$$X_1 dx_1 + \cdots + X_{2n} dx_{2n} = 0$$

zu finden, in welchem die X Functionen der x bezeichnen.

Von diesem Problem, dem sogenannten Pfaff'schen, wird weiter unten in § 8 die Rede sein. Wir wollen hier nur angeben, in welcher Art sich die Integration der partiellen Differentialgleichung bei ihm gestaltet. Wir betrachten die Gleichung

$$dy - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n - 0 \cdot dp_1 - 0 \cdot dp_2, \cdots, -0 \cdot dp_{n-1} = 0$$

und nehmen an, der Werth der Variabelen p_n, wie er sich aus $F = 0$ ergibt, sei in diese Gleichung substituirt. Man hat dann eine totale Differentialgleichung mit den $2n$ Variabelen y, x_1, $\cdots$, x_n, p_1, $\cdots$, p_{n-1}. Integrirt man sie, wobei sich n Integrale mit n willkürlichen Constanten ergeben, und eliminirt aus diesen n Integralen und aus $F = 0$ die Variabelen p_1, p_2, $\cdots$, p_n, so findet man *das vollständige Integral*. Pfaff hat seine Methode auseinandergesetzt: *Berl. Akad.*, 1814, 1815; später hat sie Jacobi, *Crelle*, 2, 17; *Liouv. J.*, 3 modificirt und vervollkommnet.

Literaturangaben über andere Integrationsmethoden findet man weiter unten.

Die Integration eines *Systems* linearer partieller Differentialgleichungen 1ter Ordnung lässt sich immer auf diejenige eines sogenannten *vollständigen Systems* partieller Differentialgleichungen zurückführen, Clebsch, *Crelle*, 65. Diesen vollständigen Systemen kann man stets die Form der *Jacobi'schen Systeme* geben, deren Theorie in engem Zusammenhang mit der Theorie der totalen Differentialgleichungen steht. Vergl. S. 200.

Die Euler'sche Gleichung

$$a \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + 2b \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + c \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 0$$

hat als allgemeines Integral

$$y = f(x_1 + \lambda_1 x_2) + \varphi(x_1 + \lambda_2 x_2),$$

worin f, φ beliebige Functionen und λ_1, λ_2 die Wurzeln von

$$a + 2b\lambda + c\lambda^2 = 0 \quad \text{bezeichnen.}$$

Ist $\lambda_1 = \lambda_2$, so wird das allgemeine Integral

$$y = f(x_1 + \lambda x_2) + \varphi(x_1 + \lambda x_2)(\gamma x_1 + \delta x_2),$$

worin γ und δ willkürliche Constanten sind.

Für $b = 0$ erhält man die sogenannte Bernoulli'sche Gleichung für *schwingende Saiten*; dabei ist y die Verrückung eines Punktes, dessen Abscisse x_1 ist, und x_2 die Zeit.

Die Laplace'sche Gleichung lautet

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + M \frac{\partial y}{\partial x_1} + N \frac{\partial y}{\partial x_2} + Py + Q = 0,$$

worin M, N, P, Q Functionen der x allein sind.

Ist

$$P - \frac{\partial M}{\partial x_1} - MN = A = 0,$$

so lässt sich die Integration der gegebenen Gleichung auf die von

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + Nu + Q = 0$$

zurückführen, welche keine Ableitung nach x_2 enthält und daher wie eine gewöhnliche Differentialgleichung integrirt werden kann, wenn man die Constante einer beliebigen Function von x_2 gleichsetzt.

Hat man auf diese Art u gefunden und in

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} + My = u$$

substituirt, so integrirt man diese Gleichung in derselben Weise und erhält so y mit zwei willkürlichen Functionen von x_1 allein bez. x_2 allein.

Ist A dagegen nicht Null, so ergibt sich durch die Substitution

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} + My = u$$

eine Gleichung für u von demselben Typus, wie die gegebene, mit welcher man auf die gleiche Art verfahren und untersuchen kann, ob das neue A Null ist u. s. w.

Auf diese Gleichung lassen sich ferner diejenigen reduciren, in denen auch die übrigen zweiten Derivirten von y, jedoch linear, auftreten. Siehe Lacroix, *Calcul intégral;* Imschenetsky, *Grunert's Archiv,* 54 und einen Aufsatz von Boussinesq, *Compt. Rend.,* 74, welcher zuerst diese Reduction gemacht zu haben glaubte; vergl. darüber Serret, *Compt. Rend.,* 74.

Die Liouville'sche Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = e^{2\lambda y}$$

hat das allgemeine Integral

$$y = \frac{1}{2\lambda} \log \frac{f'(x_2)\,\varphi'(x_1)}{[\lambda f(x_2) + \varphi(x_1)]^2},$$

worin f und φ zwei *willkürliche Functionen* von x_2 bez. x_1 sind.

Darboux, *Compt. Rend.*, 1882 hat die folgende Gleichung untersucht:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{m(1-m)}{(x_1 - x_2)^2}\, y.$$

Sie ist ein specieller Fall der Gleichung

$$(x_1 - x_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - \beta' \frac{\partial u}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0;$$

denn, setzt man in der ersten

$$y = (x_1 - x_2)^m u,$$

so erhält man die zweite, wenn in dieser $\beta' = \beta = m$ genommen wird.

Das Integral der zweiten lautet:

$$u = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(\alpha)(x_2 - \alpha)^{-\beta'}(\alpha - x_1)^{-\beta} d\alpha +$$

$$+ (x_1 - x_2)^{1-\beta-\beta'} \int_{x_1}^{x_2} \psi(\alpha)(x_2 - \alpha)^{\beta-1}(\alpha - x_1)^{\beta'-1} d\alpha,$$

worin φ, ψ *willkürliche Functionen* sind.

Das vorstehende Resultat rührt von Appell her, *Bull. de Darboux*, 1882, S. 314. Die Gleichung hat auch Euler untersucht, *Instit. calc. integr.*, Bd. 3, 1. Aufl., Petrop. 1768—1770 und Poisson, *Journ. de l'Éc. polyt.*, 12; weitere Angaben findet man bei Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Bd. 2, Paris 1889, S. 54 und bei Jamet, *Bull. de Darboux*, 1895, S. 208.

Die allgemeinere Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{n}{(x_1 - x_2)}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{m}{(x_1 - x_2)}\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{p}{(x_1 - x_2)^2} u = 0$$

wurde von Laplace behandelt, *Mém. de l'Ac. des scienc.*, 1773; auch sie lässt sich auf die vorige zurückführen; vergl. Darboux a. a. O.

Ueber die Auflösung von

$$\frac{\partial^n y}{\partial x_1^{\,n}} = x_1^{\,m} \frac{\partial^{m+n} y}{\partial x_2^{\,m+n}} + F_1(y) + x F_2(y) + \cdots + x^{m-1} F_m(y)$$

siehe Spitzer, *Grunert's Archiv*, 51, 1870.

Die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}$$

wird von Schläfli, *Crelle*, 72; Le Roux, *Bull. de Darboux,* 1895 besprochen.

Die Literatur über die Differentialgleichungen ist sehr ausgedehnt.

Für den ersten, der sich eingehend mit ihrer Theorie beschäftigt hat, ist Euler zu halten, 1768; spätere sind D'Alembert, Lagrange, Legendre, Cauchy etc.

In der letzten Zeit sind besonders die linearen Differentialgleichungen studirt worden, indem man sie mit der Lehre von den analytischen Functionen und den Transformationsgruppen in Verbindung brachte (siehe Kap. 9). In dieser Richtung ist vor Allen Fuchs zu nennen, *Crelle,* 66, 68 und *Berl. Akad.,* 1884 etc. Weitere Angaben findet man in Kap. 9. Die neueren Arbeiten haben weniger den Zweck die Integrale aufzufinden, als ihr Verhalten in der Nähe eines gegebenen Punktes zu untersuchen.

Einen Abriss der Geschichte der Theorie der linearen Differentialgleichungen findet man in dem wichtigen neueren Buch von Schlesinger, *Theorie d. lin. Differentialgl.,* 2 Bde., Leipzig 1895, 1897, worin auch die Literatur fast vollständig angegeben ist.

Von Werken über die gewöhnlichen und speciell linearen Differentialgleichungen citiren wir ausser dem eben genannten von Schlesinger: Lothar Heffter, *Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabelen,* Leipzig 1894; Leo Königsberger, *Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabelen,* Leipzig 1889; C. Jordan, *Cours d'analyse,* Tome 3; Boole, *A treatise of differential equations,* London 1877, 4. edit.; Forsyth, *Lehrbuch der Differentialgleichungen,* deutsch von Maser, Braunschweig 1889; Forsyth, *Theorie der Differentialgleichungen und das Pfaff'sche Problem*, Leipzig 1893; Craig, New-York 1889; Em. Picard, *Traité d'analyse* etc. Eine neue Arbeit von Helge von Koch, *Öfversigt af K. Akad. Stockholm,* 1899 studirt die Systeme *unendlich grosser Ordnung* von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Mit den partiellen Differentialgleichungen haben sich zuerst D'Alembert und Euler beschäftigt.

Auf sie folgten Lagrange, *Leçons sur le calcul des fonctions*, nouv. édit., Paris 1806; *Théorie des fonctions analytiques*, Paris 1797, 2. Aufl., 1813; *Abh. der Berl. Akad.*, 1772, 1774, 1779, 1785; Laplace, *Mém. de l'Ac. d. Paris*, 1773, 1779; Monge, ib., 1784; *Application de l'analyse à la géométrie* und Andere.

Die ersten Arbeiten über die linearen Gleichungen erster Ordnung sind von Lagrange, Cauchy, Jacobi (*Crelle*, 2, 23, *Werke*, 4).

Die nicht linearen Gleichungen erster Ordnung ferner haben zuerst Lagrange und Charpit in einer der Pariser Academie der Wissenschaften 1784 überreichten aber nicht veröffentlichten Abhandlung untersucht; die Methode wurde in Bd. 2, S. 548 des *Traité du Calcul diff.* etc. von Lacroix reproducirt.

Dann folgen: die Pfaff'sche Methode, *Berl. Ak.*, 1814, 1815, die Methode der charakteristischen Gleichungen von Cauchy, 1819, *Exercises*, 2, 1841; die von Jacobi, *Crelle*, 17, *Liouville*, 3; die neue Methode desselben Jacobi, *Crelle*, 60; die Arbeiten von Mayer, *Math. Ann.*, 3, 5, 6, 8 und von Lie, *Math. Ann.*, 5, 8, 9, 11. Ueber die singulären Auflösungen erschien eine Abhandlung von Darboux, *Mémoires des savants étrang.*, 27, 1883; andere wichtige Arbeiten sind von Ampère, *Éc. polyt.*, Hft. 17, 18; von Clebsch, *Crelle*, 65 und von Kowalewska, *Crelle*, 80. Eine Zusammenstellung der Methoden findet man bei Imschenetsky, *Sur l'intégr. des équat. du 1 ord.*, übersetzt von Hoüel, Paris 1869; ... *du 2 ord.*, Greifswald 1872; *Grunert's Archiv*, 1869, 1872; Graindorge, *Mém. de la Soc. de Liège*, (2), 5, 1872 und schliesslich in den beiden vortrefflichen Werken von Goursat: *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées part. du 1. ordre*, Paris 1891, deutsch von H. Maser, Leipzig 1893; *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Paris 1896, 1898, 2 Bde. und dem Buche von Mansion, *Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Paris 1875, vermehrte deutsche Ausgabe von Maser mit Anhängen von S. v. Kowalewska, Imschenetsky und Darboux, Berlin 1892.

Untersuchungen über die Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen haben Riquier, *Ann. de l'Éc. norm.*, (3), 10, 1893; Königsberger, *Math. Ann.*, 42; Bendixon, *Bull. de la Soc. de France*, 1896 etc. angestellt.

§ 8. Totale Differentialgleichungen. Das Pfaff'sche Problem.

Eine *lineare totale Differentialgleichung* 1ter *Ordnung* ergibt sich, wenn man eine lineare Differentialform 1ter Ordnung gleich Null setzt (vergl. Kap. 7, § 6). Ein *System von totalen Differentialgleichungen* erhält man auf analoge Art aus einem System von Differentialformen. Aus einem Grund, den wir weiter unten angeben, pflegt man eine totale Differentialgleichung auch eine *Pfaff'sche Gleichung* zu nennen.

Es bietet sich naturgemäss das folgende Problem: *Wenn eine oder mehrere totale Differentialgleichungen gegeben sind, solche Beziehungen in endlichen Termen zwischen den Variabelen zu finden, aus denen sich diese totalen Differentialgleichungen ableiten lassen.* Es heisst dies das Problem der *Integration* der gegebenen Gleichungen.

Hier ist nun sofort ein Unterschied zu machen: entweder lässt sich die Integration durch so viele Relationen zwischen den Variabelen ausführen, als gegebene totale Differentialgleichungen vorhanden sind, oder nicht. In dem ersten Fall sagt man, die gegebene Gleichung oder das gegebene System sei *vollständig integrirbar oder unbeschränkt integrabel* (Mayer) oder einfach es sei *vollständig.* Dafür ist es nöthig, dass gewisse Bedingungen erfüllt werden, von denen sofort die Rede sein wird. Der zweite Fall dagegen ist der allgemeine: die Integration lässt sich nicht so ausführen, dass man ebenso viele Beziehungen zwischen den Variabelen erhält, als Gleichungen gegeben sind, sondern die Anzahl der Beziehungen ist grösser; die Ermittlung der kleinsten möglichen Anzahl solcher Relationen ist in diesem Fall ein interessantes Problem.

Erster Fall. Vollständige oder unbeschränkt integrirbare Systeme. Es liege eine einzige totale Differentialgleichung

$$X_1 dx_1 + \cdots + X_n dx_n = 0$$

vor. Damit sie unbeschränkt integrirbar sei, ist es nöthig und genügt, dass ein integrirender Factor existire, d. h. ein Factor, welcher die linke Seite zu einem *genauen* Differential macht. Die Bedingungen hierfür haben wir früher in Kap. 7, § 6 angegeben, wo man auch Literaturnachweise findet.

Ist ein System von m totalen Differentialgleichungen zwischen n Variabelen gegeben, welches man sich *immer* unter der Form

$$dx_{n-m+1} - \sum_{i=1}^{n-m} X_{n-m+1,i}\, dx_i = 0,$$
$$dx_{n-m+2} - \sum_{i=1}^{n-m} X_{n-m+2,i}\, dx_i = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot,$$
$$dx_n - \sum_{i=1}^{n-m} X_{n,i}\, dx_i = 0$$

vorstellen kann, *so ist es nöthig und genügt, um dieses System durch m Integrale integriren zu können, dass*

$$m\,\frac{(n-m-1)(n-m)}{2}$$

Bedingungen erfüllt seien, welche die Gestalt

$$F_i(X_{k,j}) - F_j(X_{k,i}) = 0 \qquad \begin{pmatrix} k = n-m+1, \cdots, n \\ i, j = 1, 2, \cdots, n-m \end{pmatrix}$$

haben. Darin ist F_i das Symbol für die Operation:

$$F_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=n-m+1}^{n} X_{\lambda i} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \quad \text{(vergl. Kap. 7, § 6).}$$

Ist $m = n-1$, so ist das System stets vollständig.

Diesen Bedingungen kann man eine andere Form geben: Wir wollen ein System, wie das folgende

$$F_1(\varphi) = 0,$$
$$F_2(\varphi) = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$F_{n-m}(\varphi) = 0,$$

in welchem die F den vorstehenden Relationen oder den gleichwerthigen

$$F_i(F_j\varphi) - F_j(F_i\varphi) = 0$$

genügen, ein *Jacobi'sches System* von partiellen Differentialgleichungen nennen. Es lässt sich beweisen, *dass ein Jacobi'sches System von $n-m$ Gleichungen mit n Variabelen immer m verschiedene Integrale zulässt.* Daraus folgt:

Die nöthigen und ausreichenden Bedingungen, damit das System von m totalen Differentialgleichungen zwischen n Variabelen durch m Integrale integrirbar sei, bestehen darin, dass das System

$$F_1(\varphi) = 0, \cdots, F_{n-m}(\varphi) = 0 \quad \textit{ein Jacobi'sches sei.}$$

Ueber diese Untersuchungen vergleiche man speciell Deahna, *Crelle*, 20; Natani, *Crelle*, 58, S. 314; Mayer, *Math. Ann.*, 5;

Frobenius, *Crelle*, 82, S. 267, welcher die Integrabilitätsbedingungen in verschiedenen Formen ausgedrückt hat.

Zweiter Fall. Nicht integrirbare Systeme. Wenn für ein gegebenes System die vorstehenden Bedingungen nicht erfüllt sind, so pflegt man das System *nicht integrirbar* zu nennen; man hat darunter aber nur zu verstehen, dass das System *nicht durch m endliche Relationen zwischen den Variabelen integrirbar* ist, wobei nicht ausgeschlossen ist, dass es durch eine grössere Anzahl von Beziehungen integrirt werden kann.

Handelt es sich um *eine einzige Gleichung* und treffen die obigen Bedingungen nicht zu, so lässt sich diese nicht durch ein einziges Integral integriren; *die Gleichung ist aber stets durch* $\frac{n}{2}$ *oder* $\frac{n+1}{2}$ *Integrale integrirbar, je nachdem n (die Anzahl der Variabelen) eine gerade oder ungerade Zahl ist.* Das sogenannte *Pfaff'sche Problem* besteht nun darin, *eine totale Differentialgleichung zwischen n Variabelen durch* $\frac{n}{2}$ *oder* $\frac{n+1}{2}$ *Integrale, welche ebensoviele Constanten enthalten, zu integriren.*

Es sei $X_1 dx_1 + \cdots + X_n dx_n = 0$ die gegebene Gleichung. Wir wollen zuerst annehmen, die Anzahl n der Variabelen sei *gerade*. Wir setzen

$$(i, j) = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}$$

und betrachten die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} X_1, & 0, & (1,2), & (1,3), & \cdots, & (1, n-1) \\ X_2, & (2,1), & 0, & (2,3), & \cdots, & (2, n-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_n, & (n,1), & (n,2), & (n,3), & \cdots, & (n, n-1) \end{vmatrix}.$$

Wir nennen dann

$$\varDelta_1, \varDelta_2, \cdots, \varDelta_{n-1}$$

bez. die Determinanten, welche man aus $\varDelta$ erhält, wenn an die Stelle der $2^{\text{ten}}, 3^{\text{ten}}, 4^{\text{ten}}, \cdots, n^{\text{ten}}$ Columne die aus den Elementen

$$(1, n), (2, n), \cdots, (n-1, n), 0$$

bestehende Columne gesetzt wird. Wir bilden nun das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dx_1}{\varDelta_1} = \frac{dx_2}{\varDelta_2} = \cdots = \frac{dx_{n-1}}{\varDelta_{n-1}} = \frac{dx_n}{\varDelta},$$

welches sich im Allgemeinen durch $n-1$ Beziehungen zwischen den Variabelen $x_1, \cdots, x_n$ und $n-1$ Constanten $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$,

$$y_1(x_1, \cdots, x_n) = y_1,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$y_{n-1}(x_1, \cdots, x_n) = y_{n-1}$$

integriren lässt. Betrachtet man $x_1, \cdots, x_{n-1}$ als Functionen der Variabelen x_n und der neuen Variabelen y und transformirt man von diesem Gesichtspunkt aus das gegebene totale Differential, *so erhält man ein Differential von der Form*

$$Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + \cdots + Y_{n-1} dy_{n-1} = 0,$$

worin die Y die Variabele x_n nicht mehr enthalten.

Wir setzen $y_{n-1}(x_1, \cdots, x_n) =$ Const. und verfahren auf ähnliche Art mit der übrig bleibenden Gleichung von $n - 2$ Termen, welche sich dadurch auf eine solche mit $n - 3$ Termen und Variabelen reducirt; wir setzen wieder eine der neuen Variabelen einer Constanten gleich und reduciren dann das übrig bleibende Differential auf ein solches mit $n - 5$ Termen etc. Fahren wir so fort, so erhalten wir genau $\frac{n}{2}$ Relationen zwischen den x und ebensoviele Constanten; diese $\frac{n}{2}$ Beziehungen sind ihrer Natur nach derart, dass, wenn man aus ihnen $\frac{n}{2}$ der Variabelen als Functionen der übrigen und der Constanten ableitet und sie in die gegebene totale Differentialgleichung einsetzt, diese letztere *identisch erfüllt wird.*

Wenn n eine ungerade Zahl ist, so braucht man nur zuerst eine der Variabelen einer Constanten gleich zu setzen und dann zu verfahren wie oben. Bei der Anwendung dieser Methode müssen, wie man sieht, Systeme von Differentialgleichungen integrirt werden, nämlich ein solches von $n - 1$ Gleichungen, dann eines von $n - 3$, dann von $n - 5$ Gleichungen u. s. f.

Man erhält also, wie ersichtlich, die Lösung des Problems mittelst einer Transformation, welche die gegebene lineare Differentialform (die linke Seite der Gleichung) auf eine solche mit einer Variabelen weniger reducirt. Dies ist der Grund, weshalb man unter dem *Pfaff'schen Problem* auch das Problem in Bezug auf diese Transformation verstehen kann.

Euler hatte es versäumt, den Fall zu untersuchen, in welchem eine totale Differentialgleichung durch eine einzige Gleichung nicht integrirbar ist, da er diese Annahme für widersinnig hielt. Eine klarere Vorstellung hatte Monge; der erste aber, welcher die Theorie begründete, war Pfaff in einem Memoire, das er 1815 der Berliner Akademie vorlegte, *Abh. d.*

Berl. Akad., 1814, 1815, S. 76. Es folgen dann Gauss, *Gött. gel. Anz.*, 1815; *Werke*, 3, S. 231; Jacobi, *Crelle*, 2, 17; Natani, *Crelle*, 58; Clebsch, *Crelle*, 60, 61; Grassmann, *Ausdehnungslehre*, Berlin 1862, §§ 500, 527; Lie, *Arch. for Math. og Nat.*, 2, 1877; Frobenius, *Crelle*, 82; Darboux, *Bull. de Darb.*, 2. Ser., 6. Das Forsyth'sche Buch, *Theor. of diff. equat.*, 1, 1890 beschäftigt sich mit der Darlegung der verschiedenen Methoden. Die Theorie hängt mit derjenigen der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zusammen, vergl. Kap. 8, § 7. Cauchy und Jacobi haben bewiesen, dass es im Falle einer partiellen Differentialgleichung 1ter Ordnung ausreichend ist, das erste Pfaff'sche System zu integriren.

Ueber die Ermittelung der *infinitesimalen Transformationen* (Kap. 9), welche zu einer *Pfaff'schen oder totalen Differentialgleichung* gehören, siehe Lie a. a. O.; Vivanti, *Rend. Palermo*, 12; Weber, ib.; Engel, *Leipz. Berichte*, 1899.

Ueber den Fall, in welchem nicht eine einzige Gleichung, sondern ein System von Gleichungen gegeben ist und man mit der geringsten Anzahl von Integralen integriren will, d. h. also über die Ausdehnung des Pfaff'schen Problems auf den Fall von m Gleichungen, sind die hauptsächlichsten Arbeiten von Imschenetsky, *Grunert's Archiv*, 54, S. 290 (1872); Frobenius, a. a. O., S. 287; Biermann, *Schlöm. Zeitschr.*, 30; Engel, *Leipz. Ber.*, 1889, 1890; vergl. auch Lie, *Transformationsgruppen*, 1, § 128 sowie Kap. 13 des citirten Werkes von Forsyth, endlich Russjan, Odessa 1899 (russisch).

Ein weiteres Problem, das sich bei dieser Theorie darbietet, ist das folgende:

Welche und wie viele Bedingungen sind nöthig, damit sich eine gegebene totale Differentialgleichung durch eine Anzahl von Gleichungen integriren lasse, die grösser als 1 und kleiner als n ist?

Es lässt sich beweisen, *dass, wenn eine gegebene totale Differentialgleichung* durch $n - q$ *Gleichungen integrirbar sein soll,*

$q(2q+1)$ *Bedingungen für gerade* n

und $(q+1)(2q+1)$ *Bedingungen für ungerade* n

erfüllt sein müssen.

Siehe darüber Natani, *Crelle*, 58, S. 325.

Ueber die totalen Differentialgleichungen 1ter *Ordnung*, die die aber *nicht linear* sind, sowie über die totalen Differentialgleichungen 2ter Ordnung gibt es einige neuere Arbeiten von Guldberg, *Ak. v. Christiania*, 1898, 1899; *Compt. Rend.*, 1898.

Kapitel IX.

Die Lehre von den Transformationsgruppen.

§ 1. Gruppen von Punkttransformationen.

Man habe n Variabele $x_1, x_2, \cdots, x_n$ und transformire sie in $x_1', x_2', \cdots, x_n'$ mit Hülfe der Formeln

$$x_i' = f_i(x_1, \cdots, x_n, a_1, \cdots, a_r) \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \qquad (1)$$

worin die f analytische Functionen in einem gewissen Bereich sind.

Jedes System von Werthen a liefert eine *Transformation.* Die Transformation $x_i' = x_i$ heisst gewöhnlich *die identische Transformation oder die Transformation* 1.

Die Ausführung zweier Transformationen nacheinander erzeugt, wie bei der Lehre von den Substitutionen, Kap. 2, *das Product der beiden Transformationen.*

Zwei Transformationen heissen *invers* zu einander, wenn ihr Product die identische Transformation liefert.

Wir wollen annehmen: 1) diese Functionen seien *umkehrbar,* d. h. man könne aus diesen Formeln umgekehrt auch die Variabelen x als Functionen von x' finden; 2) die r Grössen a seien *wesentlich,* d. h. man erhalte, wenn man sie auf alle mögliche Art variirt, ∞^r Transformationen; 3) man komme, wenn die Variabelen x in die x' mit Hülfe einer der obigen Transformationen umgewandelt werden und darauf die x' in x'' mit einer anderen derselben Transformationen (oder mit derselben), immer wieder zu einer in der Formel (1) enthaltenen Transformation. Alsdann sagt man, die ∞^r durch (1) dargestellten Transformationen bilden *eine continuirliche Transformationsgruppe:* sie heisst *continuirlich,* weil man offenbar durch stetige Aenderung der Parameter a von einer Transformation der Gruppe zu einer beliebigen anderen übergehen kann. Die Substitutionsgruppen mit n Elementen (vergl. Kap. 2) sind in diesem Sinn offenbar *discontinuirlich.*

Wenn r endlich ist, so heisst eine solche Gruppe auch eine *endliche r-gliedrige Gruppe.*

Die r Parameter $a_1, \cdots, a_r$ sind wesentlich dann und nur dann, wenn es keine von $x_1, \cdots, x_n$ freie lineare partielle Differentialgleichung

$$\sum_{k=1}^{r} \varphi_k (a_1, \cdots, a_r) \frac{\partial f}{\partial a_k} = 0$$

gibt, welcher die n Functionen $f_1, \cdots, f_n$ sämmtlich genügen.

Sind die f speciell rationale Functionen von x und a und sind auch ihre inversen Functionen rational, so erhält man *Cremona'sche oder birationale Transformationen*, die eine Gruppe bilden (vergl. Bd. 2, Kap. 5 u. 9 dieses Werkes). Für sie gilt das Theorem:

Jede Cremona'sche Gruppe enthält die identische Transformation 1 *und ihre Transformationen lassen sich zu Paaren ordnen, d. h. jeder Transformation lässt sich eine zweite zuordnen, deren Product mit der ersten gleich* 1 *ist (inverse Transformation).*

Nicht alle Gruppen besitzen diese Eigenschaft. Vergl. S. 207.

Bilden alle Transformationen f eine Gruppe, so bilden auch ihre inversen Transformationen eine solche.

Zwei Gruppen heissen *ähnlich,* wenn man von den Formeln der einen zu denen der anderen dadurch übergehen kann, dass man die alten Parameter zu Functionen der neuen und die alten Variabelen zu Functionen der neuen Variabelen macht.

Wenn die Functionen f eine Gruppe bestimmen, so genügen die f_i, als Functionen der a angesehen, gewissen Differentialgleichungen.

Wenn eine eingliedrige Gruppe die identische Transformation enthält, so sind ihre Transformationen untereinander vertauschbar (ihr Product ist unabhängig von der Ordnung der Factoren) und zu je zweien die eine invers zu der anderen; überdies ist jede solche Gruppe der Gruppe der Translationen

$$y_1' = y_1, \cdots, y_{n-1}' = y_{n-1}, \; y_n' = y_n + t \quad \textit{ähnlich.}$$

Die Transformationen dieser Gruppe lassen sich schreiben

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1} \xi_i(x_1, \cdots, x_n) + \frac{t^2}{2!} X(\xi_i) + \frac{t^3}{3!} X(X(\xi_i)) + \cdots,$$

worin das Symbol X gleichbedeutend mit $\sum_1^n \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ ist.

Lässt man t unendlich klein werden, so erhält man eine sogenannte *infinitesimale Transformation.* Sie lautet

$$x_i' = x_i + \frac{\delta t}{1}\,\xi_i + \frac{\delta t^2}{2!}\,X(\xi_i) + \frac{\delta t^3}{3!}\,X(X(\xi_i)) + \cdots.$$

Sie wird durch die Functionen ξ bestimmt, mithin auch durch das Symbol X.

Man kann behaupten:

Jede eingliedrige Gruppe, welche die identische Substitution enthält, bestimmt eine infinitesimale Transformation und wird durch eine solche Transformation bestimmt.

Die r infinitesimalen, durch die Symbole

$$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_r$$

dargestellten Transformationen heissen *unabhängig* von einander, wenn eine Beziehung vom Typus

$$e_1 X_1(f) + e_2 X_2(f) + \cdots = 0,$$

in welcher die Grössen e von den x nicht abhängen und f eine ganz beliebige Function der x ist, nur dann möglich ist, falls sämmtliche e Null sind.

Jede r-gliedrige Gruppe mit der identischen Transformation enthält r und nicht mehr als r unabhängige infinitesimale Transformationen $X_1, \cdots, X_r$, von denen sie erzeugt wird.

Ihre Transformationen lassen sich mittelst der Formeln

$$x_i' = x_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \xi_{ki}(x) + \sum_{kj}^{1,\cdots,r} \frac{\lambda_k \lambda_j}{2!}\, X_k(\xi_{ji}) + \cdots$$

ausdrücken, worin $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ r willkürliche Parameter bezeichnen.

Setzt man symbolisch

$$X_i(X_j f) - X_j(X_i f) = (X_i, X_j) f,$$

so genügen ihre infinitesimalen Transformationen X den Identitäten:

$$(X_i, X_j) f = \sum_{s=1}^{r} c_{ijs} X_s f, \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, r),$$

worin die c constante Coefficienten bedeuten, welche die Relationen

$$c_{ijs} + c_{jis} = 0,$$

$$\sum_{s=1}^{r}(c_{ijs}c_{shk} + c_{jhs}c_{sik} + c_{his}c_{sjk}) = 0$$

erfüllen.

Und umgekehrt: *Stehen r unabhängige infinitesimale Transformationen paarweise in der Beziehung*

$$(X_i X_j) f = \sum_{s=1}^{r} c_{ijs} X_s f, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, r),$$

worin die c_{ijs} constant sind, so bildet der Inbegriff der ∞^{r-1} eingliedrigen Gruppen

$$\lambda_1 X_1(f) + \cdots + \lambda_r X_r(f)$$

eine r-gliedrige continuirliche Gruppe, welche die identische Transformation enthält und deren Transformationen sich paarweise als inverse zusammenordnen, Lie, *Math. Ann.*, 8; *Göttinger Nachr.*, 1874.

Drei infinitesimale Transformationen erfüllen stets die sogenannte Jacobi'sche Identität

$$((X_i, X_j), X_k) + ((X_j, X_k), X_i) + ((X_k, X_i), X_j) = 0.$$

Jede r-gliedrige Gruppe, welche die identische Transformation nicht enthält, d. h. welche nicht von r unabhängigen infinitesimalen Transformationen erzeugt ist, kann immer aus einer r-gliedrigen Gruppe mit r unabhängigen infinitesimalen Transformationen abgeleitet werden. Vergl. Lie, *Transf.-Gruppen*, 1, S. 163.

Es lässt sich nachweisen, dass wirklich Gruppen existiren, welche die identische Transformation nicht enthalten.

Lie hatte zuerst geglaubt, bewiesen zu haben, dass dies nicht der Fall sein könne, *Arch. for Math.*, Christiania 1876; später bemerkte er, dass sein Beweis implicite einschränkende Voraussetzungen über die Natur der Functionen machte, welche in die Definition der Gruppe eingehen. Im Jahre 1884 fand dann Engel ein Beispiel einer Gruppe, welche die identische Transformation *nicht* enthält. Siehe S. 163, 165 des ersten Abschnittes der *Theorie der Transformationsgruppen* von Lie, bearbeitet unter Mitwirkung von Engel, Leipzig 1888—93.

Eine bemerkenswerthe Gruppe von Punkttransformationen ist die sogenannte *projective Transformationsgruppe. Sie transformirt jede Gerade stets wieder in eine Gerade,* wenn man die Variabelen x als Coordinaten eines Punktes im Raum von n Dimensionen deutet. Sie wird durch

$$x_i' = \frac{a_{1i}x_1 + \cdots + a_{ni}x_n + a_{n+1,i}}{a_{1,n+1}x_1 + \cdots + a_{n,n+1}x_n + a_{n+1,n+1}}$$

ausgedrückt.

Ihre Untergruppe, für welche

$$a_{1,n+1} = \cdots = a_{n,n+1} = 0$$

ist, heisst *die allgemeine lineare Gruppe.*

Die infinitesimalen Substitutionen der allgemeinen linearen Gruppe sind diejenigen, welche den n^2 Symbolen

$$X_{ij} = x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{entsprechen.}$$

Von diesen Transformationen wird die allgemeine lineare Gruppe erzeugt.

Auf die Transformationsgruppen kann man die weiter oben bei den discontinuirlichen Substitutionsgruppen (siehe Kap. 2) erklärten Begriffe ausdehnen, z. B. den der invarianten (ausgezeichneten) Untergruppe (vergl. S. 30) und mithin den Begriff der einfachen oder zusammengesetzten Gruppe und den der Transitivität.

Transitiv heisst jede Transformationsgruppe, für welche, wenn man den x ein System von Werthen und den x' ein System von Werthen beilegt, immer wenigstens ein System von Werthen der Parameter a derart existirt, dass die entsprechenden Transformationen der Gruppe das System x in das System x' überführen.

Wir können den Begriff der Transformationsgruppen auf die folgende Art erweitern: anstatt *ein einziges* System von Beziehungen wie das System (1), betrachten wir ν solche Systeme, d. h. die Transformationen

$$x_i' = f_i^{(k)}\left(x_1, \cdots, x_n, a_1^{(k)}, \cdots, a_{r_k}^{(k)}\right),$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n), \quad (k = 1, 2, \cdots, \nu).$$

Wenn diese Transformationen eine *Gruppe* im gewöhnlichen Sinne bilden, so erhält man eine sogenannte *gemischte Gruppe G,*

während die bisher betrachtete, dem Fall $\nu = 1$ entsprechende Gruppe *continuirlich* genannt wird.

Man sagt, die Gruppe G bestehe aus ν *Scharen von Transformationen.*

Wir wollen annehmen, die Gruppe G in diesem allgemeinen Sinne enthalte die identische Transformation, und ihre Transformationen seien paarweise zu einander invers. *Dann müssen alle Zahlen r einander gleich sein:*

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_k = r,$$

und die Gruppe G muss r infinitesimale Transformationen enthalten und die durch diese r infinitesimalen Transformationen erzeugte Gruppe H eine invariante (ausgezeichnete) Untergruppe von G sein. Die Gruppe G geht aus der Gruppe H und $\nu - 1$ Scharen von der Form

$$T_1 H, \; T_2 H, \; \cdots, \; T_{\nu-1} H$$

hervor, worin $T_1, T_2, \cdots, T_{\nu-1}$ Transformationen sind, für welche

$$T_i^{-1} H T_i = H \quad \text{ist.}$$

Die hier betrachteten Gruppen, deren Transformationen von einer gewissen *endlichen* Anzahl von Parametern abhängen, heissen *endliche* Gruppen. Um nun die Definition der *unendlichen Gruppe* verstehen zu können, muss man der Definition der *endlichen Gruppe* eine andere Form geben. Wir wollen die Gleichungen, welche die Transformationen definiren, so oft differenziren, dass wir die Constanten $a_1, \cdots, a_r$ eliminiren können. Wir erhalten dann ein System von Differentialgleichungen, welches die folgenden Eigenschaften besitzt: 1) wenn

$$x_i' = f_i(x_1, \cdots, x_n, b_1, \cdots, b_r)$$

ein System von Lösungen und

$$x_i' = f_i(x_1, \cdots, x_n, a_1, \cdots, a_r)$$

ein zweites solches System ist, so stellt auch

$$x_i' = f_i \{f_1(x, a), \cdots, f_n(x, a), b_1, \cdots, b_r\}$$

ein System von Lösungen dar; und 2) die allgemeinste Lösung des Systems enthält r willkürliche Constanten, wobei man unter r eine endliche Zahl zu verstehen hat.

Denken wir uns nun eine Gruppe, welche durch ein System von Differentialgleichungen definirt wird, welches zwar die erste Eigenschaft besitzt, die zweite aber nicht, so erhält man den Begriff der *unendlichen Transformationsgruppe.*

So definirt z. B. das System von Gleichungen

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_k} = 0, \quad (i \neq k;\ i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

eine unendliche Gruppe, weil diesem System durch die Relationen vom Typus

$$x_i' = \Pi_i(x_i), \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

worin die Π *willkürliche Functionen* sind, genügt wird.

Literaturangaben findet man am Ende des § 2.

§ 2. Berührungstransformationen.

Die in dem vorigen Paragraphen besprochenen Transformationen heissen Punkttransformationen; von ihnen unterscheiden sich die in gewissem Sinn allgemeineren sogenannten *Berührungstransformationen,* die wir hier kurz besprechen wollen.

Nimmt man nämlich der Einfachheit wegen an, es seien nur zwei Variabele vorhanden, so wird die Punkttransformation durch die Formeln definirt:

$$x_1' = f_1(x_1, x_2), \quad x_2' = f_2(x_1, x_2).$$

Mit ihrer Hülfe wird die Derivirte von x_2' nach x_1' durch die Derivirte von x_2 nach x_1 mittelst der Formel ausgedrückt:

$$\frac{dx_2'}{dx_1'} = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}} = \varphi\left(x_1, x_2, \frac{dx_2}{dx_1}\right).$$

Auf Grund dieser Formeln verwandelt sich

$$dx_2 - \frac{dx_2}{dx_1}\,dx_1 = 0$$

(bis auf einen Factor) in

$$dx_2' - \frac{dx_2'}{dx_1'}\,dx_1' = 0.$$

Wir wollen nun p statt $\frac{dx_2}{dx_1}$ setzen und uns denken, die vorstehende Transformation sei ein specieller Fall einer anderen mit drei Variabelen x_1, x_2, p von der Gestalt

$$x_1' = \varphi_1(x_1, x_2, p),$$
$$x_2' = \varphi_2(x_1, x_2, p),$$
$$p' = \varphi_3(x_1, x_2, p)$$

und annehmen, diese Transformation lasse die Differentialrelation

$$dx_2 - p\,dx_1 = 0$$

unverändert, d. h. sie verwandele sie (bis auf einen Factor) in

$$dx_2' - p'\,dx_1' = 0.$$

Eine solche Transformation nennt man eine *Berührungstransformation.*

Wenn sich aus den vorstehenden drei Beziehungen p derart eliminiren lässt, dass man x_1', x_2' in Ausdrücken von x_1, x_2 allein erhält, so ist die Berührungstransformation eine erweiterte Punkttransformation.

Führt man zwei Berührungstransformationen nacheinander aus, so erhält man wieder eine Berührungstransformation.

Die inverse einer Berührungstransformation ist ebenfalls eine solche.

Die Functionen φ_1, φ_2, welche die Berührungstransformation bestimmen, genügen der Beziehung

$$[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + p\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial p}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + p\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right) = 0.$$

Wenn umgekehrt die beiden von einander unabhängigen Functionen φ_1, φ_2 den Ausdruck $[\varphi_1, \varphi_2] = 0$ machen, so lässt sich mit ihrer Hülfe immer und auf eine einzige Art eine Berührungstransformation bestimmen.

Man kann den Begriff der *Berührungstransformation* leicht auf den Fall mehrerer Variabelen ausdehnen.

Es sei eine Pfaff'sche Gleichung (vergl. Kap. 8, § 8)

$$dz - p_1\,dx_1 - \cdots - p_n\,dx_n = 0$$

und eine Punkttransformation bezügl. der $2n+1$ Variabelen $z, x_1, x_2, \cdots, x_n, p_1, p_2, \cdots, p_n$:

$$\begin{aligned} z' &= Z\,(z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n) \\ x_i' &= X_i(z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n) \\ p_i' &= P_i\,(z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n) \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

gegeben. Wenn diese Transformation derart ist, dass die linke Seite der Pfaff'schen Gleichung bis auf einen Factor unverändert bleibt, so heisst sie eine *Berührungstransformation in dem Raum von $(n+1)$ Dimensionen $z, x_1, \cdots, x_n$.*

Eine einfache und wichtige Berührungstransformation ist die folgende

$$z' = z - x_1 p_1 - \cdots - x_q p_q,$$

$$x_1' = p_1, \quad \cdots, x_q' = p_q, \quad x_{q+1}' = x_{q+1}, \cdots, x_n' = x_n,$$

$$p_1' = -x_1, \cdots, p_q' = -x_q, \; p_{q+1}' = p_{q+1}, \cdots, p_n = p_n.$$

Für $q = 1$ ist sie von Euler untersucht worden, für $n = 3$, $q = 1$ von Ampère. Ist $n = 3$, $q = 2$, so pflegt man sie die *Legendre'sche Transformation* zu nennen.

Es gilt immer der Satz, *dass die inverse einer Berührungstransformation sowie das Product zweier solcher Transformationen wieder Berührungstransformationen sind.*

Alle Berührungstransformationen bilden eine unendliche (vergl. § 1) *continuirliche Transformationsgruppe.*

Sollen die Functionen Z, X_i, P_i eine Berührungstransformation bestimmen, so ist es nothwendig und ausreichend, dass die Relationen

$$[Z, X_i] = [X_i, X_j] = [P_i, X_j] = 0, \quad (i \neq j),$$

$$[P_i X_i] = \varrho, \; [P_i Z] = \varrho P_i$$

erfüllt seien, worin ϱ eine Function aller Variabelen ist und wo das Poisson'sche Symbol $[\varphi, \psi]$ an Stelle von

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial z} p_i \right) - \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p_i \right) \right]$$

steht.

Jede Berührungstransformation von der Form

$$x_i' = X_i(x, p), \; p_i' = P_i(x, p),$$

für welche identisch

$$dz - p_1' dx_1' - \cdots - p_n' dx_n' \equiv dz - p_1 dx_1 - \cdots p_n dx_n,$$

oder, was dasselbe ist,

$$p_1' dx_1 + \cdots + p_n' dx_n' = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$$

ist, heisst *homogen.*

Damit eine Transformation homogen sei, ist es nothwendig und ausreichend, dass die X, P den Relationen

$$(X_i, X_j) = (P_i, X_j) = (P_i, P_j) = 0, \quad (i \neq j),$$

$$(P_i, X_i) = 1$$

genügen, und dass die X homogene Functionen der p vom Grad 0 *und die P homogene Functionen vom Grad* 1 *seien. Dabei bedeutet das Symbol* ( ) *dasselbe, wie oben das Symbol* [ ], *nur dass die Terme mit den Derivirten nach z verschwinden, weil es sich um Functionen handelt, in denen z nicht vorkommt.*

Man kann jetzt auch den Begriff der *infinitesimalen Berührungstransformation* einführen.

Eine infinitesimale Transformation, wie die in § 1 bez. der $2n+1$ Variabelen $z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n$ betrachteten, heisst infinitesimale *Berührungs*transformation, wenn sie die Pfaff'sche Gleichung

$$dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n = 0$$

unverändert lässt.

Die allgemeinste infinitesimale Berührungstransformation hat den Typus

$$\zeta \frac{\partial}{\partial z} + \sum_1^n \left(\xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \pi_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right),$$

worin die ζ, ξ_i, π_i von der Form

$$\zeta = p_1 \frac{\partial W}{\partial p_1} + \cdots + p_n \frac{\partial W}{\partial p_n} - W,$$

$$\xi_i = \frac{\partial W}{\partial p_i},$$

$$\pi_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial W}{\partial z}$$

sind, sowie W eine willkürliche Function bezeichnet, welche die *charakteristische Function* der infinitesimalen Transformation genannt wird.

Die ersten präcisen und allgemeinen Begriffe über die Theorie der Transformationsgruppen verdankt man Lie, *Gesellsch. zu Christiania,* 1871 und Klein, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen,* Erlangen 1872. Die Berührungstransformationen hat Lie eingeführt, *Gött. Nachr.,* 1870, 1872; *Compt. Rend.,* 1870; *Gesellsch. zu Christiania,* 1870—1873; *Math. Ann.,* 5, 8. Einige specielle Berührungstransformationen wurden schon früher von Euler, Ampère, Jacobi untersucht.

Die Hauptwerke über die Transformationsgruppen und ihre Anwendung auf die Differentialgleichungen sind von Lie: *Theorie der Transformationsgruppen,* 3 Abschn., unter Mitw. v. Engel, Leipzig 1888—1893; *Vorles. über continuirliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen,* bearb. v. Scheffers, ib. 1893; *Vorles. über gewöhnliche Differentialgl. mit bekannten infinites. Transform.,* bearb. v. Scheffers, ib. 1891; *Untersuchungen über unendliche continuirliche Gruppen*, ib. 1895; *Geometrie der Berührungstransf.,* unter Mitw. v. Scheffers, ib. 1896, wozu noch zahlreiche Abhandlungen desselben Autors in den Jahrbüchern der Akademie von Christiania, dem norwegischen Archiv für Mathematik, der Göttinger Akademie, in den Math. Ann. und in den Leipziger Berichten kommen. Vergl. auch zur Orientirung die autographirte Vorlesung von F. Klein *über höhere Geometrie,* Bd. 2, Göttingen 1893.

§ 3. Endliche und Differential-Invarianten einer Gruppe. Integral-Invarianten.

Endliche Invariante einer Gruppe heisst eine Function der Variabelen, welche durch die Transformationen der Gruppe keine Veränderung erleidet.

Damit eine Function $\Omega(x_1, \cdots, x_n)$ bei allen Transformationen einer Gruppe H (welche r-gliedrig ist und die identische Transformation enthält, siehe § 1) *unverändert bleibe, ist es nothwendig und ausreichend, dass $X_i(\Omega) = 0$ sei, worin die X_i die Symbole für die infinitesimalen Transformationen der Gruppe vorstellen. Die allgemeinste Invariante Ω ist mithin die allgemeinste Lösung der partiellen Differentialgleichungen:*

$$\xi_{11}\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + \cdots + \xi_{1n}\frac{\partial\Omega}{\partial x_n} = 0,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\xi_{r1}\frac{\partial\Omega}{\partial x_1} + \cdots + \xi_{rn}\frac{\partial\Omega}{\partial x_n} = 0.$$

Soll die Function Ω bei der Gruppe G, die aus ν Scharen besteht, invariant bleiben, so muss sie ausserdem noch die Transformationen $T_1, T_2, \cdots, T_{\nu-1}$ (vergl. S. 209) gestatten.

Wenn die r-gliedrige Gruppe H transitiv ist, so hat sie keine Invarianten. Ist sie intransitiv, so hat sie die gemeinsamen Lösungen der partiellen Differentialgleichungen zu Invarianten.

Wir wollen annehmen, es sei $n = 2$ und die durch $\Omega(x_1, x_2) = \text{Const.}$ dargestellte Curvenschar betrachten, indem wir x_1, x_2 als Coordinaten eines Punktes der Ebene ansehen. Wir sagen, dass eine Transformation eine Curvenschar *invariant* lasse, wenn sie jede Curve der Schar in eine Curve der Schar überführt. Alsdann sagen wir auch, die Curvenschar $\Omega(x_1, x_2) = \text{Const.}$ *gestatte* die Transformation oder *lasse* sie *zu*.

Die Schar von ∞^1 Curven

$$\Omega(x_1, x_2) = \text{Const.}$$

gestattet dann und nur dann die Transformation

$$x_1' = f_1(x_1, x_2), \quad x_2' = f_2(x_1, x_2),$$

wenn vermöge dieser Transformation $\Omega(x_1', x_2')$ eine Function von $\Omega(x_1, x_2)$ allein ist.

Soll die Gesammtheit aller ∞^1 durch die Gleichungen $\Omega(x_1, x_2) = \text{Const.}$ dargestellten Curven bei sämmtlichen Transformationen einer eingliedrigen Gruppe unverändert bleiben, so ist dazu nothwendig und ausreichend, dass $X(\Omega)$ eine Function von Ω allein sei, wobei unter X das Symbol der infinitesimalen Transformation der Gruppe verstanden wird. Ist speciell $X(\Omega) = 0$, so bleibt jede Curve für sich unverändert.

Wir gehen nun zu dem Begriff der *Differential-Invarianten* über. Wir nehmen der Einfachheit wegen an, die Variabelen $x_1, \cdots, x_n$ seien Functionen derselben Variabelen x und betrachten eine continuirliche r-gliedrige Gruppe H.

Wir bilden die Derivirten nach x der linken und rechten Seiten der Transformationsformeln

$$x_i' = f_i(x_1, \cdots, x_n, a_1, \cdots, a_r)$$

und erhalten

$$\frac{dx_i'}{dx} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_h} \frac{dx_h}{dx}.$$

Diese n Formeln ergeben mit den vorigen zusammen $2n$ Transformationsformeln zwischen den Variabelen

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \frac{dx_1}{dx}, \cdots, \frac{dx_n}{dx}.$$

Die Gruppe dieser Transformationen nennt man die *einmal erweiterte Gruppe H;* wir wollen sie mit $H^{(1)}$ bezeichnen.

Die Invarianten von $H^{(1)}$ heissen *Differential-Invarianten erster Ordnung von H.*

Auf analoge Art werden die Differential-Invarianten höherer Ordnung von H und die der gemischten Gruppe G definirt.

Es lässt sich dann der Ausdruck für die infinitesimalen Transformationen $X_i^{(1)}$ finden, welche der erweiterten Gruppe $H^{(1)}$ angehören, und man erhält selbstverständlich als Resultat, dass die *Differential-Invarianten* $\Omega^{(1)}$ *erster Ordnung von H, d. h., die endlichen Invarianten von* $H^{(1)}$, *c. partiellen Differentialgleichungen vom Typus* $X_i^{(1)}(\Omega^{(1)}) = 0$ *genügen müssen, worin* $X_i^{(1)}$ *die Symbole für die infinitesimalen Transformationen der erweiterten Gruppe sind.*

Aehnliche Resultate erhält man für die Differential-Invarianten höherer Ordnung.

Man kann diesen Begriff auf die folgende Art erweitern.

Es mögen $n + m$ Variabele $x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_m$ vorliegen, von denen man sich die Grössen z als Functionen der x zu denken hat, und es sei eine Transformationsgruppe in Bezug auf alle Variabelen gegeben:

$$x_i' = f_i(x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_m, a_1, \cdots, a_r),$$
$$z_j' = F_j(x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_m, a_1, \cdots, a_r).$$

Fügt man zu diesen Formeln nun diejenigen hinzu, mittelst welcher die Derivirten der z nach den x in die der z' nach den x' transformirt werden, so erhält man die *erweiterte Gruppe* zwischen einer grösseren Anzahl von Variabelen; jede Invariante dieser erweiterten Gruppe ist eine *Differential-Invariante* gegenüber der gegebenen Gruppe.

Eine Differential-Invariante, welche eine willkürliche Function und deren Derivirte enthält, pflegt man einen *Differentialparameter* zu nennen.

Eine der projectiven Gruppe angehörige Differential-Invariante ist die schon von Lagrange verwandte sogenannte Schwarz'sche (H. A. Schwarz, *ges. math. Werke*, Bd. 2, S. 351, Berlin 1890):

$$\frac{\frac{d^3 z}{dx^3}}{\frac{dz}{dx}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\frac{dz}{dx}}\right)^2.$$

Wegen ihrer Eigenschaft, sich bis auf einen Factor nicht zu ändern, wenn man z mit x vertauscht, hat sie Sylvester

die *Reciprocante* genannt und später diese Bezeichnung auf alle projectiven Differential-Invarianten ausgedehnt.

Die Gruppe, zu welcher diese Invariante gehört, ist die Gruppe der Transformationen

$$x' = x,$$
$$z' = \frac{a + bz}{c + dz}.$$

Allgemeine Untersuchungen über die Differential-Invarianten findet man speciell bei Lie, *Math. Ann.*, 24; siehe auch die übrige unten angegebene Literatur.

Zugleich mit den Differential-Invarianten kann man auch die *Integral-Invarianten* betrachten. Es liege ein Integral

$$I = \int\int \cdots \int \Phi \cdot dx_1 \cdots dx_n$$

vor, in welchem Φ, wie oben, eine Function der Variabelen x, z und der Derivirten der z nach den x und derart ist, dass der Werth von I bei allen Transformationen einer gewissen Gruppe unverändert bleibt. Der Ausdruck I heisst dann eine *Integral-Invariante.*

Hierher gehören z. B. die Integrale, welche metrische Beziehungen ausdrücken, wie Flächeninhalte und Volumina, deren bezügliche Integrale bei allen Transformationen, die den Veränderungen der Coordinatenaxen entsprechen, denselben Werth behalten.

Die ersten allgemeinen Studien über die Integral-Invarianten sind wohl Lie zuzuschreiben: *Untersuchungen, die sich auf Transformationsgruppen beziehen, bei denen Bogenintegrale invariant bleiben,* Leipziger Ber., 1886. Später folgten Poincaré, *Acta math.*, 13, S. 52, 1890; Lie, *Leipz. Berichte,* 1895; Zorawsky, *Akad. zu Krakau,* 1895; Königs, *Compt. Rend.*, 1895; Cartan, *Bull. de la Soc. math.*, 1896; Hurwitz, *Gött. Nachr.*, 1897. Schliesslich bewies Lie, *Leipz. Berichte,* 1897, dass die Theorie der Differential-Invarianten ohne Weiteres die vollständige Theorie der Integral-Invarianten liefert.

Man sehe die geschichtlichen Bemerkungen von Lie in dem letzten Paragraphen der eben citirten Arbeit, einen anderen Aufsatz von Lie in demselben Bande der *Leipz. Ber.*, 1897 und vergl. auch die dritte Abth. der *Transformationsgruppen* von Lie, S. 499 u. ff., wo Probleme untersucht werden, welche denen über die Integral-Invarianten entsprechen.

§ 4. Die Invarianten in Bezug auf eine Differentialform.

Man kann sich auch eine Differential-Invariante in einem verschiedenen Sinn denken, indem man sie auf eine Grunddifferentialform bezieht; man erhält dann einen Begriff der Differential-Invariante, der sich sehr dem in der Invariantentheorie der algebraischen Formen gebräuchlichen nähert.

Wir wollen annehmen, es sei die Differentialform

$$\sum_{i,j,\cdots} Z_{i,j,\ldots}\, dx_i\, dx_j \cdots,$$

d. h. eine homogene ganze Function von bestimmtem Grad der $dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$ mit Coefficienten gegeben, die Functionen aller Variabelen sind.

Bei allen Transformationen einer Gruppe verwandelt sich die Differentialform in eine andere von demselben Grad; dabei werden die Coefficienten Z in gewisse andere derart transformirt, dass jeder neue $Z_{i,j,\ldots}$ im Allgemeinen nicht nur der transformirte des früheren $Z_{i,j,\ldots}$ ist, sondern eine gewisse Combination der transformirten aller früheren Z. Jede Function der Grössen x, Z und anderer willkürlicher Functionen nun, welche für alle Substitutionen der Gruppe in Bezug auf die neuen Grössen x und Z dieselbe Form beibehält, heisst im Allgemeinen ein *zu der Gruppe gehöriger Differentialparameter.*

Dieser Fall kann als ein specieller des früheren (vergl. S. 216) angesehen werden, wenn man annimmt, die Transformationen, welche mit den Variabelen z, die ihrerseits Functionen von x sind, ausgeführt werden sollen, seien mit denjenigen identisch, welche sich ergeben, wenn man die neuen Coefficienten Z der Differentialform durch die bisherigen Coefficienten und Variabelen ausdrückt.

Unter dieser letzten speciellen Form steht das Problem, die Differential-Parameter oder -Invarianten zu bestimmen, in Verbindung mit den Untersuchungen, die Gauss, Lamé, Jacobi begannen und später Beltrami und Andere fortgesetzt und verallgemeinert haben. Sie gingen von der Theorie der Flächen aus, und ihre Untersuchungen sind als ein specieller Fall des obigen Problems aufzufassen, weil bei ihnen nicht eine specielle Gruppe von Transformationen, sondern die vollständige Gruppe aller Transformationen in Betracht kommt. Der Name *Differentialparameter* rührt von Lamé her.

Nach dieser Vorstellungsart ist eine Differential-Invariante die sogenannte *totale Krümmung der Fläche* von Gauss (siehe die Differentialgeometrie z. B. in diesem Werke, Kap. 16, § 10).

Nimmt man die quadratische Differentialform

$$\sum a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

und nennt a die Determinante der a_{rs}, A die reciproke Determinante und A_{rs} ihre Elemente, so ist der *Ausdruck*

$$\Delta_1 V = \sum A_{rs} \frac{\partial V}{\partial x_r} \frac{\partial V}{\partial x_s},$$

in welchem V eine willkürliche Function der Variabeln bedeutet, ein Differentialparameter 1ter Ordnung.

Ebenso ist der Ausdruck

$$\Delta_1 UV = \sum A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial V}{\partial x_s}$$

ein Differentialparameter 1ter Ordnung mit zwei willkürlichen Functionen.

Dagegen ist

$$\Delta_2 V = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum \frac{\partial \left(\sqrt{a}\, A_{rs} \frac{\partial V}{\partial x_s}\right)}{\partial x_r}$$

ein Differentialparameter 2ter Ordnung.

Was die Differential-Invarianten und -Parameter angeht, hat man zwischen den Arbeiten zu unterscheiden, welche, wie oben ausgeführt wurde, die Differentialformen, speciell die quadratischen, zu Grunde legen und denjenigen, die von anderen Grundlagen ausgehen, z. B. von der Theorie der Transformationsgruppen oder der Lehre von den Curven in den Räumen von drei und mehr Dimensionen oder auch der Differentialgleichungen etc.

Der ersten Kategorie gehören die Untersuchungen von Gauss über die Krümmung der Flächen an, ferner die von Lamé, *Leç. sur les coord. curvilignes et applicat.*, Paris 1859; Jacobi, *Crelle*, 36, S. 113; *ges. Werke*, Bd. 2, S. 191, Berlin 1882, herausgegeben von Weierstrass; Chelini, *Ann. di mat.*, 1. Serie, Bd. 4; Casorati, ib., 1. Serie, Bd. 3, 4;

2. Serie, Bd. 12 und Beltrami, *Mem. Acc. sc. Bologna,* 2. Serie, Bd. 8, 1869, welcher die Untersuchungen auf den Fall von n Variabelen ausdehnte. In seinem Buch *La teoria dei determinanti e le sue applicazioni,* Pavia 1854, auch deutsch, *Theorie der Determinanten* mit Vorwort von Schellbach, Berlin 1856, hat Brioschi auch den Fall eines Differentialparameters 2ter Ordnung für n Variabele, aber für eine specielle Art der fundamentalen quadratischen Form in Betracht gezogen. Schliesslich sind noch als hierher gehörig die Arbeiten zu erwähnen von: Christoffel, *Crelle,* 70; Lipschitz, *Crelle,* 70, 71, 72, 74, 78, 81; Ricci, *Ann. di mat.,* Bd. 12, 14; *Lincei,* 1888, 1889; *Ist. Veneto,* 1893 etc.; Padova, *Lincei,* 1887; Frobenius, *Crelle,* 110; Knoblauch, *Crelle,* 111 und Anderen. Vergl. auch Bd. 2 dieses Werkes, Kap. 20, § 2.

Zu der zweiten Kategorie gehören vor Allen die Studien von Schwarz über eine Invariante, welche zur projectiven Gruppe gehört, *Bestimmung einer spec. Minimalf., Monatsber. d. Berl. Ac.,* 1867 und 1872; dann die von Brioschi, *Ann. di. mat.,* 13; *Acta math.,* 14 etc.; von Sylvester, *Am. Journ. Math.,* 8, 10; Halphen, *Thèse sur les invariants différentiels,* 1878 und *J. de l'Éc. polyt.,* 1880; *Compt. Rend.,* 81; *Journ. math. de Liouville,* 1876, 1880, 1883; *Acta math.,* 3; Forsyth, *London Phil. Trans.,* 1888; Berzolari, *Ann. di mat.,* 26, 1897; die allgemeinen Untersuchungen von Lie, *Math. Ann.,* 24 etc.

§ 5. Anwendung der Theorie der Transformationsgruppen auf die Differentialgleichungen.

Nehmen wir an, es sei eine Differentialgleichung 1ter Ordnung von der Form

$$M_1 dx_2 - M_2 dx_1 = 0$$

gegeben. Wir sagen, *sie lasse eine Transformation zu,* wenn sie bei dieser Transformation ihrer Gestalt nach bis auf einen Factor, der eine Function der Variabelen ist, unverändert bleibt.

Jede Differentialgleichung, wie die vorstehende, lässt eine Transformation dann und nur dann zu, wenn die Schar ihrer Integralcurven sie zulässt (vergl. § 3).

Jede Differentialgleichung lässt alle Transformationen einer eingliedrigen Gruppe X dann und nur dann zu, wenn sie die infinitesimale Transformation Xf zulässt.

Die Differentialgleichung erster Ordnung

$$M_1 dx_2 - M_2 dx_1 = 0$$

bleibt der Form nach bis auf einen Factor bei allen Transformationen einer Gruppe, deren infinitesimale Transformation X ist, nur dann unverändert, wenn identisch

$$X(Y) - Y(X) = \lambda Y$$

ist, worin das Symbol Y für $M_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + M_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ *steht und* λ *eine Function von* x_1 *und* x_2 *allein bedeutet.*

Wenn die Differentialgleichung eine Gruppe zulässt, deren infinitesimale Transformation

$$X \equiv \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

lautet, so ist der Ausdruck

$$\frac{1}{M_2 \xi_1 - M_1 \xi_2}$$

ein Euler'scher Integrabilitätsfactor (vergl. Kap. 8, § 2) *der Gleichung* (siehe Lie, *Math. Ann.*, 11); *diese ist mithin durch Quadraturen integrirbar:*

$$\int \frac{M_1 dx_2 - M_2 dx_1}{M_2 \xi_1 - M_1 \xi_2} = \text{Const.}$$

Jede Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabelen lässt unendlich viele infinitesimale Transformationen zu und mithin eine unendliche continuirliche Gruppe.

Für Differentialgleichungen höherer Ordnung gilt ein ähnlicher Satz *nicht.*

Die Differentialgleichung 1ter *Ordnung*

$$\Omega^{(1)}\left(x_1, x_2, \frac{dx_2}{dx_1}\right) = 0$$

bleibt bei einer eingliedrigen Gruppe, deren infinitesimale Transformation durch

$$X \equiv \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

dargestellt wird, nur dann invariant, wenn der Ausdruck

$$\xi_1 \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x_2} +$$
$$+ \left\{\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\right)\frac{dx_2}{dx_1} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2\right\} \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)} \equiv X^{(1)}(\Omega^{(1)})$$

vermöge $\Omega^{(1)} = 0$ *verschwindet. Dabei ist vorausgesetzt, die gegebene Gleichung sei derart, dass die drei Derivirten von* $\Omega^{(1)}$ *nach*

$$x_1,\ x_2,\ \frac{dx_2}{dx_1}$$

vermöge $\Omega^{(1)} = 0$ *nicht sämmtlich Null werden.*

Kennt man die endlichen Gleichungen einer eingliedrigen Gruppe in x_1, x_2, *so kann man durch Differentiation und Elimination allein alle gewöhnlichen Differentialgleichungen* 1ter *Ordnung zwischen* x_1 *und* x_2, *welche die Gruppe zulassen, bestimmen.*

Wenn man von einer eingliedrigen Gruppe mit zwei Variabelen die endliche Invariante $\Omega(x_1, x_2)$ *kennt, so lassen sich durch Quadraturen alle möglichen Differential-Invarianten* 1ter *Ordnung ableiten; setzt man diese Differential-Invarianten gleich Null, so erhält man alle möglichen Differentialgleichungen* 1ter *Ordnung, die bei der Gruppe invariant bleiben.*

Eine Gruppe, bei welcher die homogenen Differentialgleichungen 1ter Ordnung (vergl. Kap. 8, § 2) invariant bleiben, ist die Gruppe der Transformationen

$$x_1' = a x_1,$$
$$x_2' = a x_2.$$

Eine der Differentialgleichung

$$\frac{x_1 \frac{dx_2}{dx_1} - x_2}{x_1 + x_2 \frac{dx_2}{dx_1}} = F(x_1^2 + x_2^2)$$

zugehörige Gruppe ist die der Transformationen

$$x_1' = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha,$$
$$x_2' = x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha.$$

Die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dx_2}{dx_1} + P(x_1)\, x_2 = Q(x_1)$$

gestattet die eingliedrige Gruppe

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2 + a e^{-\int P dx_1}.$$

Aus dem Gesagten geht hervor, dass die Theorie der Transformationsgruppen eine neue Theorie des integrirenden Factors einer Differentialgleichung 1ter Ordnung aufzustellen er-

laubt. Von diesem Gesichtspunkt aus wurde die Theorie des integrirenden Factors zuerst von Sophus Lie, *Verh. der Ges. zu Christiania*, 1874 behandelt.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich über die Differentialgleichungen 2ter Ordnung

$$\Omega^{(2)}\left(x_1, x_2 \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{d^2x_2}{dx_1^2}\right) = 0$$

anstellen. Sieht man die linke Seite dieser Gleichung als eine Differential-Invariante einer Gruppe von Punkttransformationen an (vergl. § 3), so besteht das Problem der Integration darin, eine solche Transformationsgruppe ausfindig zu machen und aus ihr das Integral abzuleiten.

Soll die Gleichung $\Omega^{(2)} = 0$ *eine infinitesimale Transformation* $X = \xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ *und mithin alle Transformationen der eingliedrigen von dieser erzeugten Gruppe zulassen, so muss* $\Omega^{(2)}$ *einer partiellen Differentialgleichung genügen, die sich ergibt, wenn man die erweiterte infinitesimale Transformation* $X^{(2)}$ *bildet, welche der erweiterten Gruppe entspricht, d. h. der Gruppe in Bezug auf die vier Variabelen*

$$x_1, x_2, \frac{dx_2}{dx_1}, \frac{d^2x_2}{dx_1^2}.$$

Die allgemeinste Form einer Differentialgleichung 2ter *Ordnung, welche eine infinitesimale Transformation X gestattet, hat den Typus*

$$\frac{dv}{du} - \Phi(u, v) = 0,$$

worin Φ *eine willkürliche Function, u eine endliche Invariante der Gruppe X und v eine durch Quadraturen bestimmbare Differential-Invariante* 1ter *Ordnung derselben Gruppe bezeichnet.*

Die Integration der gegebenen Gleichung reducirt sich daher bis auf Quadraturen auf die Integration einer Gleichung 1ter Ordnung.

Wir können uns nicht eingehender auf diese Anwendungen einlassen; es genügt uns, die wenigen vorstehenden Begriffe gegeben zu haben. Ueber weitere Einzelheiten verweisen wir auf die Werke von Lie, die am Ende des § 2 citirt wurden.

Kapitel X.

Die Differenzenrechnung.

§ 1. Allgemeines.

Denkt man sich eine Aufeinanderfolge von Werthen

$$x_0, x_1, x_2, \cdots$$

der Variabelen x und nimmt an, $f(x)$ sei eine Function von x, so heissen die Differenzen

$$\begin{gathered} f(x_1) - f(x_0), \\ f(x_2) - f(x_1), \\ \cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

die ersten Differenzen von f und werden mit

$$\Delta f(x_0), \quad \Delta f(x_1), \cdots$$

bezeichnet.

Verfährt man ebenso mit den ersten Differenzen, so erhält man *die zweiten Differenzen*

$$\Delta^2 f(x_0), \ \Delta^2 f(x_1), \cdots.$$

Die n^{te} Differenz ist durch die Formel

$$\Delta^n f(x_0) = f(x_n) - (n)_1 f(x_{n-1}) + \\ + (n)_2 f(x_{n-2}) - \cdots + (-1)^n f(x_0)$$

gegeben.

Der Werth der Function im Punkt x_n wird durch

$$f(x_n) = f(x_0) + (n)_1 \Delta f(x_0) + \\ + (n)_2 \Delta^2 f(x_0) + \cdots + \Delta^n f(x_0)$$

bestimmt.

Ausserdem gelten die (Studnicka'schen) Formeln:
(*Prager Berichte*, 2. Abth., 1871, S. 39; *Giorn. di Batt.*, **10**, S. 76.)

$$\Delta^m f(x_{h+n}) = \sum_{i=0}^{i=n} (n)_i \Delta^{m+i} f(x_h),$$

$$\Delta^{m+n} f(x_h) = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i (n)_i \Delta^m f(x_{h+n-i}),$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \Delta^m f(x_{h+i}) = \sum_{i=0}^{i=n-1} (n)_{i+1} \Delta^{m+i} f(x_h),$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} f(x_i) = \sum_{i=0}^{i=n-1} (n)_{i+1} \Delta^i f(x_0).$$

Wir wollen nunmehr annehmen, es sei

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = h.$$

Die m^{ten} *Differenzen eines Polynoms vom* m^{ten} *Grad sind constant, d. h. unabhängig von* x *und sind bis auf den Factor* $h^m a_0$, *worin* a_0 *den Coefficienten des ersten Gliedes des Polynoms bezeichnet, der factoriellen Facultät von* m *gleich.*

$$\Delta^n e^x = e^x (e^h - 1)^n,$$

$$\Delta^n \frac{1}{x} = (-1)^n n! \frac{h^n}{x(x+h)(x+2h)\cdots(x+nh)},$$

$$\Delta^n \sin(ax+b) = \left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^n \sin\left\{ax+b+\frac{n(ah+\pi)}{2}\right\},$$

$$\Delta^n \cos(ax+b) = \left(2\sin\frac{ah}{2}\right)^n \cos\left\{ax+b+\frac{n(ah+\pi)}{2}\right\}.$$

Betrachtet man die n^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen und ihre successiven Differenzen in Bezug auf das erste Element 0^n, so erhält man *die Differenzen von* 0^n.

Es gelten die Formeln:

$$\Delta^m 0^{n+1} = m(\Delta^m 0^n + \Delta^{m+1} 0^n),$$

$$\Delta^m 0^m = m! = m^m - (m)_1 (m-1)^m + (m)_2 (m-2)^m - \cdots + (-1)^{m-1} (m)_{m-1},$$

$$\Delta^m (0 \cdot h)^n = h^n \Delta^m 0^n,$$

$$\Delta^m f(x_0) = h^m \frac{\Delta^m 0^m}{m!} f^m(x_0) + \cdots + h^n \frac{\Delta^m 0^n}{n!} f^n(x_0) + \\ + h^{n+1} \frac{\Delta^m 0^{n+1}}{n+1!} f^{n+1}(\eta),$$

in welchen η ein zwischen x_0 und $x_0 + nh$ liegender Punkt ist.

$$\frac{\Delta^m 0^n}{n!} = \sum \frac{1}{r_1!\, r_2! \cdots r_m!},$$

worin $r_1, r_2, \cdots, r_m$, m positive Zahlen sind, deren Summe n beträgt, und die Summirung sich über alle möglichen Combinationen dieser Zahlen erstreckt.

Bezeichnet man mit B_m die Bernoulli'schen Zahlen (Kap. 18, § 3), so gilt die Formel (Boole, *Finite diff.*, London 1860, S. 82)

$$B_m = (-1)^{\frac{m}{2}-1} \left\{ 0^m - \frac{1}{2} \Delta 0^m + \frac{1}{3} \Delta^2 0^m - \cdots + \\ + (-1)^m \frac{1}{m+1} \Delta^m 0^m \right\}.$$

Siehe nebenstehende Differenzentafel, S. 227.

§ 2. Interpolation. Interpolationsfunctionen.

Die Ausdrücke

$$f_1(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f_2(x_0, x_1, x_2) = \frac{f_1(x_0, x_2) - f_1(x_0, x_1)}{x_2 - x_1}$$

. . . .

sind Interpolationsfunctionen von der 1ten, 2ten, $\cdots$ Ordnung. Der erste, welcher sie zum Vorwurf einer besonderen Abhandlung machte, war Ampère, *Gergonne*, 16; spätere Arbeiten sind von Cauchy, *Compt. Rend.*, 11, 1840, S. 776, 835; Bellavitis, *Ist. Veneto*, 1856, 1860; Genocchi, *Acc. Torino*, 1878, 1881; Schwarz, *Acc. Torino*, 1882; Peano, ib., 1883; siehe des Verfassers *Calcolo delle diff. finite*, Mailand 1897, S. 247, 248 und Markoff, *Differenzenrechnung*, deutsch, Leipzig 1896, Kap. 1.

Differenzentafel für 0^m bis $\varDelta^{10} 0^{10}$.

	$\varDelta^1$	$\varDelta^2$	$\varDelta^3$	$\varDelta^4$	$\varDelta^5$	$\varDelta^6$	$\varDelta^7$	$\varDelta^8$	$\varDelta^9$	$\varDelta^{10}$
0^1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0^2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
0^3	1	6	6	0	0	0	0	0	0	0
0^4	1	14	36	24	0	0	0	0	0	0
0^5	1	30	150	240	120	0	0	0	0	0
0^6	1	62	540	1560	1800	720	0	0	0	0
0^7	1	126	1806	8400	16 800	15 120	5040	0	0	0
0^8	1	254	5796	40 824	126 000	191 520	141 120	40 320	0	0
0^9	1	510	18 150	186 480	834 120	1 905 120	2 328 480	1 451 520	362 880	0
0^{10}	1	1022	55 980	818 520	5 103 000	16 435 440	29 635 200	30 240 000	16 329 600	3 628 800

Die Interpolationsfunctionen sind in Bezug auf alle Variabelen, die in ihnen vorkommen, symmetrisch (das Ampère'sche Theorem).

Jede Interpolationsfunction lässt sich schreiben:

$$f_n(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_n)} + \\ + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_n)} + \\ + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + \\ + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1})}.$$

Zwischen drei Interpolationsfunctionen von derselben Ordnung besteht die Beziehung

$$f_n(x_1, x_2, x_3, \cdots)(x_1 - x_2) + f_n(x_2, x_0, x_3, \cdots)(x_2 - x_0) + \\ + f_n(x_0, x_1, x_3, \cdots)(x_0 - x_1) = 0.$$

Jede Interpolationsfunction mit Elementen von gleichem Abstand lässt sich durch die Formel

$$f_n(x_0, x_0 + h, \cdots, x_0 + nh) = \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n n!}$$

oder auch durch

$$f_n(x_0, x_0 + h, \cdots, x_0 + nh) = \frac{f^n(\xi)}{n!}$$

ausdrücken, worin

$$x_0 \leqq \xi \leqq x_0 + nh \quad \text{ist.}$$

Wenn die Elemente $x_0, \cdots, x_n$ zusammenfallen, so wird die Interpolationsfunction von der n^{ten} Ordnung bis auf einen Zahlenfactor zur n^{ten} Derivirten der Function.

Die Interpolationsfunction mit beliebigen Elementen wird durch die (Genocchi'sche) Formel

$$f_n(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 t_1^{n-1} t_2^{n-2} \cdots t_{n-1} \times \\ \times f^n\{x_0 + (x_1 - x_0)t_1 + (x_2 - x_1)t_1 t_2 + \cdots + \\ + (x_n - x_{n-1})t_1 t_2 \cdots t_n\} dt_1 \cdots dt_n$$

ausgedrückt.

Der Werth der Function f in einem beliebigen Punkt x lässt sich durch eine Formel wiedergeben, in welcher die Coefficienten der verschiedenen Glieder Interpolationsfunctionen sind:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f_1(x_0, x_1) + \\ + (x - x_0)(x - x_1) f_2(x_0, x_1, x_2) + \cdots + \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)}{n + 1!} f^{(n+1)}(\xi);$$

darin stellt ξ *eine zwischen dem kleinsten und grössten der Werthe* $x_0, x_1, \cdots, x_n, x$ *liegende Grösse vor. Diese Formel heisst in der Regel die allgemeine Newton'sche oder Gauss'sche Formel.*

Nimmt man an, die Intervalle zwischen den successiven Punkten x *seien einander gleich und gleich* h, *so ist*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} \Delta f(x_0) + \cdots + \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - 1) \cdots (x - x_0 - (n-1)h)}{n!\, h^n} \Delta^n f(x_0) + \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - 1) \cdots (x - x_0 - nh)}{n + 1!} f^{(n+1)}(\xi),$$

worin ξ *eine zwischen dem kleinsten und grössten der drei Werthe* $x_0, x_0 + nh, x$ *liegende Grösse bedeutet.*

Wenn alle Punkte $x_0, x_1, \cdots, x_n$ sich in dem Punkt x_0 vereinigen, so ergibt sich die *Taylor'sche Formel.*

Der vorstehenden allgemeinen Formel lässt sich die folgende Gestalt geben:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} f(x_i) \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} + R,$$

wenn man mit R (Rest) das letzte Glied bezeichnet.

Sie heisst in dieser Gestalt *die Lagrange'sche Interpolationsformel* (*Werke,* 7) *und lässt sich auch*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)} \frac{\varphi(x)}{(x - x_i)} + R$$

schreiben, worin

$$\varphi(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n) \quad \textit{ist.}$$

Das Interpolationsproblem hat die Frage zu lösen, wie man, wenn die Werthe einer Function in einer unbegrenzten Anzahl von Punkten als gegeben angenommen werden, den Werth der Function in einem beliebigen Punkt durch die unendlich vielen gegebenen Werthe ausdrücken kann.

Offenbar lassen sich die obigen beiden Formeln zur Lösung des Problems benutzen, *wenn der Rest R für $n = \infty$ der Null zustrebt.*

Wenn man sich denkt, anstatt der Werthe der Function in unendlich vielen Punkten seien die Werthe der unendlich vielen Derivirten der Function in einem Punkt gegeben — und dieser Fall lässt sich gewissermassen als specieller Fall des ersteren ansehen, falls man voraussetzt, die Punkte, für welche die Werthe der Function gegeben sind, lägen einander unendlich nahe — so wird aus dem Interpolationsproblem das Problem der Taylor'schen Formel. Mit dem Interpolationsproblem haben sich speciell Gauss, *Werke*, 3; Lagrange, *Werke*, 7; Genocchi, *Ann. di mat.*, 6, 1. Ser., 1855; Tschebyscheff, *Acad. de St. Pétersbourg*, 1859 beschäftigt. Ein allgemeineres Problem hat Hermite behandelt, *Crelle*, 84. Andere Arbeiten sind von Frobenius, *Crelle*, 73; Meray, *Ann. de l'éc. norm.*, 1884; Teixeira, *Crelle*, 100; Bendixon, *Compt. Rend.*, 101 und *Acta math.*, 9; Pincherle, *Acc. Bologna*, 1893; Netto, *Math. Ann.*, 42 etc. Siehe des Verfassers *Calcolo delle differenze*, § 17, wo man eingehende Literaturnachweise findet; vergl. auch Markoff a. a. O.

§ 3. Näherungsformeln für Quadraturen.

Die Simpson'sche Formel lautet:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}\Big\{f(a) + 4f\Big(a + \frac{b-a}{2n}\Big) + 2f\Big(a + 2\,\frac{b-a}{2n}\Big) +$$
$$+ 4f\Big(a + 3\,\frac{a-b}{2n}\Big) + 2f\Big(a + 4\,\frac{b-a}{2n}\Big) +$$
$$+ 4f\Big(a + 5\,\frac{b-a}{2n}\Big) + 2f\Big(a + 6\,\frac{b-a}{2n}\Big) +$$
$$+ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + f(b)\Big\} + R',$$

worin der Rest R', wenn f^{IV} stets endlich und stetig ist, durch

$$R' = -\frac{1}{15\cdot 8\cdot 4!}\cdot\frac{(b-a)^5}{n^4} f^{\mathrm{IV}}(\eta), \qquad (a \leq \eta \leq b)$$

gegeben ist.

Bei einem hinlänglich grossen n wird R' klein genug und liefert der erste Theil der Formel einen genügend genauen Werth für das Integral.

Die Cotes'sche Formel hat die Gestalt

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\sum_{i=0}^{i=n} h_n^{(i)} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right) + R';$$

in ihr sind die Grössen $h_n^{(i)}$ von a und b unabhängige Zahlencoefficienten, nämlich

$$h_n^{(i)} = (-1)^{n-i}\,\frac{1}{n\cdot i!\;n-i!}\int_0^n T\,dt,$$

$$T = t(t-1)\cdots(t-i+1)(t-i-1)\cdots(t-n).$$

Diese Zahlen h genügen der Beziehung

$$h_n^{(i)} = h_n^{(n-i)}.$$

Die folgende Tabelle gibt die Werthe von h an.

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$
$n=1$	$\frac{1}{2}$					
$n=2$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$				
$n=3$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$				
$n=4$	$\frac{7}{80}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$			
$n=5$	$\frac{19}{288}$	$\frac{95}{96}$	$\frac{25}{144}$			
$n=6$	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$		
$n=7$	$\frac{751}{17\,280}$	$\frac{3577}{17\,280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{2089}{17\,280}$		
$n=8$	$\frac{989}{28\,350}$	$\frac{2944}{14\,175}$	$-\frac{464}{14\,175}$	$\frac{5248}{14\,175}$	$-\frac{454}{2835}$	
$n=9$	$\frac{2857}{89\,600}$	$\frac{15\,741}{89\,600}$	$\frac{27}{2240}$	$\frac{1209}{5600}$	$\frac{2889}{44\,800}$	
$n=10$	$\frac{16\,067}{598\,752}$	$\frac{26\,575}{149\,688}$	$-\frac{16\,175}{199\,584}$	$\frac{5675}{12\,474}$	$-\frac{4825}{11\,088}$	$\frac{17\,807}{24\,948}$

Die Gauss'sche Quadraturformel (*Werke*, 3) lautet:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{i=n}\frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)}\int_a^b\frac{\varphi(x)}{x-x_i}\,dx,$$

worin

$$\varphi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

ist und die Grössen x_0, x_1, $\cdots$, x_n die Wurzeln der Legendre'schen sphärischen Function (vergl. Kap. 18, § 7)

$$\varphi(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}\} \quad \text{sind.}$$

Ist f eine beliebige Function, so ist die Formel nur annähernd richtig, ist f aber eine *ganze* Function von einem Grad, der auch höher als der n^{te} aber *nicht höher* als der $(2n+1)^{te}$ sein darf, so ist die Formel auch genau, d. h. der Rest ist in diesem Fall Null. Dieser Eigenschaft wegen liefert die Gauss'sche Formel einen grösseren Grad der Genauigkeit, als die übrigen.

Um die Gauss'sche Formel anwenden zu können, muss man die Wurzeln der sphärischen Function $\varphi(x)$ kennen. Des bequemeren Rechnens wegen wollen wir

$$x = a + (b-a)t$$

setzen, so dass sich also die Integration von $t = 0$ bis $t = 1$ erstreckt.

$f(x)$ wird $F(t)$ und das Integral lautet

$$(b-a)\int_0^1 F(t)\,dt = (b-a)\sum_{i=0}^{n} \frac{F(t_i)}{\psi'(t_i)} \int_0^1 \frac{\psi(t)}{t-t_i}\,dt,$$

worin die Grössen t_i die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \{t^{n+1}(t-1)^{n+1}\} = 0 \quad \text{bedeuten.}$$

Diese Wurzeln hat Gauss (*Werke*, 3, S. 193) bis zu 16 Decimalstellen berechnet. In der nebenstehenden Tabelle (S. 233) sind sie bis zur 10ten Decimalstelle angegeben.

Die hauptsächlichsten Arbeiten über die Annäherungsformeln für Quadraturen sind von Gauss, *Werke*, 3, S. 163, 202; Jacobi, *Crelle*, 1; Christoffel, *Crelle*, 55; Tschebyscheff, *Journ. d. Liouville*, 2. Ser., 19; *Mém. de l'Ac. d. St. Pétersbourg*, Bd. 47 u. 60; Markoff, *Math. Ann.*, 25; Stieltjes, *Ann. de l'École norm.*, 3. Ser., Bd. 1; *Compt. rend.*, 99 etc.

Ausführliche Literaturnachweise findet man in des Verfassers *Calcolo delle differenze finite*, Mailand 1897, S. 280 u. ff.

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
t_0	0,5	0,211 324 865 4	0,112 701 665 3	0,069 431 844 2	0,046 910 077 0	0,033 765 242 8	0,025 446 043 8
t_1		0,788 675 134 5	0,5	0,330 009 478 2	0,230 765 344 9	0,169 395 306 7	0,129 234 407 2
t_2			0,887 298 334 6	0,669 990 521 7	0,5	0,380 690 406 9	0,297 077 424 3
t_3				0,930 568 155 7	0,769 234 655 0	0,619 309 593 0	0,5
t_4					0,953 089 922 9	0,830 604 693 2	0,702 922 575 6
t_5						0,966 234 757 1	0,870 765 592 7
t_6							0,974 553 956 1

§ 4. Die inverse Differenzenrechnung.

Die Function $F(x)$, deren Differenz, wenn die successiven Werthe der Variabelen zum constanten Unterschied die Grösse h haben, eine gegebene Function $f(x)$ ist, heisst *das unbestimmte Differenzenintegral* der gegebenen Function. Sie genügt also der Beziehung

$$F(x+h) - F(x) = f(x)$$

für jedes x und wird mit $\sum f(x)$ bezeichnet.

Ist die Function $f(x)$ gegeben, so bleibt das Problem, dieses Differenzenintegral zu ermitteln, doch noch unbestimmt, weil man zu einer Function $F(x)$ eine beliebige Function $\varphi(x)$ hinzufügen kann, deren Differenz Null ist. Der Art ist z. B. die Function

$$\varphi(x) = \psi\left(\sin\frac{2\pi x}{h},\ \cos\frac{2\pi x}{h}\right).$$

Wir meinen daher immer, *dass die Integralfunction F abgesehen von Functionen, deren Differenzen Null sind, berechnet werden soll.*

Das Differenzenintegral der algebraischen Summe mehrerer Functionen ist der algebraischen Summe der Integrale der Functionen gleich.

Die Function $f(x)$ sei gegeben und man habe das unbestimmte Integral $F(x)$ gefunden; die Differenz

$$F(a+nh) - F(a)$$

heisst dann *das bestimmte Differenzenintegral* und wird mit

$$\sum_{a}^{a+(n-1)h} f(x)$$

bezeichnet. Es ist gleich der Summe von n Termen

$$f(a) + f(a+h) + \cdots + f[a+(n-1)h].$$

In den folgenden Formeln sind für $h=1$ die bestimmten Differenzenintegrale der einfachsten *ganzen* Functionen berechnet worden. Man erhält so die wichtigen Formeln für die Summe der ganzen Potenzen der natürlichen Zahlen.

$$\sum x^m = \frac{1}{m+1}x^{m+1} - \frac{1}{2}x^m + \frac{1}{12}mx^{m-1} - \cdots,$$

$$\sum_{x=1}^{n} x = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3!},$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30},$$

$$\sum_{x=1}^{n} x^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}.$$

Setzt man $s = \sum_{1}^{n} x$, so ergibt sich (Seitz und Gander, *The analyst*, 6, Jahrg. 1879):

$$\sum_{1}^{n} x^9 = \tfrac{1}{5}(6s^5 - 20s^4 + 12s^3 - 3s^2).$$

Die Summe der dritten Potenzen der n ersten natürlichen Zahlen ist dem Quadrat der Summe dieser Zahlen gleich.

Arbeiten über die polynomen Ausdrücke für die Summen solcher Potenzen der natürlichen Zahlen sind von Glaisher, *Messenger,* 2. Ser., Bd. 5; Dostor, *Grunert's Archiv,* 63, 64; *Nouv. Annales,* 2. Ser., 18; Cesàro, *Mathesis,* 5; Appell, *Nouv. Ann.,* 3. Ser., Bd. 6, etc.

Die Berechnung der Differenzenintegrale für andere complicirtere Functionen begegnet nicht geringen Schwierigkeiten. Näheres findet man in des Verfassers *Calcolo delle differenze,* S. 289 u. ff.

Ein bestimmtes Differenzenintegral lässt sich durch das bestimmte gewöhnliche Integral der Function ausdrücken; die entsprechende Formel, welche man die Euler'sche zu nennen pflegt, lautet:

$$h\sum_{a}^{b} f(x) - \int_{a}^{b} f(x)\,dx = -\frac{1}{2}h\,[f(x)]_a^b + \frac{B_2}{2!}h^2\,[f'(x)]_a^b -$$
$$-\frac{B_4}{4!}h^4\,[f'''(x)]_a^b + \frac{B_6}{6!}h^6[f^{V}(x)]_a^b - \cdots,$$

worin B_2, B_4, B_6, $\cdots$ die Bernoulli'schen Zahlen (Kap. 18, §§ 3 u. 4) sind. Unter den Symbolen $[f(x)]_a^b$, $[f'(x)]_a^b$, $\cdots$ sind die Differenzen $f(b)-f(a)$, $f'(b)-f'(a)$, $\cdots$ verstanden.

Diese Formel ist von grossem Interesse; sie wurde von Euler in den Werken: *Methodus generalis summandi progressiones,* Comment. Ac. Petropolitanae, 6, 1732, 1733; *Inventio summae* etc., ib., 8; *Methodus universalis series summandi* etc., ib., 8 mitgetheilt und besprochen. Neuere Arbeiten über die Euler'sche Formel sind von Malmsten, *Acta math.,* 5; Sonin, *Ann. de l'Éc. norm.,* 3. Ser., 6; *Compt. Rend.,* Bd. 108, 1889.

In der inversen Differenzenrechnung kann man ähnliche Probleme aufstellen, wie bei den Differentialgleichungen. Eine Relation zwischen der Function und ihren successiven Differenzen bis zur n^{ten} Ordnung heisst eine *Differenzengleichung* n^{ter} *Ordnung.* Es lässt sich alsdann eine Theorie der *linearen Differenzengleichungen* ausbilden; d. h. solcher Gleichungen, deren linke Seite eine lineare Function von y und seinen Differenzen mit Coefficienten ist, die Functionen von x sind. Diese Theorie hat viele Berührungspunkte mit der Lehre von den linearen Differentialgleichungen (vergl. Kap. 8, § 3).

Das Problem der Integration der Differenzengleichungen bietet im Allgemeinen keine geringen Schwierigkeiten dar.

Arbeiten, die sich auf *specielle* Differenzengleichungen beziehen, sind von Thomae, *Schlömilch's Zeitschr.,* 16; Le Paige, *Nouv. Corresp. math.,* 2 u. 3; Sylvester, *Phil. Mag..* 1879; *Americ. Journ.,* 4; *Messenger,* 2. Ser., 18; Cesàro, *Nouv. Ann.,* 3. Ser., 5; Pincherle, *Rend. Ist. Lomb.,* 1886; *Rend. Acc. Lincei,* 1894, 1895; *Acc. Bologna,* 1894, 1895, etc.

Als die wichtigsten Werke über diese Lehre citiren wir: Lacroix, *Traité des diff.,* Paris 1800; Herschel, *Collection of examples of the calculus of finite differences,* Cambridge 1820; Schlömilch, *Differenzen und Summen,* Halle 1848; George Boole, *Die Grundlehren der endlichen Differenzen- und Summenrechnung,* deutsch von Schnuse, Braunschweig 1867, dessen englischer Titel *Treatise on the calculus of finite differences,* Cambridge 1860 lautet; das ganz neue Werk Markoff's: *Differenzenrechnung,* deutsche Uebersetzung, Leipzig 1896 und Pascal, *Calcolo delle differenze finite,* Mailand 1897.

Kapitel XI.

Die Variationsrechnung.

§ 1. Allgemeines. Die erste Variation der Integrale.

Man habe die beiden Curven, deren Gleichungen

$$y = f(x),$$
$$y_1 = f_1(x_1)$$

sind, und könne zwischen den Punkten (x, y) der einen und den Punkten (x_1, y_1) der anderen eine willkürliche aber derartige Beziehung feststellen, dass der Abstand zwischen den beiden sich entsprechenden Punkten unendlich klein ist, d. h. der Null zustrebt; alsdann sagt man, die Coordinaten x, y eines Punktes hätten bei dem Uebergang von der ersten Curve zur zweiten *eine Variation* erlitten.

Die Differenz zwischen den Abscissen der sich entsprechenden Punkte bezeichnen wir mit dem (Lagrange'schen) Symbol

$$x_1 - x = \delta x$$

und nennen sie *die Variation von* x (der unabhängigen Veränderlichen); die Differenz zwischen den zwei Ordinaten der sich entsprechenden Punkte ist im Allgemeinen eine Summe von Unendlichkleinen verschiedener Ordnung; der Theil von der kleinsten Ordnung heisst die *Variation von* y und wird mit δy bezeichnet.

Wenn eine Function F von $x, y, y', y'', \cdots$ vorliegt, worin $y', y'', \cdots$ die Derivirten der Function y sind und man von der ersten Curve zur *variirten* übergeht, so erfährt F im Allgemeinen einen unendlich kleinen Zuwachs, dessen Theil von der kleinsten Ordnung *die Variation von* F *genannt und durch* δF *dargestellt wird.*

Die Variation von F *setzt sich zusammen: aus der Variation von* F *für den speciellen Fall, in welchem* x *unverändert bleibt, d. h. die sich entsprechenden Punkte dieselbe Abscisse haben, und aus einem Term, den man durch Multiplication der totalen Derivirten von* F *nach* x *mit* δx *erhält.*

Die Variation von F ist, falls x unverändert bleibt:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'' + \cdots,$$

worin δy, $\delta y'$, $\delta y''$, $\cdots$ die Variationen von y, y', y'', $\cdots$ bei unverändertem x bedeuten. Wenn F noch andere Functionen z, u, $\cdots$ von x enthält, so braucht man nur die den obigen analogen Terme, die sich auf diese anderen Functionen beziehen, hinzuzufügen.

Die Variation des bestimmten Integrals

$$I = \int_{x'}^{x''} F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(r)})\, dx$$

ist durch

$$\delta I = \int_{x'}^{x''} \delta F dx + [F\delta x]_{x'}^{x''}$$

gegeben, worin δF die Variation von F unter der Voraussetzung bedeutet, dass x nicht variirt wird.

Wenn F auch eine Function der Grenzen x', x'' ist, so hat man auf der rechten Seite noch die beiden Terme

$$\delta x' \int_{x'}^{x''} \frac{\partial F}{\partial x'} dx \quad \text{und} \quad \delta x'' \int_{x'}^{x''} \frac{\partial F}{\partial x''} dx \quad \textit{hinzuzufügen.}$$

Die Variation eines bestimmten Integrals von dem vorstehenden Typus kann man für den allgemeineren Fall, in welchem F auch andere Functionen z, u, $\cdots$ und ihre Derivirten und speciell die Derivirten von y bis zur r^{ten}, die von z bis zur s^{ten}, etc. Ordnung enthält, immer auf den Typus zurückführen:

$$\begin{aligned}\delta I = [F\delta x + K_1\delta y + K_1'\delta y' + \cdots + K_1^{(r-1)}\delta y^{(r-1)} + \\ + K_2\delta z + K_2'\delta z' + \cdots + K_2^{(s-1)}\delta z^{(s-1)} + \\ + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot]_{x'}^{x''} + \\ + \int_{x'}^{x''} (H_1\delta y + H_2\delta z + \cdots)\, dx,\end{aligned}$$

worin

$$H_1 = M - \frac{dM'}{dx} + \frac{d^2M''}{dx^2} - \cdots,$$

$$H_2 = N - \frac{dN'}{dx} + \frac{d^2N''}{dx^2} - \cdots,$$

$$K_1 = M' - \frac{dM''}{dx} + \frac{d^2M'''}{dx^2} - \cdots,$$
$$K_2 = N' - \frac{dN''}{dx} + \frac{d^2N'''}{dx^2} - \cdots,$$
$$K_1' = M'' - \frac{dM'''}{dx} + \frac{d^2M^{IV}}{dx^2} - \cdots,$$
$$K_2' = N'' - \frac{dN'''}{dx} + \frac{d^2N^{IV}}{dx^2} - \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und

$$M = \frac{\partial F}{\partial y},\ M' = \frac{\partial F}{\partial y'},\ M'' = \frac{\partial F}{\partial y''},\ \cdots,$$
$$N = \frac{\partial F}{\partial z},\ N' = \frac{\partial F}{\partial z'},\ N'' = \frac{\partial F}{\partial z''},\ \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \textit{ist.}$$

Kritische Bemerkungen in Bezug auf diese Transformation der Formel für die Variation der bestimmten Integrale findet man bei Du Bois-Reymond, *Math. Ann.*, 15, S. 294.

Wenn das Integral

$$\int_{x'}^{x''} (H_1 \delta y + H_2 \delta z + \cdots) dx$$

für alle beliebigen den willkürlichen Functionen δy, δz, $\cdots$ beigelegten Werthe identisch gleich Null ist, so müssen die Grössen H_1, H_2, $\cdots$ jede für sich Null sein (das Fundamentallemma).

Kritische Untersuchungen über dieses Fundamentallemma hat Heine, *Math. Ann.*, 2; Du Bois-Reymond, ib., 15; Meray, *Ann. de l'Éc. norm.*, 2. Ser., 7 angestellt; vergl. auch Pascal, *Variationsrechnung*, deutsch von Schepp, S. 30.

Wenn man die Functionen y, z, $\cdots$ von x und die Grenzen x', x'' derart bestimmen will, dass das Integral I seinen grössten oder kleinsten Werth erhält, so muss man $\delta I = 0$ setzen, wozu dann wieder nöthig ist, dass

$$H_1 = 0,\ H_2 = 0,\ \cdots$$

und

$$\Gamma = \Big[F\delta x + K_1 \delta y + K_1' \delta y' + \cdots + K_1^{(r-1)} \delta y^{(r-1)} + \\ + K_2 \delta z + K_2' \delta z' + \cdots + K_2^{(s-1)} \delta z^{(s-1)} + \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots \Big]_{x'}^{x''} = 0$$

sei.

Die Beziehung $\Gamma = 0$ heisst die *Grenzengleichung.*

Die Gleichungen $H_1 = 0$, $H_2 = 0, \cdots$ sind Differentialgleichungen, welche, wenn sie integrirt werden, die Functionen $y, z, \cdots$ mit einer gewissen Anzahl von willkürlichen Constanten liefern, deren Bestimmung mit Hülfe der Grenzengleichung geschieht.

Sind die Werthe der Function y und ihrer ersten $r - 1$ Derivirten, ferner auch die der Function z und ihrer ersten $s - 1$ Derivirten etc. in den beiden Grenzpunkten x' und x'' gegeben, und sind auch die Grenzen selbst festgesetzt, alsdann ist

$$\delta x' = \delta x'' = 0 \quad \text{und}$$

$$\delta y = \delta y' = \cdots = 0, \quad \delta z = \delta z' = \cdots = 0$$

und daher die Grenzengleichung identisch durch sich allein erfüllt.

Sind aber diese Werthe nicht gegeben, so zerfällt die Gleichung $\Gamma = 0$ in

$$F_{x'} = 0, \quad F_{x''} = 0,$$
$$K_{1,x'} = 0, \; K'_{1,x'} = 0, \; \cdots, \; K_{1,x''} = 0, \; K'_{1,x''} = 0, \; \cdots,$$
$$K_{2,x'} = 0, \; K'_{2,x'} = 0, \; \cdots, \; K_{2,x''} = 0, \; K'_{2,x''} = 0, \; \cdots.$$

Jedes allgemeine Problem der Variationsrechnung lässt sich, wenn die Werthe der Grenzen, der Functionen und ihrer Derivirten an den Grenzen nicht angegeben sind, in zwei Probleme zerlegen, von denen das eine der Variationsrechnung angehört und dem gegebenen ähnlich aber derart ist, dass die Grenzen, sowie die Werthe der Functionen und ihrer Derivirten an den Grenzen als gegeben angenommen werden, und von denen das andere ein gewöhnliches Problem der Differentialrechnung in Bezug auf die Maxima und Minima von Functionen mehrerer Variabelen ist. Vergl. Kap. 6, § 7, S. 125. Ueber die Berechtigung dieser Reduction siehe Mayer, *Crelle,* 69; *Leipz. Berichte,* 1884 u. 1896.

Sind zwischen den unbekannten Functionen $y, z, \cdots$ Differentialbeziehungen

$$\varphi_1 = 0, \cdots, \varphi_m = 0 \quad (m < n)$$

gegeben, so heisst das Problem des Maximums und Minimums des bestimmten Integrals *ein Problem des relativen Maximums und Minimums,* anderenfalls *ein Problem des absoluten Maximums und Minimums.* Das letztere ist ein specieller Fall des ersteren (für $m = 0$).

Das erste allgemeinere Problem der Variationsrechnung lässt sich immer auf die folgende canonische Form zurückführen:

Das Integral

$$\int_{x'}^{x''} F\,dx$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen, in welchem F die Veränderliche x, die Functionen $y_1, y_2, \cdots, y_n$ und *nur* die *ersten* Derivirten dieser Functionen enthält, und ausserdem die Functionen $y_1, \cdots$ durch *die Differentialgleichungen erster Ordnung* $\varphi_1 = 0, \cdots, \varphi_m = 0$ verbunden sind *(das Lagrange'sche Problem).*

Dieses Problem wird dadurch gelöst, dass man auf die oben angegebene Art das absolute Maximum oder Minimum des Integrals

$$\int_{x'}^{x''} \Omega\,dx$$

ermittelt, worin

$$\Omega = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i$$

ist und die Grössen λ neue unbekannte Functionen von x bedeuten (die Lagrange'sche Methode der Multiplicatoren, Fonctions analyt., S. 292; *Calcul des fonctions,* S. 460).

Man kann sich ein allgemeineres Problem, als das Lagrange'sche vorstellen:

Es seien $m+1$ Differentialgleichungen

$$\varphi_1 = 0, \cdots, \varphi_m = 0, \varphi_{m+1} = 0, \quad (m < n)$$

gegeben, welche die Variabelen x und die unbekannten Functionen $y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}$ enthalten. Von den n ersten dieser Functionen seien die Werthe in den beiden Punkten x' und x'' bestimmt und ebenso der Werth von y_{n+1} in dem Punkt x'. Man soll solche Werthe dieser Functionen ermitteln, dass sie alle gegebenen Differentialgleichungen und die an den Grenzen vorgeschriebenen Bedingungen erfüllen, und zugleich y_{n+1} für $x = x''$ ein Maximum oder Minimum wird. Dieses Problem wird das Adolph Mayer'sche genannt. *Leipz. Berichte,* 1878 und 1895.

Wenn speciell $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ die Grösse y_{n+1} nicht enthalten und $\varphi_{m+1} = 0$ die Form

$$y'_{n+1} = F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y'_1, y'_2, \cdots, y'_n)$$

hat, und $y_{n+1} = 0$ für $x = x'$ ist, so kommt man auf das Lagrange'sche Problem zurück.

Das Mayer'sche Problem wird durch eine Methode aufgelöst, die eine Erweiterung der Methode der Multiplicatoren ist, vergl. *Leipz. Berichte,* 1895.

Das isoperimetrische Problem, das man als speciellen Fall des Lagrange'schen ansehen kann, besteht darin, das Integral

$$I = \int_{x'}^{x''} F\,dx$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen, während zugleich die Integrale

$$I_1 = \int_{x'}^{x''} F_1\,dx, \cdots, I_m = \int_{x'}^{x''} F_m\,dx$$

bestimmte Werthe $l_1, l_2, \cdots, l_m$ *annehmen sollen. Es wird dadurch aufgelöst, dass man das absolute Maximum oder Minimum des Integrals*

$$J = \int_{x'}^{x''} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i\right) dx = \int_{x'}^{x''} \Phi\,dx$$

sucht, in welchem die Grössen λ *als constant anzunehmen sind.*

Diese sogenannte *Euler'sche Methode (Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti,* 1744*)* kann man als einen speciellen Fall der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode ansehen.

Eine der ersten Untersuchungen über die Genauigkeit der Euler'schen Methode, welche die Vorgänger für ein Axiom gehalten haben, rührt von Bertrand her, *Journ. d. Liouville,* 7, 1842. Später beschäftigten sich mit ihr Du Bois-Reymond, *Math. Ann.,* 15, S. 310 und 573, der *zwei* Beweise gab und Scheeffer, *Math. Ann.,* 25, S. 583.

Einen Beweis der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode verdankt man Mayer, *Math. Ann.,* 26; *Leipz. Berichte,* 1885; neuerdings hat Turksma das Thema wieder aufgenommen, *Math. Ann.,* 47; siehe auch Pascal, *Variationsrechnung,* §§ 11—14.

Wenn es sich um ein Problem des absoluten Maximums oder Minimums handelt und die zu integrirende Function F die

Derivirten der unbekannten Functionen nur bis zur ersten Ordnung enthält, so ist es nöthig, wenn das Problem allgemein lösbar sein soll, dass die Hesse'sche Determinante von F, die letztere Grösse als Function der ersten Derivirten betrachtet, von Null verschieden sei.

Insbesondere muss bei nur einer unbekannten Function die zweite Derivirte von F nach y' von Null verschieden sein.

Unter denselben Bedingungen wie vorher und unter der Annahme, F enthalte die Derivirten der unbekannten n Functionen bis zur r^{ten} Ordnung, muss, wenn sich das Problem auflösen lassen soll, die Hesse'sche Determinante von F, die letztere Grösse als Function der r^{ten} Derivirten betrachtet, von Null verschieden sein. Lipschitz, *Crelle,* 65.

Ist speciell $n = 1$, so ist es nöthig, dass die zweite Derivirte von F nach $y^{(r)}$ nicht verschwinde. Jacobi, *Crelle,* 17.

Bei dem allgemeinen Problem des relativen Maximums oder Minimums wird, wenn es auf die canonische Form, d. h. also derart reducirt ist, dass in seinen Daten nur die ersten Derivirten der unbekannten Functionen auftreten (siehe oben), die Möglichkeit der Auflösung des Problems dadurch bedingt, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1'^2}, & \cdots, & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1' \partial y_n'}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'}, & \cdots, & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_n' \partial y_1'}, & \cdots, & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_n'^2}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}, & \cdots, & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'}, & \cdots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}, & 0, & \cdots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'}, & \cdots, & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'}, & 0, & \cdots, & 0 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sein muss. In dieser Formel hat Ω den oben angegebenen Werth.

Schliesslich besteht bei dem isoperimetrischen Problem, wenn $F, F_1, \cdots, F_m$ nur die ersten Derivirten der unbekannten Functionen und keine höheren enthalten, die Bedingung für die Möglichkeit seiner Auflösung darin, dass die Hesse'sche Determinante von Φ (siehe oben), die letztere Grösse als Function der ersten Derivirten betrachtet, von Null verschieden sei.

Man kann sagen, dass die Variationsrechnung aus dem von Johann Bernoulli 1696 aufgestellten *Problem der Brachisto-*

chrone (vergl. § 4) hervorgegangen ist. — Die erste wichtige Arbeit war von Euler 1744 (a. a. O.); dann erschien die Abhandlung von Lagrange, *Misc. Taurinensia,* Bd. 2, 1762, die als grundlegend für die Theorie angesehen werden kann; später folgten Euler, *Nova Comm. Petrop.,* 1764, derselbe Lagrange, *Misc. Taurinensia,* 4, 1770 und Andere.

Lagrange fuhr fort, sich mit der Variationsrechnung zu beschäftigen und stellte sie später auf eine andere Art in der *Théorie des fonctions,* 1797 und dem *Calcul des fonctions,* 1806 dar, nachdem er schon früher 1788 in seiner *Mécanique analytique* seine berühmte *Methode der Multiplicatoren* zur Reduction der Probleme relativen Maximums und Minimums auf Probleme absoluten Maximums und Minimums auseinandergesetzt hatte.

Neuere Arbeiten über die Variationsrechnung sind von Du Bois-Reymond, *Math. Ann.,* 15; Scheeffer, ib., 25 und besonders von Mayer, ib., 26; *Leipz. Berichte,* 1878, 1884, 1885, 1895, 1896 und von Turksma, *Math. Ann.,* 47.

Ueber die Literatur bez. der *zweiten Variation* und bez. der Variation der mehrfachen Integrale siehe §§ 2, 3.

Die Haupt*lehrbücher* über die Variationsrechnung, abgesehen von den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung, die sie fast sämmtlich behandeln, sind: Strauch, Zürich 1849; Jellett, Dublin 1850, deutsch von Schnuse, Braunschweig 1860; Stegmann, Kassel 1854; Lindelöf-Moigno, Paris 1861; Natani, Berlin 1866; Dienger, Braunschweig 1867. Ein ganz neues Werk, in welchem sich viele historische und literarische Angaben vorfinden, ist das Pascal'sche, Mailand 1897, deutsche Uebersetzung, Leipzig 1899. Am Anfang dieses Buches findet man eine historische Uebersicht über die Variationsrechnung. Schliesslich sei noch die Behandlung der Variationsrechnung in Jordan's *Cours d'analyse,* Tome 3 hervorgehoben.

§ 2. Die zweite Variation.

Die in § 1 angegebenen Bedingungen sind nöthig; will man auch die ausreichenden Bedingungen finden, unter welchen das Maximum oder Minimum existirt, so muss man die sogenannte *zweite Variation* zu Hülfe nehmen.

Die *zweite Variation* von Integralen der Art, wie wir sie in § 1 betrachtet haben, erhält man dadurch, dass man auf

die *erste Variation* dasselbe Verfahren wieder anwendet, mittelst dessen diese letztere aus dem Integral selbst gefunden wurde.

Unter der Voraussetzung, dass die Grenzen des Integrals nicht variabel sind (und auf diesen Fall kann man immer reduciren, vergl. § 1) hat die zweite Variation $\delta^2 I$ des Integrals I die Form

$$\begin{aligned}\delta^2 I = \frac{1}{2}\int_{x'}^{x''}\Big(&\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\delta y_1^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2}\delta y_2^2 + \cdots + \\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial y_1'^2}\delta y_1'^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y_2'^2}\delta y_2'^2 + \cdots + \\ &+ 2\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2}\delta y_1 \delta y_2 + \cdots + \\ &+ 2\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_1'}\delta y_1 \delta y_1' + \cdots + \\ &+ 2\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2'}\delta y_1 \delta y_2' + \cdots + \\ &+ 2\frac{\partial^2 F}{\partial y_1' \partial y_2'}\delta y_1' \delta y_2' + \cdots\Big)\,dx.\end{aligned}$$

Das heisst: die zweite Variation des bestimmten Integrals ist ein Ausdruck von dem Typus

$$\int_{x'}^{x''} Q(\delta y_1, \delta y_2, \cdots, \delta y_n, \delta y_1', \cdots, \delta y_n', \delta y_1'', \cdots)\,dx,$$

worin Q in Bezug auf $\delta y_1, \cdots, \delta y_n, \delta y_1', \cdots$ eine *quadratische Form* ist und die Coefficienten die zweiten Derivirten von F nach allen $y, y', y'', \cdots$ sind.

Ist die zweite Variation nicht Null, so muss, damit das Integral ein Maximum oder Minimum habe, die zweite Variation für alle möglichen Systeme von Werthen, die man den Variationen $\delta y_1, \delta y_2, \cdots, \delta y_1', \delta y_2', \cdots$ *beilegen kann, und die sich mit den Beziehungen vertragen, welche die Variationen ihrer eignen Natur nach miteinander verbinden, immer dasselbe Vorzeichen behalten.*

Wenn die Grössen $\delta y_1, \delta y_2, \cdots, \delta y_1', \cdots$ als von einander unabhängig angesehen werden könnten, so würde es für das Constantbleiben des Vorzeichens von $\delta^2 I$ ausreichen, wenn das Vorzeichen von Q zwischen den Integrationsgrenzen dasselbe bliebe. Da man aber diese Unabhängigkeit nicht voraussetzen kann, weil z. B. $\delta y_1'$ von δy_1 nicht unabhängig ist, so ist man

auf die Lösung des Problems *der Transformation der zweiten Variation* angewiesen. Dieses Problem besteht darin, *die quadratische Form Q in*

$$Q = \frac{d}{dx} Q_2 + Q_1$$

zu transformiren, worin Q_2 *eine quadratische Form ist, die für* $x = x'$ *und* $x = x''$ *Null wird und* Q_1 *ebenfalls eine quadratische Form bezeichnet, aber nicht mehr in Bezug auf die ursprünglichen Variabelen* $\delta y_1, \cdots, \delta y_1', \cdots$, *sondern auf n andere* $\delta Y_1, \cdots, \delta Y_n$, *die linear aus den früheren gebildet sind und als durchaus unabhängig von einander angesehen werden können: dabei darf ausserdem* Q_1 *innerhalb der Integrationsgrenzen niemals unendlich gross werden.*

Ist dieses Problem gelöst, so besteht die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit $\delta^2 I$ ein constantes Vorzeichen habe, darin, dass Q_1 ein solches besitze.

Mit diesem Problem haben sich zuerst Legendre, *Mém. de l'Ac. de Paris,* 1786, 1789 und Lagrange, *Théorie des fonct. analyt.; Werke,* Bd. 9, S. 296 u. ff. beschäftigt; dann folgten die classischen Arbeiten Jacobi's, *Crelle,* 17; *Journ. de Liouville,* 3 und später eine lange Reihe anderer: Le Besgue, *Journ. de Liouville,* 6; Delaunay, ib., id.; Bertrand, *J. de l'Éc. Polyt.,* Cah. 28; Brioschi, *Ann. di mat.,* 1. Ser., 3; Hesse, *Crelle,* 54; Clebsch, *Crelle,* 55; Lipschitz, *Crelle* 65; Mayer, *Crelle,* 69; *Math. Ann.,* 13 etc. Ein vollständiges Verzeichniss findet man in dem in § 1 citirten Buch Pascal's.

Falls sich die unbekannten Functionen auf eine einzige y reduciren, kann man die zweite Variation immer auf die Form

$$\int_{x'}^{x''} \delta\mu\, \delta y\, dx = \int_{x'}^{x''} \Big\{ A_0 \delta y - \frac{d(A_1 \delta y')}{dx} + \frac{d^2(A_2 \delta y'')}{dx^2} - \cdots + \\ + (-1)^r \frac{d^r(A_r \delta y^{(r)})}{dx^r} \Big\} \delta y\, dx$$

bringen, worin die Grössen A Functionen von x sind (das erste Jacobi'sche Theorem. Crelle, Bd. 17).

Die Differentialgleichung $\delta\mu = 0$, *welche in* δy *und seinen Derivirten linear ist, wird durch* $\delta y = \frac{\partial y}{\partial c}$ *identisch erfüllt, worin c eine beliebige der Integrationsconstanten bedeutet, welche in dem allgemeinen Ausdruck des Integrals y der Differentialgleichung*

$$0 = \mu = M - \frac{dM'}{dx} + \frac{d^2M''}{dx^2} - \cdots \text{ (vergl. § 1)}$$

auftreten (das zweite Jacobi'sche Theorem).

Setzt man

$$\delta y = t_1 z_1,$$
$$t_1 = C_1' \frac{\partial y}{\partial c_1} + \cdots + C_{2r}' \frac{\partial y}{\partial c_{2r}},$$

worin die Grössen C neue willkürliche Constanten bedeuten und die Grössen c die Constanten sind, welche sich bei der Integration der Differentialgleichung $\mu = 0$ ergeben, nimmt man ferner an, die Grösse t_1 sowohl, wie ihre ersten $r-1$ Derivirten, können in zwei beliebigen Punkten des Integrationsweges, insbesondere in den beiden Grenzpunkten, nicht verschwinden, so lässt sich die zweite Variation in

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} z_1' \left\{ b_1 z_1' - \frac{d(b_2 z_1'')}{dx} + \cdots + (-1)^r \frac{d^{r-1}(b_r z_1^{(r)})}{dx^{r-1}} \right\} dx$$

umwandeln.

Diese Transformation führt den Namen *der Jacobi'schen.*

Durch successive Ausführungen dieser Transformation erhält man schliesslich:

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} z_r'^2 B_r dx,$$

worin

$$B_r = \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(r)2}} t_1^2 \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{t_2}{t_1}\right)\right]^2 \left[\frac{d}{dx} \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{t_3}{t_1}\right)}{\frac{d}{dx}\left(\frac{t_2}{t_1}\right)}\right]^2 \cdots$$

ist und t_2, t_3, $\cdots$ gebildet wird, wie t_1, aber mit verschiedenen Constanten C.

Wenn sich diese Constanten C derart bestimmen lassen, dass die Grösse unter dem Integralzeichen für kein auf dem Integrationsweg gelegenes x unendlich gross wird und wenn keine Werthe der C existiren, für welche t_1 oder t_2, $\cdots$ und die sämmtlichen ersten. $\cdots$, $(r-1)^{\text{ten}}$ Derivirten in zwei Punkten des Integrationsweges verschwinden, wenn ferner $\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(r)2}}$ stets dasselbe Vorzeichen behält und für kein in dem Integrationsbereich liegendes x

unendlich gross wird, alsdann muss die gefundene Lösung unzweifelhaft einem Maximum oder Minimum entsprechen, je nachdem

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(r)2}}$$

constant negativ oder positiv bleibt.

Für den Fall $r = 1$ reducirt sich die zweite Variation auf die Form

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \left[\delta y' - \frac{t'}{t} \delta y\right]^2 dx$$

und das Kriterium, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt, lässt sich leicht aus dem vorigen Satz ableiten.

Siehe des Verfassers *Variationsrechnung,* Leipzig 1899.

§ 3. Die Variation der vielfachen Integrale.

Aehnliche Betrachtungen, wie über die einfachen, lassen sich auch über die vielfachen Integrale anstellen.

Es sei z eine Function von x und y und es liege das über eine begrenzte Fläche erstreckte Doppelintegral

$$I = \iint F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \cdots\right) dx\, dy \quad \text{vor.}$$

Führt man die Variationen von z, x, y ein und definirt sie ähnlich, wie in § 1, so lässt sich die erste Variation von I immer schreiben:

$$\delta I = \iint \delta F\, dx\, dy + \iint \left[\frac{\partial}{\partial x}(F \delta x) + \frac{\partial}{\partial y}(F \delta y)\right] dx\, dy.$$

Diese Formel heisst die Ostrogradsky'sche, *Ac. St. Pétersbourg,* 1834; *Crelle,* 15 und ist eine Ausdehnung der früher in § 1 angegebenen Formel.

Bei den einfachen Integralen war die Formel von Wichtigkeit, mittelst welcher die erste Variation eines Integrals derart transformirt wird, dass unter dem Integralzeichen die Variationen der Derivirten der unbekannten Functionen nicht mehr auftreten. Die entsprechende Formel für vielfache Integrale heisst die Delaunay'sche, *Journ. de l'Éc. Polyt.,* Cah. 29.

Die Variation der vielfachen Integrale haben schon Euler und Lagrange untersucht; Gauss aber war der erste, der ein

Problem behandelte, das sich auf die Variation eines vielfachen Integrals mit veränderlichen Integrationsgrenzen bezog, *Comment. Soc. Gott.*, Bd. 7, 1833. Auf Gauss folgte Poisson, *Mém. de l'Ac. de Paris*, 12, 1833 und später Ostrogradsky a. a. O. Eine von der Pariser Akademie 1842 ausgeschriebene Preisbewerbung gab Veranlassung zu zwei Arbeiten von Sarrus, *Mém. des Sav. Étrang.*, 1846 und Delaunay a. a. O. Andere Arbeiten sind von Clebsch, *Crelle*, 56 und die neueren von Sabinin, *Bull. de St. Pétersb.*, 15, 1870; ib., 1878; *Ann. di mat.*, Ser. 3, Bd. 2.

§ 4. Verschiedene Probleme der Variationsrechnung.

Das Newton'sche Problem. Die ebene durch zwei gegebene Punkte gehende Curve mit stetig bleibender Tangente zu finden, welche durch Rotation um eine gegebene Axe den Körper erzeugt, der, in der Richtung seiner Axe in eine Flüssigkeit getaucht, den geringsten Widerstand findet (Rotationskörper von geringstem Widerstand).

Es wird die Voraussetzung gemacht, dass der Widerstand, welchen der Körper bei dem Eintauchen findet, dem Quadrat der Componente der Geschwindigkeit in der Richtung der Normalen zur Oberfläche proportional sei und die Richtung dieser Normalen habe.

Wenn die Rotation um die x-Axe stattfindet, so bestehen die folgenden Gleichungen für die Coordinaten x, y der Curve als Functionen von y':

$$x = a\left(\frac{3}{4y'^4} + \frac{1}{y'^2} + \log y'\right) + b,$$

$$y = \frac{a(1+y'^2)^2}{y'^3}.$$

Die Curve hat eine Spitze in dem Punkt, für welchen $y' = \sqrt{3}$ ist.

Dieses Problem wurde von Newton behandelt, *Principia mathematica* etc., London 1686, lib. 2, sect. 7, prop. 34, schol. Später beschäftigte sich auch Euler mit ihm, *Methodus inveniendi* etc., 1744, art. 36. Es gab Legendre Veranlassung zu interessanten kritischen Betrachtungen, *Mém. de Paris*, 1786; eine neuere Arbeit ist von August, *Crelle*, Bd. 103, 1888; vergl. auch des Verfassers *Variationsrechnung*, § 30.

Das Problem der Brachistochrone. Welchen Weg muss ein beweglicher Körper verfolgen, welcher die Anfangsgeschwindigkeit v_0 *besitzt und nur der Schwerkraft unterliegt, damit er in der kürzesten Zeit von einem Punkt mit den Coordinaten* x_0, y_0, z_0 *zu einem anderen Punkt* x_1, y_1, z_1 *gelange, wenn dabei das Mittel, in welchem die Bewegung vor sich geht, entweder der leere Raum ist, oder einen Widerstand leistet, welcher eine Function der Geschwindigkeit des beweglichen Körpers ist?*

Die Curve ist eine Cycloide mit horizontaler Basis. Vergl. Bd. 2, Kap. 17, § 12.

Wenn der Endpunkt der Curve sich auf einer anderen gegebenen Curve befinden soll, so trifft die Bahn diese letztere Curve rechtwinklig.

Das Problem der Brachistochrone hat wohl die Veranlassung zur Variationsrechnung gegeben, während das Newton'sche die Aufmerksamkeit der Analytiker nicht besonders auf sich gezogen hat. Man kann daher sagen, die Geschichte der Variationsrechnung fange mit der Geschichte des Problems der *Brachistochrone* an.

Es wurde zuerst von Johann Bernoulli in den *Acta Erud.*, Juni 1696, S. 269; *Programma edit. Groningae,* 1697 aufgestellt. Er selbst gab eine Lösung in den *Acta Erud.*, Mai 1697, S. 206. Vergl. in Bezug auf diese Arbeiten *Ostwald's Klassiker* etc., Nr. 46, Leipzig 1894.

In demselben Band der *Acta Erud.*, S. 211, erschien eine andere Lösung dieses Problems von Jacob Bernoulli, der seinerseits Probleme allgemeinerer Art zur Discussion stellte, die später unter dem gemeinsamen Namen der *isoperimetrischen* Probleme zusammengefasst wurden.

Eine Arbeit, welche dazu bestimmt war, diese Probleme allgemeinerer Natur aufzulösen, war von Johann Bernoulli, *Mém. de l'Ac. de Paris,* 1706, sie hatte aber Fehler und verstiess gegen die Principien der Differentialrechnung.

Wichtiger war die Arbeit Jacob Bernoulli's, *Analysis magni problematis isoperimetrici,* Acta Eruditorum, 1701, auf welche dann die Taylor'sche Lösung in seiner *Methodus incrementorum* folgte; später erschienen dann andere Studien von Johann Bernoulli, *Mém. de l'Ac. de Paris,* 1718 und von Euler, *Comm. Acad. Petrop.*, Bd. 6, 1732, 1733. Der letztere nahm daraus die Veranlassung, einen Fall der Bewegung in einem widerstehenden Mittel zu untersuchen und gab eine freilich inexacte Lösung des entsprechenden Problems, *Comm. Petrop.*,

Bd. 7, 1734, 1735; *Mechanica* etc., Bd. 2, Petersburg 1736; *Comm. Petrop.*, Bd. 8, 1736. Die erste in der That wichtige Arbeit war aber die Euler'sche: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti,* Lausannae et Genevae 1744; in § 34 wird das Problem der Brachistochrone behandelt.

Wir können schliesslich noch hinzufügen, dass das Problem der Brachistochrone auch das Hauptbeispiel in der berühmten Schrift von Lagrange bildete: *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégr. déf.*, Miscell. Taurinensia, Bd. 2, 1760, 1761 und dass Lagrange dasselbe Problem von Neuem in Bd. 4 der *Misc. Taur.* unter der Voraussetzung behandelte, dass nicht die Endpunkte gegeben sind, sondern zwei in derselben Ebene liegende Curven, auf welchen sich diese Endpunkte befinden sollen, vergl. *Werke,* Bd. 2, S. 58, und dass endlich Lagrange bei Gelegenheit einer neuen Darlegung der Variationsmethode abermals das Problem der Brachistochrone, aber in einem Mittel untersuchte, dessen Widerstand eine beliebige Function der Geschwindigkeit ist; *Leçons sur le calcul des fonctions,* Leçon 22; *Werke,* Bd. 10, S. 440.

Eine Curve von gegebener Länge, die durch zwei gegebene Punkte geht, derart zu construiren, dass eine andere zwischen denselben Endpunkten gezogene Curve, deren Ordinaten eine Potenz oder Wurzel der entsprechenden Ordinaten oder auch Bogen der ersten Curve sind, den grössten Flächeninhalt besitze. In dem speciellen Fall, in welchem die Ordinate der zweiten Curve dem entsprechenden Bogen der ersten gleich sein soll, erhält man eine *Kettenlinie.* Vergl. Bd. 2, Kap. 17, § 14. Das Problem wurde von Jacob Bernoulli in einer der ersten Arbeiten über die Variationsrechnung behandelt, *Acta Erudit.*, 1697.

Man soll von allen geschlossenen Polygonen, welche gegebene Strecken zu Seiten haben, dasjenige von grösstem Flächeninhalt finden.

Es ist, wie sich beweisen lässt, das in einen Kreis eingeschriebene Polygon. Das Problem behandelte Lagrange in dem zweiten Anhang zu seinem *Essai sur une nouvelle méthode* etc., *Misc. Soc. Taur.*, Bd. 2, 1762 mittelst der Variationsrechnung, während es von Cramer, *Abh. d. Berl. Acad.*, 1752 auf synthetischem Weg untersucht wurde. Mit dem analogen Problem über Polyeder von gegebener Oberfläche und grösstem Volumen hat sich Lindelöf, *Math. Ann.*, 2, S. 150 beschäftigt.

Handelt es sich nicht um ein Polygon, sondern um eine Curve von gegebenem Umfang, so erhält man den Kreis. Dieser Satz wurde schon von Zenodorus bewiesen und uns von Pappus überliefert. Siehe Cantor, *Geschichte der Math.*, Bd. 1, S. 308. In § 8 der Abhandlung von Legendre, *Mém. de l'Acad. de Paris,* 1786 wird das Problem eingehend auf Grund der Variationsrechnung studirt. Siehe auch Euler, *Methodus inveniendi* etc., Kap. 5, § 41, Lausanne 1741, 1744.

Ueber Probleme dieser Art in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, aber vom rein geometrischen Standpunkt aus, existirt eine umfangreiche Arbeit von Steiner, *Crelle,* 24, 1842, S. 93 und S. 189; *Liouville,* 6.

Zwischen zwei gegebenen Punkten oder zwei gegebenen Curven eine Curve derart zu construiren, dass ein schwerer Körper, welcher sie durchfällt, am Ende seines Falles die grösste Geschwindigkeit erlangt.

Siehe Lagrange am Ende der letzten der *Leçons sur le calcul des fonctions, Werke,* 10, S. 448.

Wenn die Endpunkte auf zwei gegebenen Curven liegen sollen, so müssen die Tangenten an die beiden Curven in diesen Endpunkten einander parallel sein; es entspricht dies dem für die Brachistochrone gefundenen Satz.

Von allen Curven, welche die gleiche Länge haben und deren Endpunkte gegeben sind, diejenige zu finden, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt.

Eine unrichtige Lösung dieser Aufgabe rührt von Galilei (1638) her, welcher der Ansicht war, die Curve sei eine Parabel; spätere Untersuchungen sind die der beiden Brüder Johann und Jacob Bernoulli, die von Huyghens und Leibnitz, *Acta Erudit.,* 1690—1692. Die gesuchte Curve ist eine *Kettenlinie*, d. h. derart, dass der Krümmungsradius der von der Curve und der Abscissenaxe begrenzten Normalen gleich und entgegengesetzt ist. Vergl. Bd. 2, Kap. 17, § 14.

Wenn man unter a eine unbestimmte Constante versteht, so ist das Integral

$$\int (y + a)\, ds$$

zu einem Maximum zu machen, weil $\frac{1}{s}\int y\, ds$, wie aus der Mechanik bekannt ist, der Ordinate des Schwerpunkts der Linie

gleichkommt. (Dabei ist angenommen, dass die Axe $y = 0$ oberhalb der Linie liegt.)

Mit diesem Problem hat sich auch Legendre in seiner Abhandlung vom Jahr 1786, *Mém. de l'Acad. de Paris*, § 7 beschäftigt; siehe ferner Mayer, *Math. Ann.*, 13, S. 65.

Viele der hier folgenden Aufgaben hat zuerst Euler in seiner berühmten Schrift *Methodus inveniendi* etc., 1744 behandelt und aufgelöst.

Durch zwei Punkte eine solche Curve zu legen, dass der Flächeninhalt der von ihr, ihrer Evolute und den beiden Normalen in den Endpunkten begrenzten Figur möglichst klein ist.

Die Curve ist ein Cycloidenzweig (vergl. Bd. 2, Kap. 17, § 12 dieses Werkes), Euler a. a. O., Kap. 2, § 51. Siehe darüber auch Jellett, *Variationsrechn.*, deutsche Uebers., Braunschweig 1860, S. 191 u. 422 und Todhunter, *Researches in the calculus of variation* etc., London u. Cambridge 1871, S. 250 (gekrönt).

Von allen Curven, welche zwei Punkte verbinden und durch Rotation um eine Axe Flächen von demselben Inhalt erzeugen, diejenige zu finden, bei welcher eine solche Fläche das grösste Volumen umschliesst. Euler, Kap. 5, § 44.

Dieses Problem hat zu vielen Controversen Veranlassung gegeben; siehe Lindelöf, *Leçons du Calcul des variations* (mit Moigno) Paris 1861, S. 218 und Greve, *Ein Problem aus der Variationsrechn.*, Gött. Dissert., 1875. Vergl. hierzu auch: Hormann, *Untersuchung über die Grenzen, zwischen welchen Unduloide und Nodoide, die von zwei festen Parallelkreisen begrenzt sind, bei gegebenem Volumen ein Minimum der Oberfläche besitzen*, Göttinger Dissert., 1887.

Von allen Curven, die durch zwei Punkte gehen und denselben Flächeninhalt umschliessen, diejenige zu finden, die um eine Axe rotirend, die Fläche vom kleinsten Inhalt erzeugt. Euler, Kap. 5, § 45.

Man erhält eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt, wie sie Newton bei seiner Classification unter Nr. 68 aufgeführt hat.

Von allen Curven von derselben Länge, welche durch dieselben zwei Punkte gehen, diejenigen zu finden, die, um eine Axe rotirend, den Körper von grösstem Volumen erzeugen. Euler, Kap. 5, §. 46.

Man findet die sogenannte *elastische Linie,* (vergl. Bd. 2, Kap. 17, § 14 dieses Werkes), deren Krümmungsradius der Abscisse umgekehrt proportional ist.

Die Curve zu ermitteln, welche unter allen anderen von derselben Länge bei der Rotation um eine Axe eine Fläche grössten oder kleinsten Inhalts erzeugt. Euler, Kap. 5, § 47.

Man findet die *Kettenlinie.* Die so erhaltene Fläche wird *Catenoid* genannt (Plateau) (vergl. Bd. 2, Kap. 16, § 12 dieses Werkes). Siehe Goldschmidt, *Determinatio superf. min.* etc., Göttingen 1831, Preisschrift; Lindelöf, *Sur les limites entre lesquelles la caténoide est une surface minime, Math. Ann.,* Bd. 2, S. 160, 1870.

Von allen Curven, welche dieselbe Länge haben und Flächen von demselben Inhalt begrenzen, diejenige zu ermitteln, welche, um eine Axe rotirend, eine Fläche erzeugt, die das grösste oder kleinste Volumen umschliesst. Euler, Kap. 6, § 22. Es ergibt sich die *elastische Linie.*

Von allen Curven, welche dieselben Abscissen haben, Flächen von demselben Inhalt begrenzen und, um die Axe rotirend, Flächen hervorbringen, die dasselbe Volumen umschliessen, diejenige zu finden, deren Schwerpunkt am tiefsten oder höchsten liegt. Euler, Kap. 4, § 23. Man erhält die Gerade.

Zwei parallele Ebenen und ein Punkt in einer derselben sind gegeben; man soll von diesem Punkt aus nach der anderen Ebene eine Linie von gegebener Länge so ziehen, dass der Inhalt der Cylinderfläche, welche die von den verschiedenen Punkten der Linie auf die beiden Ebenen gefällten und von ihnen begrenzten Lothe bilden, ein Maximum wird.

Man findet *die Schraubenlinie* (vergl. Bd. 2, Kap. 17, § 15 dieses Werkes). Siehe Lindelöf-Moigno, *Leçons du calcul des Variations,* Paris 1861, S. 299.

Wenn zwei Ordinaten festgesetzt sind, von einem Punkt der ersten nach einem der zweiten eine Curve von der Beschaffenheit zu ziehen, dass die durch die Abscissenaxe, die beiden Ordinaten und die Curve bestimmte Figur einen gegebenen Umfang und den grössten Flächeninhalt hat. Siehe Challis, *On the solution of three problems* etc., *Phil. Mag.*, 1872.

Eine Fläche von gegebenem Inhalt zu finden, welche das grösste Volumen einschliesst. Siehe Sarrus, *Mém. des sav. étrang.*, Bd. 10, 1846; Sabinin, *Moskau, Math. Samml.*, russisch, Bd. 14, S. 451, 1890.

Eine Curve von constanter erster Krümmung (vergl. Bd. 2, Kap. 16, § 4 dieses Werkes) *zu finden, deren Endpunkte auf zwei gegebenen Curven oder Flächen liegen und deren Länge ein Maximum oder Minimum ist.*

Das Problem wurde zuerst von Delaunay, später von Jellett und Todhunter untersucht. Eine neuere Arbeit über den Gegenstand ist die Doctordissertation Venske's, Göttingen 1891.

Die Curve zu bestimmen, welche in Bezug auf einen gegebenen Punkt das kleinste oder grösste Trägheitsmoment hat. Diese Aufgabe hat Euler falsch behandelt; die richtige Lösung gab Ossian Bonnet, *Liouville Journ. math.*, Bd. 9, S. 97, 1844. Ein ähnliches Problem findet man bei Hâton de la Goupillière, *Sur le minimum du potentiel de l'arc*, Ass. Franç., Besançon, Bd. 22, S. 164, 1893.

In Bezug auf die bekannten Probleme der Variationsrechnung über die *geodätischen Linien* auf den Flächen, die *Minimalflächen* etc. verweisen wir auf Bd. 2, Kap. 16.

Kapitel XII.

Die Invariantentheorie der algebraischen Formen.

§ 1. Binäre Formen. Symbolische Darstellung.

Jede rationale ganze homogene Function n^{ten} Grades in Bezug auf x_1, x_2 heisst *eine binäre Form vom n^{ten} Grad.* Man kann sie durch

$$f(x_1, x_2) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a_r x_1^{n-r} x_2^r$$

darstellen, wobei es der bequemeren Rechnung wegen von Vortheil ist, den Coefficienten die Form $\binom{n}{r} a_r$ zu geben, d. h. uns zu denken, sie seien mit Binomialcoefficienten versehen.

Symbolisch kann man die Form f schreiben:

$$f = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^n = \alpha_x^n,$$

wenn man

$$\alpha_1^n = a_0,$$
$$\alpha_1^{n-1} \alpha_2 = a_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$\alpha_2^n = a_n$$

setzt und unter den linken Seiten dieser Gleichheiten nur Symbole zur Darstellung der rechten Seiten versteht. Die α_1, α_2 sind keine Grössen, sondern Symbole; man kann ihnen keinen Sinn beilegen, wenn sie nicht bis zum n^{ten} Grad miteinander combinirt sind.

Die a sind *die wirklichen Coefficienten von f,* die α *die symbolischen.*

Die Coefficienten α pflegen die Engländer auch *ombrale* zu nennen, um damit auszudrücken, dass sie keine Grössen, sondern gleichsam nur Schatten von Grössen sind. Entsprechend wird die symbolische Rechnung mit den algebraischen Formen auch die *ombrale* genannt.

Jede Function der a lässt sich auf eine Function der α zurückführen, aber *nicht umgekehrt*. Wenn wir dagegen *Symbole* einführen, die den Symbolen α äquivalent sind, nämlich

$$f = \alpha_x^n = \beta_x^n = \gamma_x^n = \cdots$$

setzen, alsdann lässt sich eine Function der α, β, γ, $\cdots$, wenn jedes Glied der Function die α bis zum n^{ten} Grad, die β bis zum n^{ten} Grad etc. enthält, sofort auf Functionen der wirklichen Coefficienten a reduciren; der Grad dieser wirklichen Coefficienten ist der Anzahl der Symbole α, β, γ, $\cdots$ gleich, welche in dem gegebenen Ausdruck auftreten. Um also eine Form p^{ten} Grads in den wirklichen Coefficienten symbolisch darzustellen, sind p Symbole α, β, γ, $\cdots$ nöthig.

Die Coefficienten der Form können ihrerseits ganze homogene Functionen desselben Grads m in zwei anderen Variabelen y_1, y_2 sein; man erhält dann eine Form mit *zwei* Variabelenreihen, welche sich symbolisch durch

$$\alpha_x^n \alpha_{1y}^m = \beta_x^n \beta_{1y}^m = \cdots$$

darstellen lässt, und auf welche sich die vorstehenden Kriterien leicht ausdehnen lassen. U. s. w.

Wir wollen mit

$$(\alpha\beta) = -(\beta\alpha)$$

die symbolische Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \quad \text{bezeichnen.}$$

Zwischen den symbolischen linearen Factoren und den symbolischen Determinanten bestehen die folgenden fundamentalen Identitäten:

$$(\alpha\beta)\,\gamma_x + (\beta\gamma)\,\alpha_x + (\gamma\alpha)\,\beta_x = 0,$$
$$\alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x = (\alpha\beta)\,(xy),$$
$$(\alpha\beta)\,(\gamma\delta) + (\beta\gamma)\,(\alpha\delta) + (\gamma\alpha)\,(\beta\delta) = 0.$$

Setzt man

$$\begin{aligned} x_1 &= A_{11}x_1' + A_{12}x_2', \\ x_2 &= A_{21}x_1' + A_{22}x_2', \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix},$$

so wird die Form

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \cdots = \alpha_x^n$$

zu

$$f = a_0' x_1'^n + \binom{n}{1} a_1' x_1'^{n-1} x_2' + \cdots = \alpha_{x'}'^n.$$

Die Determinante Δ wird gewöhnlich der *Modul* der linearen Transformation genannt. Diese Benennung rührt von Sylvester her. Selbstverständlich wird Δ als von Null *verschieden* vorausgesetzt.

Die Coefficienten a' lassen sich linear durch die a ausdrücken; ersetzt man die a' symbolisch durch die α', so können die Beziehungen, welche die a' mit den a verbinden, durch die beiden symbolischen Relationen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1' &= A_{11}\alpha_1 + A_{21}\alpha_2 \\ \alpha_2' &= A_{12}\alpha_1 + A_{22}\alpha_2 \end{aligned}\right\}$$

dargestellt werden, aus welchen sich

$$\left.\begin{aligned} \Delta\alpha_1 &= + A_{22}\alpha_1' - A_{21}\alpha_2' \\ \Delta\alpha_2 &= - A_{12}\alpha_1' + A_{11}\alpha_2' \end{aligned}\right\} \text{ ergibt.}$$

Eine lineare Transformation heisst *reciprok* zu einer anderen, wenn ihre Coefficienten die Elemente der *reciproken Determinante* zu der Determinante sind, welche den Modul der ersten Transformation darstellt; d. h. die zu einer anderen reciproke Transformation erhält man aus der ersteren, wenn man jedem Coefficienten seine *algebraische Adjungirte* in Δ substituirt (vergl. S. 41 und 42).

Zwei Variabelenreihen x_1, x_2; y_1, y_2 heissen *cogredient,* wenn sie *derselben* linearen Transformation unterliegen.

Sie heissen dagegen *contragredient,* wenn sie linearen zu einander reciproken Substitutionen unterworfen werden.

Die Transformationen der α_1, α_2 sind reciprok zu denen der x_1, x_2.

Wie man ferner leicht erkennt, *werden die Grössen α_2 und $-\alpha_1$ mittelst derselben Formeln in α_2', $-\alpha_1'$ transformirt, wie die x_1, x_2 in x_1', x_2'.*

Schliesslich lässt sich leicht nachweisen, *dass die Differentiationssymbole $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$ sich in $\frac{\partial}{\partial x_1'}$, $\frac{\partial}{\partial x_2'}$ mittelst Transformationen verwandeln, die reciprok zu denen der x_1, x_2 sind.*

§ 2. Invarianten und Covarianten der binären Formen.

Nehmen wir an, es sei ein System von Formen n^{ten}, n'^{ten}, $\cdots$ Grads gegeben.

Denken wir uns ferner eine rationale ganze Function der Coefficienten der gegebenen Formen und auch der Variabelen x

und führen die vorgeschriebene lineare Transformation aus, substituiren also für die Variabelen x ihre durch x' ausgedrückten Werthe und für die früheren Coefficienten ihre durch die neuen dargestellten Werthe.

Wenn die transformirte Function sich in das Product einer r^{ten} Potenz des Moduls mit einem aus den transformirten Coefficienten und den transformirten Variabelen auf dieselbe Art gebildeten Ausdruck zerlegen lässt, auf welche die gegebene Function aus den alten Coefficienten und den alten Variabelen gebildet wurde, so sagt man, diese Function habe die *Invarianteneigenschaft.*

Wenn sie die Variabelen enthält, so nennt man sie eine *Covariante* im eigentlichen Sinn, im anderen Fall eine *Invariante.* Ihr Grad in den Variabelen heisst ihre *Ordnung*, die Zahl r der *Index*[1] (oder auch das *Gewicht* der Invariante bez. Covariante). Das Verhältniss zweier Invarianten, welche denselben *Index* haben, heisst eine *absolute Invariante.*

Jede absolute Invariante wird in sich transformirt, ohne dass eine Multiplication mit irgend einer Potenz des Moduls stattfindet.

Der Begriff der Covariante lässt sich ausdehnen, wenn man sich denkt, die invariante Function enthalte nicht nur die Variabelen x_1, x_2, sondern auch noch andere Reihen von Variabelen y_1, y_2; z_1, z_2; $\cdots$, welche cogredient mit den Variabelen x sind. Man erhält alsdann *eine Covariante mit mehreren Variabelenreihen.*

Ist der Index r eine gerade Zahl, so ist die invariante Form *von geradem Charakter* (forme droite), sonst *von ungeradem* (forme gauche, schiefe Invariante bez. Covariante).

Wenn n, n', $\cdots$ die Ordnungen der Urformen, k, k', $\cdots$ die Grade der invarianten Form in den Coëfficienten der verschiedenen Formen bedeuten und m die *Ordnung* der invarianten Form ist, d. h. der Grad in den Variabelen, *so besteht die Beziehung:*

$$2r + m = nk + n'k' + \cdots.$$

Wenn alle gegebenen Formen von gerader Ordnung sind, so kann keine ihrer Covarianten von ungerader Ordnung sein.

---

1) Siehe Faà di Bruno, *Binäre Formen,* Leipzig 1881, S. 106. Das Wort *Index* soll nach Bruno von Hermite herstammen. Das Wort *Gewicht* rührt von Cayley her, *Phil. Trans.,* 1856 und der Ausdruck *Invariante* von Sylvester, *Cambr. Dubl. J.,* 6, 1851, während Cayley dafür das Wort *Hyperdeterminante* gebraucht hat.

Jede binäre Form von ungerader Ordnung $n > 3$ besitzt immer wenigstens zwei lineare Covarianten, deren Resultante von Null verschieden ist (Clebsch).

Jede binäre Form von gerader Ordnung $n > 4$ besitzt wenigstens zwei quadratische Covarianten, deren Resultante d. h. *das Resultat der Elimination der x_1, x_2 aus diesen beiden Formen* (vergl. Kap. 5, § 4 und auch weiter unten § 5) *von Null verschieden ist* (Clebsch).

In jedem Term einer invarianten Form, welcher durch die wirklichen Coefficienten der Urform oder Urformen ausgedrückt ist, also durch

$$a_0, a_1, a_2, \cdots,$$
$$b_0, b_1, b_2, \cdots,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

wollen wir die Summe der Producte des Index eines jeden Coefficienten a, b, $\cdots$ mit dem bei ihm stehenden Exponenten bilden. Diese Summe nennt man *das Gewicht* des Terms. Eine Fundamentaleigenschaft ist die folgende:

Bei einer Invariante sind die Gewichte aller Terme einander gleich, d. h. die Invarianten sind, wie man sagt, isobare Functionen der Coefficienten der Urformen. Die Gewichte der aufeinander folgenden Coefficienten einer Covariante bilden die mit dem Index beginnende aufsteigende Reihe der natürlichen Zahlen.

Jede invariante Form J genügt gewissen Differentialgleichungen; es sind die folgenden:

$$\sum_a \sum_r (n-r)\, a_r \frac{\partial J}{\partial a_r} - \sum_x x_1 \frac{\partial J}{\partial x_1} = rJ,$$

$$\sum_a \sum_r r a_r \frac{\partial J}{\partial a_r} - \sum_x x_2 \frac{\partial J}{\partial x_2} = rJ,$$

$$\sum_a \sum_r (n-r)\, a_{r+1} \frac{\partial J}{\partial a_r} - \sum_x x_1 \frac{\partial J}{\partial x_2} = 0,$$

$$\sum_a \sum_r r a_{r-1} \frac{\partial J}{\partial a_r} - \sum_x x_2 \frac{\partial J}{\partial x_1} = 0,$$

worin sich die Summirung bez. r über alle Coefficienten der Form erstreckt, die Terme der Summirung bez. a bei dem Ueber-

gang von der einen Urform zur anderen variiren und schliesslich die Summirung bez. x angibt, dass man, wenn es sich um eine Covariante mit mehreren Reihen von Variabelen x, y, $\cdots$ handelt, ebensoviel ähnliche Terme, den einen in Bezug auf die x, den anderen auf die y etc., bilden soll.

Wenn speciell eine *Invariante* vorliegt, so erhält man die entsprechenden Differentialgleichungen, wenn man aus den obigen das Summenzeichen bez. x weglässt.

Diese Differentialgleichungen verdankt man Cayley, *Cambr. Dubl. math. J.*, 4; *Crelle*, 47, 1854; sie wurden später von Sylvester, *Cambr. Dubl. math. J.*, 7; Brioschi, *Ann. di mat.*, 1. Ser., 1858; *Ann. di scienze fis. e mat.*, 8, 1859; Aronhold, *Crelle*, 62 und Anderen untersucht. Es scheint, dass Aronhold sie schon seit 1851 gekannt hat, siehe Salmon, *Modern higher Algebra*, 4. Ausg., Dublin 1885, S. 344.

Als Functionen der Wurzeln der binären Urform betrachtet, genügen die Invarianten gewissen anderen Differentialgleichungen, die Brioschi gefunden hat, *Ann. di mat.*, 5, 1854.

Die wichtigste Eigenschaft der invarianten Formen ist in dem sogenannten Clebsch'schen Theorem enthalten, *Crelle*, 59:

Durch die symbolischen Coefficienten ausgedrückt, stellt sich eine invariante Form immer als eine Summe von Termen dar, von denen jeder das symbolische Product von Determinanten vom Typus $(\alpha\beta)$, $(\alpha\alpha_1)$, $\cdots$ *und von symbolischen linearen Factoren vom Typus* α_x, α_y, β, $\cdots$, α_{1x}, $\cdots$ *ist. Darin sind* α, β, $\cdots$ *die gleichwerthigen Symbole der ersten Urform,* α_1, β_1, $\cdots$ *die der zweiten etc. und selbstverständlich ist der Grad eines jeden der Symbole* α, β, $\cdots$ *der* n^{te}, *eines jeden der Symbole* α_1, β_1, $\cdots$ *der* n'^{te} *etc., vorausgesetzt, dass* n, n', $\cdots$ *die Grade der gegebenen Formen bezeichnen.*

Die Anzahl der symbolischen linearen Factoren stellt die Ordnung der invarianten Form dar und die Anzahl der symbolischen Determinanten den Index oder das Gewicht r.

Die invarianten Bildungen einer oder mehrerer gegebener binärer Formen lassen eine interessante geometrische Deutung zu:

Eine binäre Form von der n^{ten} Ordnung stellt, gleich Null gesetzt, geometrisch eine Gruppe von n Punkten auf einer Geraden dar, oder allgemein n Elemente eines geometrischen Gebildes erster Stufe. Vergl. Bd. 2, Kap. 1.

Setzt man ferner eine oder mehrere Invarianten der Form gleich Null, so werden damit die Coefficienten der Form solchen Bedingungen unterworfen, dass die n Elemente (oder speciell die n Punkte der Geraden) eine sogenannte *projective* Eigenschaft annehmen d. h. eine solche, die durch homographische Transformation nicht geändert wird. Vergl. Bd. 2, Kap. 1, § 2.

Wenn man schliesslich eine Covariante von der m^{ten} Ordnung (nicht identisch, also nicht derart, dass jeder ihrer Coefficienten verschwindet) gleich Null setzt und ihre m Wurzeln auf derselben Geraden als Basis interpretirt, auf welcher die n Wurzeln der gegebenen Form gedeutet wurden, so erhält man eine zweite Gruppe von m Punkten, welche mit der gegebenen in Beziehungen steht, die *projectiv* sind, d. h. unverändert bleiben, wenn die Gerade durch homographische oder projective Transformationen transformirt wird.

Man beachte jedoch, dass umgekehrt eine *projective Eigenschaft* einer Gruppe von Punkten sich *nicht immer* analytisch durch das identische Verschwinden *einer oder mehrerer Invarianten* darstellen lässt; *sie kann aber immer durch das identische Verschwinden aller Coefficienten einer oder mehrerer Covarianten dargestellt werden.* Siehe darüber Clebsch, *Binäre Formen,* S. 91; Gram, *Math. Ann.,* 7 und weiter unten § 5.

Ueber die *geometrische Bedeutung* der Invarianten und Covarianten der binären Formen der niedrigsten Ordnungen vergl. Bd. 2, Kap. 2.

Bisher haben wir vorausgesetzt, die gegebenen Formen hätten *nur eine Reihe* von Variabelen x_1, x_2. Wir wollen jetzt annehmen, sie hätten zwei oder mehrere solche Reihen von Variabelen (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2), $\cdots$. Sie werden dann symbolisch durch

$$\alpha_x^n \alpha_{1,y}^m \alpha_{2,z}^r, \cdots$$

dargestellt; über ihre Invarianten und Covarianten lassen sich den obigen durchaus ähnliche Betrachtungen anstellen und die Resultate sind dieselben, speciell diejenigen, welche sich auf die *symbolische Darstellung* der Invarianten und Covarianten beziehen.

Wenn die Variabelen (y_1, y_2), (z_1, z_2), $\cdots$ als *cogredient* (vergl. § 1) mit den (x_1, x_2) anzusehen sind, so bietet dieser neue Fall vermöge der Clebsch-Gordan'schen Formel, von welcher in § 3 die Rede sein wird, nichts Neues im Vergleich mit dem früheren dar. Dasselbe gilt, wenn die neuen Variabelen als *contragredient* zu den alten anzunehmen sind. Vergl. § 1.

Sind dagegen die (y_1, y_2) für Variabele zu halten, die linearen Transformationen unterworfen werden sollen, welche durchaus *unabhängig* von den Transformationen sind, denen die x_1, x_2 unterliegen, so lässt sich die Aufsuchung der Invarianten und Covarianten nicht auf den früheren Fall zurückführen und bietet grössere Schwierigkeiten; bisher ist sie nur in einigen der einfachsten Fälle gelungen. Vergl. § 6.

Eine Form von zwei verschiedenen Reihen von Variabelen (x_1, x_2), (y_1, y_2):

$$\alpha_x^n \alpha_{1,y}^m,$$

gleich Null gesetzt, stellt eine sogenannte *binäre Correspondenz* (n, m) dar, d. h. geometrisch: jedem Punkt x entsprechen m Punkte y, und jedem Punkte y, n Punkte x.

Operationen, welche die Invarianteneigenschaft nicht ändern. Es seien, wie gewöhnlich, $a_0, a_1, a_2, \cdots$ die Coefficienten einer Form f und $b_0, b_1, b_2, \cdots$ die einer anderen Form φ von derselben Ordnung.

Wenn J eine Invariante oder Covariante in Bezug auf ein System ist, dem die erste Form angehört, so besitzt auch der Ausdruck

$$\sum_i b_i \frac{\partial J}{\partial a_i}$$

die Invarianteneigenschaft und ist die Invariante oder Covariante in Bezug auf ein erweitertes aus dem ursprünglichen durch Hinzufügen der zweiten Form gebildetes System.

Die Operation $\sum b_i \frac{\partial}{\partial a_i}$ heisst *der Aronhold'sche Process.*

Die Invariante oder Covariante, welche sich ergibt, wenn man das Aronhold'sche Verfahren $k$mal auf J anwendet, heisst *die k^{te} Emanante* der beiden Formen f, φ (Cayley).

Wenn J eine Covariante von der m^{ten} Ordnung bezeichnet, so ist auch

$$\frac{1}{m}\left(y_1 \frac{\partial J}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial J}{\partial x_2}\right)$$

eine Covariante und heisst die erste Polare von J.

Die Operation

$$\frac{1}{m} \sum y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

heisst *der Polarenprocess mit dem Pol* y; sie ändert, wie sich aus dem vorigen Satz ergibt, die Invarianteneigenschaft nicht.

Unter dem Symbol Δ_y^k verstehen wir den $k$mal hintereinander wiederholten Polarenprocess mit dem Pol y.

Wenn

$$p_x^m$$

symbolisch eine Covariante von der m^{ten} *Ordnung vorstellt, so ist*

$$\Delta_y^k p_x^m = p_x^{m-k} p_y^k.$$

Wenn J *eine Covariante mit zwei Reihen von Variabelen* x, y *vom* m^{ten} *Grad bez. der einen und dem* m'^{ten} *bez. der anderen bezeichnet, so ändert der Ausdruck*

$$\frac{1}{mm'}\left(\frac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 J}{\partial x_2 \partial y_1}\right) = \Omega J$$

die Invarianteneigenschaft nicht.

Die Operation

$$\frac{1}{mm'}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_1}\right)$$

heisst *der* Ω*-Process* und ist *invariant.*

Gibt man einer Function zweier Variabelen die symbolische Gestalt

$$f(x, y) = a_x^n b_y^m,$$

so ist

$$\Omega^k \left(a_x^n b_y^m\right) = (ab)^k a_x^{n-k} b_y^{m-k}.$$

Diese Operation pflegt man nach Cayley, welcher sie angewendet hat, *die Cayley'sche* zu nennen, *Cambr. Dubl. math. Journ.*, 1, 1846.

Zwei andere invariante Operationen sind bemerkenswerth; sie sind beide symbolisch; die erste nennt Gordan den *Faltungsprocess;* sie besteht darin, dass in einem beliebigen symbolischen Product, welches aus symbolischen Determinanten und symbolischen linearen Factoren besteht, statt zweier linearer Factoren $a_x b_x$ die Determinante (ab) gesetzt wird.

Die zweite ist die Clebsch'sche; sie heisst der *Ueberschiebungsprocess* und besteht darin, dass man, wenn die beiden Formen a_x^n, b_x^m gegeben sind, den Ausdruck

$$(ab)\, a_x^{n-1} b_x^{m-1}$$

bildet.

Der Clebsch'sche Process lässt sich durch den Ω-Process auf die folgende Art ausdrücken:

$$(ab)\,a_x^{n-1} b_x^{m-1} = \left[\Omega\left(a_x^n b_y^m\right)\right]_{y=x}.$$

Der Clebsch'sche in Bezug auf die beiden Formen f und φ $k$mal wiederholte Process wird mit dem Symbol

$$(f, \varphi)^k \quad \text{bezeichnet.}$$

Der Ausdruck $(f, \varphi)^k$ heisst *die* k^{te} *Ueberschiebung* der beiden Formen f und φ oder *die Ueberschiebung* k^{ter} *Ordnung. Die Ueberschiebungen ungerader Ordnung einer Form mit sich selbst sind identisch Null.*

Liegen drei Formen f, φ, ψ vor, so besteht die folgende Identität:

$$\begin{vmatrix} (f, f)^2 & (f, \varphi)^2 & (f, \psi)^2 & f \\ (\varphi, f)^2 & (\varphi, \varphi)^2 & (\varphi, \psi)^2 & \varphi \\ (\psi, f)^2 & (\psi, \varphi)^2 & (\psi, \psi)^2 & \psi \\ f & \varphi & \psi & 0 \end{vmatrix} = 0$$

und für vier Formen:

$$\begin{vmatrix} (f, f)^2 & (f, \varphi)^2 & (f, \psi)^2 & (f, \chi)^2 \\ (\varphi, f)^2 & (\varphi, \varphi)^2 & (\varphi, \psi)^2 & (\varphi, \chi)^2 \\ (\psi, f)^2 & (\psi, \varphi)^2 & (\psi, \psi)^2 & (\psi, \chi)^2 \\ (\chi, f)^2 & (\chi, \varphi)^2 & (\chi, \psi)^2 & (\chi, \chi)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Andere Identitäten sind die folgenden:

$$((f, \varphi), \psi) = \frac{m-n}{2(m+n-2)}\,\psi\,(f, \varphi)^2 - \tfrac{1}{2}\left[f(\varphi, \psi)^2 - \varphi\,(\psi, f)^2\right],$$

$$[(f, \varphi)]^2 = -\tfrac{1}{2}\left[(f, f)^2 \varphi^2 - 2\,(f, \varphi)^2 f\varphi + (\varphi, \varphi)^2 f^2\right],$$

$$(f, \varphi)\cdot(\psi, \chi) = -\tfrac{1}{2}\left[(f, \psi)^2 \varphi\chi - (f, \chi)^2 \varphi\psi - (\varphi, \psi)^2 f\chi + (\varphi, \chi)^2 f\psi\right].$$

Die invariante Bildung

$$(f, \varphi)$$

heisst *die Functional-* oder *Jacobi'sche Determinante* der beiden binären Formen f, φ (vergl. auch Kap. 3, § 5) und die Bildung $(f, \varphi)^2$ *die Hesse'sche Determinante*, Kap. 3, § 6.

Die vorstehenden Clebsch'schen Formeln drücken durch

Producte von Formen niedrigeren Grads bez. die Functionaldeterminante der Functionaldeterminante zweier Formen und einer dritten Form, das Quadrat der Functionaldeterminante zweier Formen und das Product zweier Functionaldeterminanten aus. Ueber die Ausdehnung dieser Formeln auf das ternäre Gebiet siehe § 13.

Die Symbolik im binären Gebiet wurde in einer anderen Form von Cayley, *Cambr. math. J.*, 4, 1845 und in der jetzigen bequemeren Gestalt von Aronhold, *Crelle*, 55, 62 eingeführt; später wurde sie von Clebsch und Gordan entwickelt und ausgedehnt.

Es ist vielleicht erwünscht, wenn wir bemerken, dass die Engländer sich zur Darstellung der binären Formen n^{ter} Ordnung der Bezeichnung

$$(a, b, c, d, e, \cdots \between x, y)^n$$

bedienen, worin a, b, c, $\cdots$ die wirklichen Coefficienten der Form und x, y die beiden homogen in ihr auftretenden Variabelen bezeichnen.

Der Begriff der *Invariante* ist zurückzuführen auf die Bemerkungen, welche Lagrange, *Berl. Mem.*, 1773; *Werke*, 3, S. 699, 701 und später Gauss, *Disqu. arithm.*, *Werke*, 1 über die Eigenschaften der *Discriminante* einer quadratischen Form gemacht haben. Auch der Name: *„binäre, ternäre, etc. Formen"* rührt von Gauss her. Später erkannte Boole, *Cambr. math. J.*, 3, 1841 die Invarianteneigenschaft der Discriminante einer jeden binären Form und untersuchte auch Covarianten der cubischen Form. Invariante Bildungen haben kurz darauf auch Eisenstein, *Crelle*, 27, 1844 und Hesse, *Crelle*, 28 studirt. Auf sie folgten Cayley, Sylvester, Brioschi, Aronhold, Clebsch, Gordan und viele Andere. Die englischen Autoren gebrauchen den Ausdruck *quantic* für *Form*.

Eine ausführliche Geschichte der ganzen Theorie findet man bei Franz Meyer, *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie*, Jahresb. der deutsch. Math.-Vereinig., 1, Berlin 1892.

Die wichtigsten Lehrbücher sind, abgesehen von den berühmten Abhandlungen Cayley's, *Memoirs upon Quantics*, Phil. Trans., 1854, 56, 58, 59, 61, 67, 71, 78: Salmon, *Lessons to the modern higher Algebra*, Dublin 1859, 1885, deutsche Uebersetzung von Fiedler, Leipzig 1863, 1877; Brioschi, *Annali di Tor-*

tolini, 1, 1861; Fiedler, *Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen*, Leipzig 1862; Clebsch, *Binäre Formen*, Leipzig 1872; Faà di Bruno, *Formes binaires*, Turin 1876, deutsche Uebersetzung von Noether und Walter, Leipzig 1881; Gordan, *Invariantentheorie*, Leipzig 1887; Elliot, *Algebra of Quantics*, Oxford 1895.

§ 3. Die Clebsch-Gordan'sche Formel.

Eine der wichtigsten Formeln für die symbolischen Transformationen der invarianten Formen ist die sogenannte Clebsch-Gordan'sche; sie gibt die Entwickelung einer Function mit zwei Reihen von Variabelen x, y in Polaren von Ausdrücken mit einer einzigen Variabelenreihe, wobei diese Polaren mit ganzen positiven Potenzen der Determinante (xy) multiplicirt werden. Es sei $f(x, y)$ eine Function mit zwei Reihen von Variabelen vom m^{ten} Grad bei der einen und dem n^{ten} bei der anderen. Bezeichnet man mit Δ den Polarenprocess mit dem Pol y und der Variabelen x und mit D den Polarenprocess mit dem Pol x und der Variabelen y, *so gilt die Formel:*

$$f = \Delta^k D^k f + \alpha_1^{(k)}(xy)\,\Delta^{k-1} D^{k-1} \Omega f + \\ + \alpha_2^{(k)}(xy)^2 \Delta^{k-2} D^{k-2} \Omega^2 f + \cdots + \alpha_k^{(k)} \Omega^k f.$$

Die Coefficienten α sind Zahlen, die den Recursionsformeln

$$\alpha_p^{(k+1)} = \alpha_p^{(k)} + \frac{(m-p+1)^2}{(m+k-2p+2)(m+k-2p+3)}\,\alpha_{p-1}^{(k)}$$

genügen.

Für $k = n$ ist

$$\alpha_p^n = \frac{\binom{n}{p}\binom{m}{p}}{\binom{m+n-p+1}{p}}.$$

Wegen der Symmetrie der Indices m und n kann man diese Zahl auch mit $\alpha_p^{m,n}$ bezeichnen.

Wenn $k = n$ ist, so enthalten die Ausdrücke

$$D^k f,\ D^{k-1}\Omega f,\ \cdots$$

nicht mehr die Variabele y, und f wird alsdann durch die Polaren Δ der Functionen von x allein ausgedrückt. Diese Functionen nennt Gordan *elementare Covarianten* von f.

Wir stellen hier die Werthe von $\alpha_p^{m,n}$ für verschiedene Werthe der Indices m, n zusammen.

	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
$m=1,\ n=1$	$\frac{1}{2}$			
$m=2,\ n=1$	$\frac{2}{3}$			
$m=3,\ n=1$	$\frac{3}{4}$			
$m=4,\ n=1$	$\frac{4}{5}$			
$m=5,\ n=1$	$\frac{5}{6}$			
$m=6,\ n=1$	$\frac{6}{7}$			
$m=2,\ n=2$	1	$\frac{1}{3}$		
$m=3,\ n=2$	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{2}$		
$m=4,\ n=2$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{5}$		
$m=5,\ n=2$	$\frac{10}{7}$	$\frac{2}{3}$		
$m=6,\ n=2$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{7}$		
$m=3,\ n=3$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{4}$	
$m=4,\ n=3$	$\frac{12}{7}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{2}{5}$	
$m=5,\ n=3$	$\frac{15}{8}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{1}{2}$	
$m=6,\ n=3$	2	$\frac{45}{28}$	$\frac{4}{7}$	
$m=4,\ n=4$	2	$\frac{12}{7}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
$m=5,\ n=4$	$\frac{20}{9}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{1}{3}$
$m=6,\ n=4$	$\frac{12}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{10}{7}$	$\frac{3}{7}$

Jede Form $f(x, y)$ lässt sich nur auf eine einzige Art in eine nach wachsenden Potenzen von (xy) geordnete Reihe mit polaren Coefficienten entwickeln. Wenn die Form f in Bezug auf x und y symmetrisch ist, so sind die Coefficienten der geraden Potenzen von (xy) Null.

Ist f identisch Null, so muss jede ihrer Elementarcovarianten für sich Null sein.

Wenn die Form f symbolisch durch

$$f = a_x^m b_y^n$$

dargestellt ist, so werden die *Elementarcovarianten* von f durch

$$a_x^m b_x^n,$$
$$(ab)\, a_x^{m-1} b_x^{n-1},$$
$$(ab)^2 a_x^{m-2} b_x^{n-2},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

ausgedrückt. Gordan bezeichnet sie mit den Symbolen

$$(\overline{ab})^0,\ (\overline{ab})^1,\ (\overline{ab})^2,\ \cdots.$$

Wendet man die symbolische Bezeichnung an und vertauscht die Reihen von Variabelen mit Reihen symbolischer Coefficienten, so kann man aus der Clebsch-Gordan'schen Formel eine Reihe bemerkenswerther Identitäten ableiten, welche sich für die symbolischen Transformationen vortheilhaft verwenden lassen.

Bei Benutzung der Clebsch-Gordan'schen Formel erweist sich die Einführung von Covarianten mit mehreren Reihen cogredienter oder contragredienter Variabelen für das binäre Gebiet als nicht nöthig. Vergl. § 2.

Die Formel hat fast gleichzeitig Clebsch, *Theorie der binären Formen,* Leipzig 1872 und Gordan aufgefunden. Der letztere machte sie zur Grundlage vieler verschiedenartiger Entwickelungen, *Formensystem binärer Formen,* Leipzig 1875. In Bezug auf das ternäre Gebiet und auf höhere vergl. § 10.

§ 4. Zusammenstellung der verschiedenen in der Theorie der Formen gebrauchten Benennungen.

Besonders die Engländer haben in der Invariantentheorie eine grosse Anzahl von Namen eingeführt, deren Bedeutung man wohl kennen muss. Die Erklärung einiger dieser Ausdrücke ist zwar bereits früher gegeben worden oder wird später wiederholt werden; wir haben aber doch geglaubt, dass es dem Leser erwünscht sein werde, hier eine Zusammenstellung derselben zu finden.

1. *Quantics* sagen die Engländer statt *Formen.*

2. *Concomitante* nennt Sylvester eine allgemeine invariante Bildung.

3. *Evidente Invariante* ist die Constante.

4. *Eine absolute Invariante* ist eine rationale gebrochene Invariante, deren *Index Null ist.*

5. *Contravariante* ist eine Bildung, welche die Invarianteneigenschaft hat, wenn die in ihr enthaltenen x nicht der directen linearen Transformation, sondern der reciproken unterliegen; d. h. eine Bildung, die, mit einer Potenz des Transformationsmoduls multiplicirt, wieder zum Vorschein kommt, wenn man die alten Coefficienten durch die transformirten ausdrückt und diese Ausdrücke an ihre Stelle setzt und statt x_1, x_2

$$\Delta x_1 = + A_{22} x_1' - A_{21} x_2',$$
$$\Delta x_2 = - A_{12} x_1' + A_{11} x_1'$$

schreibt. Vergl. § 1.

6. *Gemischte (mixed) Concomitanten* nennt Sylvester die Bildungen mit zwei Reihen von Variabelen, welche die Invarianteneigenschaft aufweisen, wenn die einen der directen, die anderen der reciproken Transformation, wie in 5, unterworfen werden. Diese Formationen werden auch genannt:

7. *Zwischenformen* (Aronhold), siehe 6 oder

8. *Divarianten* (Salmon), siehe 6.

9. *Hyperdeterminanten.* Diesen Namen hat zuerst Cayley den Invarianten gegeben.

10. *Cogrediente* Grössen heissen zwei Reihen von Variabelen, die denselben linearen Substitutionen unterworfen werden.

11. *Contragrediente* Grössen dagegen heissen zwei Reihen von Variabelen, mit denen lineare Substitutionen vorgenommen werden, von welchen die eine reciprok zu der anderen ist.

12. *Emananten.* Das Resultat, welches sich ergibt, wenn man $k$mal den Aronhold'schen Process an der Invariante einer Form f ausführt, hat eine Invariante von f und der Form φ zur Folge, deren Coefficienten durch das Aronhold'sche Verfahren eingeführt werden; eine solche Bildung heisst eine *Emanante* von f und φ (Cayley). Vergl. § 2.

13. *Combinanten* sind simultane Invarianten oder Covarianten eines Systems von Formen gleichen Grads, welches so beschaffen ist, dass sich, wenn man einen Aronhold'schen Process an zwei seiner Formen ausführt, als Resultat Null ergibt. Siehe Gordan, *Invariantentheorie,* 2, Leipzig 1887, S. 70 und weiter unten § 5.

Eine Combinante ändert sich um einen Zahlenfactor, wenn dem System der gegebenen Formen ein System substituirt wird, dessen Formen lineare Combinationen der ursprünglichen sind.

14. Die *Evectante* (Cayley) erhält man, wenn der Aronhold'sche Process so ausgeführt wird, dass eine jede Derivirte nicht mit dem Coefficienten b_r multiplicirt wird, der denselben Index hat, wie der Coefficient, nach welchem differenzirt wird, sondern mit

$$(-1)^r x_2^{n-r} x_1^r,$$

d. h. also, wenn die Summe

$$\sum (-1)^r x_2^{n-r} x_1^r \frac{\partial J}{\partial a_r}$$

gebildet wird, in welcher die a_r die wirklichen Coefficienten der gegebenen Form von der n^{ten} Ordnung sind, und J eine Invariante dieser Form bezeichnet.

15. *Die Catalecticante und Canonizante* (Sylvester). *Eine Form von ungerader Ordnung* $(2m-1)$ *lässt sich immer als Summe von m Potenzen von linearen Formen*

$$a_x^{2m-1} = b_1 (x_1 - \alpha_1 x_2)^{2m-1} + \cdots + b_m (x_1 - \alpha_m x_2)^{2m-1}$$

ausdrücken.

Die Gleichung, von welcher die Bestimmung der Coefficienten $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ abhängt, heisst *Canonizante.* Ist die Form von geradem Grad, *so ist eine Darstellung dieser Art nur dann möglich, wenn eine gewisse Invariante, welche Catalecticante genannt wird, verschwindet.* Vergl. § 8.

16. *Lambdaique.* Eine binäre Form von gerader Ordnung $2m$ lässt sich immer als Summe von m, $2m^{\text{ten}}$ Potenzen linearer Formen darstellen, wenn man einen Term hinzunimmt, welcher als Factor eine gewisse Invariante λ, die Wurzel einer Gleichung enthält, deren linke Seite eine Determinante ist. Diese Determinante haben Sylvester und Cayley *Lambdaique* genannt. Siehe weiter unten § 8.

17. *Syzygien* nennen Einige die Beziehungen zwischen den invarianten Formen eines vollen Systems. Siehe § 6.

18. *Schiefe Formen, forme gobbe, des formes gauches, skew quantics* sind invariante Formen von ungeradem Charakter, d. h. solche, für welche der Exponent λ derjenigen Potenz der Substitutionsdeterminante, mit welcher sie bei der linearen Transformation multiplicirt werden, eine ungerade Zahl ist.

19. *Seminvarianten, Peninvarianten* heissen Formen, welche zwar die Invarianteneigenschaft besitzen, aber nicht für alle möglichen linearen Substitutionen, sondern nur für eine Untergruppe der vollen Gruppe.

Die Seminvarianten im Allgemeinen haben untersucht: Cayley, *American J.*, 7, 15; *Quart. J.*, 19, 20; Sylvester, *American J.*, 5; Perrin, *Soc. math. de France*, 11, 1873; d'Ocagne, *Compt. Rend.*, 1886; Deruyts, *Th. des formes*, Bruxelles 1891; *Bull. de Brux.*, 1893—1894; *Mém. de Brux.*, 1893; *Mém. sav. étrang. Brux.*, 1894, etc.

20. *Perpetuanten* sind Seminvarianten, welche sich nicht durch eine ganze rationale Function mit Hülfe von Seminvarianten niedrigeren Grads ausdrücken lassen. Siehe Sylvester, *American J.*, 5; Mac Mahon, ib., 7.

21. *Bezoutiante.* Der Resultante zweier Formen kann man mittelst der Bézout'schen Methode die Form einer symmetrischen Determinante geben. Siehe S. 87 die Determinante B. Die quadratische *Form* mit n Variabelen (vergl. § 10), welche zu Coefficienten die Elemente dieser Determinante hat, d. h. also die quadratische Form, welche B zur Discriminante hat, heisst *Bezoutiante der beiden Formen* (Sylvester). Geht man statt von der Resultante *zweier* Formen, von der Discriminante einer einzigen Form aus, so erhält man auf ähnliche Art *die Bezoutiante einer einzigen Form.* Siehe Salmon-Fiedler, *Algebra d. linearen Transf.* etc.

22. *Die Reciprokante.* Es sei y eine Function von x, und $y', y'', \cdots$ seien die Derivirten von y. Eine rationale Function R von $y, y', y'', \cdots$ welche sich, wenn man y mit x vertauscht, nur um einen Factor ändert, der rational von den $y', y'', \cdots$ abhängt, heisst *binäre Reciprokante,* Sylvester, *Messeng. of Math.*, 15; *Compt. Rend.*, 1885; Hammond, *American J.*, 8, 9, 10. Ein Beispiel ist die Schwarz'sche Reciprokante, vergl. Kap. 9, § 3. Ausdehnungen des Begriffs findet man bei Elliot, *Lond. Math. Soc. Proc.*, 17, 18, 19, 20; Forsyth, *Phil. Trans.*, 1889 etc.

Ist R rational und ganz, so ist der Factor, um den R sich ändert, eine ganze Potenz von y'. Wenn diese Potenz die nullte ist, so ergibt sich *die absolute Reciprokante. Die totale Derivirte nach x einer absoluten Reciprokante ist wieder eine Reciprokante.* Ueber weitere Einzelheiten siehe F. Meyer, *Jahresber. der deutsch. Math.-Verein.*, 1, S. 230 u. ff.

§ 5. Specielle invariante Bildungen für binäre Formen. Combinanten, Resultanten, Discriminanten, Hesse'sche Determinanten.

Die *Combinanten* sind Invarianten oder Covarianten eines Systems von Formen gleichen Grads und derart, dass sie unverändert bleiben, wenn man eine Vertauschung zwischen den Formen des Systems vornimmt, und dass ein auf zwei Formen des Systems ausgeübter Aronhold'scher Process (§ 2) als Resultat Null ergibt.

Eine Combinante ändert sich um einen constanten Factor, wenn statt des Systems der gegebenen Formen ein anderes System substituirt wird, dessen Formen lineare Combinationen der gegebenen mit constanten Coefficienten sind.

Jede ungerade Ueberschiebung zweier Formen gleichen Grads ist eine Combinante dieser Formen.

Jede Combinante mehrerer Formen

$$f, \varphi, \psi, \cdots$$

lässt sich immer aus einer von ihnen, der Fundamentalcombinante, ableiten. Diese letztere hat die Gestalt (Gordan, *Math. Ann.*, 5):

$$\begin{vmatrix} f(x), & \varphi(x), & \psi(x), & \cdots \\ f(y), & \varphi(y), & \psi(y), & \cdots \\ f(z), & \varphi(z), & \psi(z), & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man mit

$$\begin{matrix} a_0^{(1)}, & a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & \cdots, & a_n^{(1)}, \\ a_0^{(2)}, & a_1^{(2)}, & a_2^{(2)}, & \cdots, & a_n^{(2)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^{(p)}, & a_1^{(p)}, & a_2^{(p)}, & \cdots, & a_n^{(p)} \end{matrix}$$

bez. die wirklichen Coefficienten der p gegebenen Formen, *so ist jede Combinante der Formen eine Function der Coefficienten, in welcher diese letzteren nur in Determinantenverbindungen, wie*

$$\left(a_{i_1}^{(1)}, a_{i_2}^{(2)}, \cdots, a_{i_p}^{(p)}\right),$$

auftreten.

Drei quadratische Formen a_x^2, b_x^2, c_x^2 haben eine einzige Combinante:

$$(ab)(ac)(bc).$$

Die Combinanten dreier cubischen Formen a_x^3, b_x^3, c_x^3 sind sämmtlich Covarianten und Invarianten von

$$(ab)(ac)(bc)\,a_x b_x c_x.$$

Näheres über die Theorie der Combinanten findet man bei Gordan, *Math. Ann.*, 5; Brill, ib., 20; Stroh, ib., 22. Früher hatte sich schon Sylvester mit ihnen beschäftigt, *Cambr. Dubl. math. J.*, 8, 1853 und Betti, *Ann. di mat.*, (1), 1, 1858, der das System der *charakteristischen Differentialgleichungen* für die Combinanten fand.

Ueber die Beziehungen zwischen der Theorie der *Apolarität* (§ 9) und derjenigen der *Combinanten* sehe man Brill, *Math. Ann.*, 4, S. 530 nach.

Die *Resultante* zweier binären Formen haben wir schon in Kap. 5, § 4 definirt. *Sie ist eine Invariante der beiden binären Formen, insbesondere eine specielle Combinante.*

Wichtig ist der folgende Satz: *Wenn die Resultante Null ist und daher die beiden binären Formen eine Wurzel gemeinschaftlich haben, so verschwindet für diese Wurzel auch die Functionaldeterminante der beiden Formen, und wenn die Ordnungen der beiden Formen gleich sind, so werden für diese Wurzel auch die ersten Derivirten der Functionaldeterminante gleich Null.*

Ausser den in Kap. 5, § 4 angegebenen Methoden zur Ermittelung der Resultanten gibt es noch eine andere, die speciell für die Theorie der Formen wichtig ist, die sogenannte Cayley'sche, *Crelle*, 53:

Wenn $f(x)$, $\varphi(x)$ die beiden binären Formen von gleicher Ordnung sind, so betrachten wir den in x und y symmetrischen Ausdruck

$$F(x, y) = \frac{f(x)\,\varphi(y) - f(y)\,\varphi(x)}{(xy)}.$$

Führt man die hier angezeigte Division aus, so lässt sich F schreiben

$$F(x, y) = \sum_{i,k=0}^{i,k=n-1}\sum c_{ik}\,x_1^i x_2^{n-i-1}\,y_1^k y_2^{n-k-1}, \quad (c_{ik} = c_{ki}).$$

Haben $f(x)$, $\varphi(x)$ eine gemeinschaftliche Wurzel, so müssen die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von y_1, y_2 in diesem Ausdruck Null sein; man erhält mithin die Gleichungen:

$$\sum_i c_{i0} x_1^i x_2^{n-i-1} = 0,$$
$$\sum_i c_{i1} x_1^i x_2^{n-i-1} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\sum_i c_{i,n-1} x_1^i x_2^{n-i-1} = 0;$$

folglich muss die Determinante

$$R = \sum \pm c_{00} c_{11} c_{22} \cdots c_{n-1,n-1}$$

verschwinden. Diese Determinante R nun ist die *Resultante.*

Eine classische Arbeit über die Resultante hat Gordan, *Math. Ann.*, 3 geliefert, der gerade von der vorstehenden Cayley'schen Formel ausgeht:

Schreibt man F in der symbolischen Form

$$F = r_x^{n-1} s_y^{n-1} = r_{1x}^{n-1} s_{1y}^{n-1} = \cdots,$$

so zeigt Gordan, dass die Resultante R symbolisch durch

$$R = \prod_{ik} (r_i r_k)(s_i s_k)$$

ausgedrückt wird, worin i, k die Werthe $0, 1, \cdots, n-1$ haben. Davon ausgehend, gelingt es ihm, R durch *Ueberschiebung* der beiden gegebenen Formen unter sich zu berechnen; alsdann dehnt er dieselbe Methode auch auf den Fall aus, in welchem die beiden gegebenen Formen *nicht* von derselben Ordnung sind.

Aus dieser Gordan'schen Methode ergibt sich auch das Mittel zur Feststellung der invarianten Bedingungen, unter denen zwei binäre Formen zwei oder mehrere Wurzeln gemeinschaftlich haben:

Die *invarianten* Bedingungen, damit zwei binäre Formen *zwei* Wurzeln gemeinschaftlich haben, lassen sich nicht durch *zwei* Invarianten, sondern nur durch eine *Covariante* ausdrücken; denn, da die verschiedenen *Coefficienten* dieser Covariante Null sein müssen, so ist es nicht möglich, aus diesen Coefficienten *zwei verschiedene* Combinationen zu bilden, welche die Form von *Invarianten* haben.



Gordan nannte diese Covariante Θ; sie hat die Gestalt

$$\Theta = \prod_{ik} (r_i r_k)(s_i s_k) r_{ix} s_{ix}, \quad (i, k = 0, 1, \cdots, n-2)$$

und ist von der Ordnung $2n-2$.

Aehnlich bestehen die Bedingungen, damit die beiden binären Formen *drei* Wurzeln gemeinschaftlich haben, in dem Verschwinden einer Covariante Φ mit zwei Variabelenreihen:

$$\Phi = \prod_{ik} (r_i r_k)(s_i s_k) r_{ix} r_{iy} s_{ix} s_{iy}, \quad (i, k = 0, 1, \cdots, n-3).$$

Sie ist in Bezug auf jede Variabelenreihe von der Ordnung $2n-4$, u. s. w.

Die folgenden Resultate sind bemerkenswerth: *Die Resultante R lässt sich als $(2n-2)^{\text{te}}$ Ueberschiebung der Covariante Θ und der Covariante $r_x^{n-1} s_x^{n-1}$ darstellen, welche bis auf einen Factor die Functionaldeterminante der beiden gegebenen binären Formen ist; es ist dann*

$$R = (\Theta, (f, \varphi))^{2n-2} \quad \text{(Gordan)}.$$

Aehnlich lässt sich Θ durch Ueberschiebungen der elementaren Covarianten (§ 3) von Φ über die elementaren Covarianten von F ausdrücken. Pascal, *Ann. di mat.*, (2), 16, S. 85.

Die invarianten Bedingungen, damit die beiden binären Formen drei Wurzeln gemeinschaftlich haben, bestehen in dem identischen Verschwinden der Covariante Θ und der Invariante, welche die letzte der elementaren Covarianten von Φ darstellt, d. h. der Invariante, welche symbolisch durch $(\Phi\Phi_1)^{2n-4}$ ausgedrückt wird, wenn Φ die symbolische Gestalt $\Phi_x^{2n-4} \Phi_{1y}^{2n-4}$ hat. Dieser Satz ist von E. Pascal. Sein Beweis befindet sich in der oben citirten Arbeit und ein zweiter, von demselben Autor mitgetheilt, auf S. 3 einer späteren Abhandlung von Berzolari, *Ann. di mat.*, 19, in welcher man auch eine Ausdehnung des Theorems auf den Fall von 4 gleichen Wurzeln und von $n = 5$ und die entsprechenden Rechnungen findet.

An diesem Satz ist bemerkenswerth, dass die neue Relation zwischen den Coefficienten, welche in Verbindung mit $\Theta = 0$ die Bedingung liefert, unter welcher die beiden binären Formen *drei* gleiche Wurzeln haben, sich in die Form einer *Invariante* bringen lässt. Diese Form erhält man z. B. nicht, wenn man von der Bedingung für die Gleichheit *einer* Wurzel ($R = 0$) zu den Bedingungen für die Gleichheit *zweier* Wurzeln übergeht.

Mit der Covariante Θ zweier binärer Formen f, φ gleichen Grads befasste sich auch Kyparissos Stephanos, *Ann. Éc. norm.*, (3), 1, 1884, welcher bewies, *dass sie die einzige Form* $(2n-2)^{\text{ten}}$ *Grads ist, deren* n^{te} *Ueberschiebungen mit den gegebenen Formen identisch verschwinden.*

Daraus ergibt sich leicht, *dass sich* $n-1$ *binäre Formen von der Ordnung* n *als lineare Combinationen der* $(n-2)^{\text{ten}}$ *partiellen Derivirten einer bestimmten binären Form der* $(2n-2)^{\text{ten}}$ *Ordnung ausdrücken lassen, und dass diese letztere Form die Covariante* Θ *in Bezug auf die beiden Formen* n^{ter} *Ordnung ist, welche die zu den* $n-1$ *gegebenen Formen apolare Schar bilden* (§ 9). Siehe Berzolari, *Acc. Napoli,* 1891. Ueber den Fall $n = 3$ vergl. Hermite, *Crelle,* 57; Clebsch, *Crelle,* 67; Gundelfinger, *Math. Ann.*, 7; für $n = 4$: Lindemann-Clebsch, *Vorles. über Geom.*, 1, S. 900. Siehe ferner auch Friedrich, *Diss.*, Giessen 1886 und E. Meyer, *Diss.*, Königsberg 1888.

Ueber die Ausdehnung des Theorems auf die ternären Formen sehe man § 11 nach.

Clebsch hat eine Methode zur Ermittelung der Resultante einer quadratischen Form und einer Form beliebiger Ordnung angegeben, *Crelle,* 59 und *Theorie der bin. Formen,* S. 84; diese Methode wurde später von E. Pascal auf den Fall einer cubischen und einer beliebigen Form ausgedehnt, *Giorn. di Batt.*, 25, 1887.

Ueber die Covariante Θ (siehe oben) bez. einer quadratischen und einer beliebigen Form sehe man Clebsch, *Binäre Formen,* S. 91 u. ff. nach und über die Bedingungen, unter denen eine Form eine andere von geringerer Ordnung zum Factor hat, Igel, *Wiener Berichte,* 1880.

Die *Discriminante* einer binären Form ist ihre Resultante mit ihrer ersten Derivirten. *Sie ist eine Invariante* $(2n-2)^{\text{ten}}$ *Grads in den Coefficienten der gegebenen Form und stellt, wie man weiss* (Kap. 5, § 4), *gleich Null gesetzt, die Bedingung dar, unter welcher die Form wenigstens eine doppelte Wurzel hat.*

Die Discriminante einer Form ist offenbar der letzte Coefficient der Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen zwischen den Wurzeln der gleich Null gesetzten gegebenen Form sind. (Ueber die Gleichungen für die Quadrate

der Differenzen zwischen den Wurzeln siehe S. 82.) Den vorletzten Coefficienten hat Perrin *Subdiscriminante* genannt, *J. de math.*, (4), 20.

Die Resultante sowie die Discriminante genügen gewissen partiellen Differentialgleichungen, welche von Brioschi, *Crelle*, 53 und Gordan, *Gött. Nachr.*, 1870 aufgestellt wurden.

Eine andere wichtige invariante Bildung einer binären Form ist ihre *Hesse'sche Determinante*: sie ist die zweite Ueberschiebung der Form mit sich selbst (§ 2).

Das identische Verschwinden der Hesse'schen Determinante ist die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit die binäre Form eine genaue Potenz einer linearen Form sei. Dieser Satz ist ein specieller Fall des Theorems auf S. 53.

§ 6. Volle Systeme invarianter Formen.

Jede Invariante oder Covariante einer Covariante ist auch Invariante oder Covariante des Grundsystems.

Jede invariante Form eines Grundsystems von Formen lässt sich stets durch successive Anwendung des Ueberschiebungsprocesses bilden. Gordan'sches Theorem.

Wenn ein System von einer oder mehreren Urformen gegeben ist, so gibt es immer eine endliche Anzahl von Invarianten und Covarianten, durch welche sich jede andere invariante Form des Systems als ganze rationale Function ausdrücken lässt. Gordan'sches Theorem, Crelle, 69; *Math. Ann.*, 2; siehe auch: *Ueber das Formensystem bin. Form.*, Leipzig 1875.

Die Gesammtheit dieser Invarianten und Covarianten bildet das sogenannte *volle System.*

Die Anzahl der Formen des vollen Systems kennt man *a priori* nicht. Eine obere Grenze dafür hat Gordan aufgesucht, *Journ. de Liouville,* 1879.

Das vorstehende Theorem, das den Namen Gordan's trägt, hatte schon Cayley für den Fall einer Urform von einer Ordnung, die gleich oder kleiner als 4 ist, gekannt und formulirt.

Andere Beweise als den Gordan'schen für die Endlichkeit des Invariantensystems einer Reihe binärer Formen haben Mertens, *Crelle,* 100; *Wiener Berichte,* 98, 1889 und Hilbert, *Math. Ann.*, 33 gegeben. Später wurde das Theorem

auch auf andere als binäre Formen ausgedehnt. Vorzüglich sind hier die bemerkenswerthen Untersuchungen von Hilbert zu nennen, dessen hauptsächlichste Arbeit in den *Math. Ann.*, 36 enthalten ist. Für binäre Formen mit mehreren Variabelenreihen findet man einen Beweis bei Peano, *Acc. Torino,* 1881—82, S. 73. Weitere Angaben siehe § 10.

Die Anzahl der Covarianten J vom m^{ten} *Grad und der* p^{ten} *Ordnung einer Form der* n^{ten} *Ordnung ist der Anzahl der Covarianten vom* n^{ten} *Grad und der* p^{ten} *Ordnung einer Form der* m^{ten} *Ordnung gleich. Das Umkehrungstheorem von Hermite. Cambr. Dubl. math. J.,* 9, 1854, S. 172. Dieses Theorem hat Deruyts, *Brux. Bull.*, (3), 22, 1891 auf *ultrabinäre* Formen ausgedehnt; vergl. auch Gordan, *Gött. Nachr.*, 1897.

Wir geben noch das Brioschi'sche Theorem, *Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen,* 1895, S. 116; *Compt. Rend.*, 1895 an:

Wenn zwei binäre Formen einen gemeinschaftlichen linearen Factor haben, so lässt sich eine beiden simultane Covariante von den Graden p und q und der Ordnung m durch die Invarianten und Covarianten derjenigen Formen ausdrücken, welche man aus den gegebenen durch Ausscheidung des gemeinsamen Factors erhält. Ueber die Anwendung dieses Theorems siehe Brioschi, *Acc. Torino,* 1896. Vergl. auch Lüroth, *Erl. Ber.,* 1896.

Volles System für eine Gesammtheit linearer Formen. Jede Covariante oder Invariante eines Systems linearer Formen a_x, b_x, $\cdots$ *setzt sich aus Aggregaten von Factoren der folgenden drei Typen zusammen:*

1. *Invarianten vom Typus* (ab), $\cdots$,
2. *Covarianten vom Typus* a_x, b_x, a_y, b_y, $\cdots$,
3. *Covarianten vom Typus* (xy), $\cdots$.

Volle Systeme einer und mehrerer quadratischer Formen. Das volle System einer quadratischen Form a_x^2 *besteht aus der Covariante* a_x^2 *und der Invariante* $(aa')^2$ *(Discriminante).*

Die Discriminante $(aa')^2$ hat, durch die wirklichen Coefficienten ausgedrückt, die Gestalt $2(a_0a_2 - a_1^2)$.

Das volle System zweier quadratischer Formen

$$f = a_x^2, \quad \varphi = b_x^2$$

besteht aus:

1. *den beiden Formen selbst,*
2. *den Discriminanten*

$$A_{ff} = (aa')^2, \quad A_{\varphi\varphi} = (bb')^2$$

der beiden Formen,

3. *der Invariante*

$$A_{f\varphi} = (ab)^2 = a_0 b_2 + a_2 b_0 - 2 a_1 b_1,$$

4. *der Functionaldeterminante der beiden Formen*

$$\vartheta = (ab)\, a_x b_x = (a_0 b_1 - a_1 b_0)\, x_1^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0)\, x_1 x_2 + \\ + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x_2^2.$$

Zwischen diesen Formen besteht die Beziehung

$$\vartheta^2 = -\tfrac{1}{2}\left(A_{ff}\varphi^2 - 2 A_{f\varphi} f \varphi + A_{\varphi\varphi} f^2\right).$$

Ist ϑ identisch Null, so sind f und φ proportional zu einander. Wenn $A_{ff}A_{\varphi\varphi} - A_{f\varphi}^2$ identisch Null ist, so haben die beiden Formen einen gemeinschaftlichen Factor, d. h. $A_{ff}A_{\varphi\varphi} - A_{f\varphi}^2$ ist die Resultante der beiden quadratischen Formen.

Das volle System von drei oder mehreren quadratischen Formen

$$f = a_x^2, \quad \varphi = b_x^2, \quad \psi = c_x^2, \quad \cdots$$

besteht aus:

1. *den n Formen selbst,*
2. *den $\frac{n(n+1)}{2}$ Formen A_{ff}, $A_{\varphi\varphi}$, $\cdots$, $A_{f\varphi}$, $\cdots$,*
3. *den $\frac{n(n-1)}{2}$ quadratischen Covarianten*

$$(f, \varphi) = \vartheta_{f\varphi}, \quad (f, \psi) = \vartheta_{f\psi}, \quad \cdots,$$

4. *den $\frac{1}{6} n(n-1)(n-2)$ Invarianten vom Typus*

$$R_{f\varphi\psi} = ((f, \varphi), \psi) = (ab)(ac)(bc) = \begin{vmatrix} a_0, & b_0, & c_0 \\ a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \end{vmatrix}.$$

Im Ganzen sind es $\frac{1}{6} n(n^2 + 3n + 8)$ invariante Formen mit Einschluss der gegebenen.

Die Beziehungen zwischen diesen Formen lauten mit Ausnahme der oben bereits angegebenen, welche für die Covarianten von nur zwei Formen gilt:

$$2 R_{f\varphi\psi}^2 = \begin{vmatrix} A_{ff}, & A_{f\varphi}, & A_{f\psi} \\ A_{\varphi f}, & A_{\varphi\varphi}, & A_{\varphi\psi} \\ A_{\psi f}, & A_{\psi\varphi}, & A_{\psi\psi} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A_{ff}, & A_{f\varphi}, & A_{f\psi}, & f \\ A_{\varphi f}, & A_{\varphi\varphi}, & A_{\varphi\psi}, & \varphi \\ A_{\psi f}, & A_{\psi\varphi}, & A_{\psi\psi}, & \psi \\ f, & \varphi, & \psi, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$f\vartheta_{\varphi\psi} + \varphi\vartheta_{\psi f} + \psi\vartheta_{f\varphi} = 0,$$

$$R_{f\varphi\psi} f = A_{ff}\vartheta_{\varphi\psi} + A_{f\varphi}\vartheta_{\psi f} + A_{f\psi}\vartheta_{f\varphi}.$$

Zwischen den Invarianten von vier oder fünf Formen bestehen ausserdem die Relationen:

$$\begin{vmatrix} A_{ff}, & A_{f\varphi}, & A_{f\psi}, & A_{f\chi} \\ A_{\varphi f}, & A_{\varphi\varphi}, & A_{\varphi\psi}, & A_{\varphi\chi} \\ A_{\psi f}, & A_{\psi\varphi}, & A_{\psi\psi}, & A_{\psi\chi} \\ A_{\varrho f}, & A_{\varrho\varphi}, & A_{\varrho\psi}, & A_{\varrho\chi} \end{vmatrix} = 0,$$

worin ϱ *speciell auch die Form* χ *sein kann; ferner:*

$$A_{f\varphi}R_{\psi\chi\varrho} - A_{f\psi}R_{\chi\varrho\varphi} + A_{f\chi}R_{\varrho\varphi\psi} - A_{f\varrho}R_{\varphi\psi\chi} = 0$$

und andere ihnen ähnliche.

Für die Invarianten von sechs Formen hat man ausser allen vorstehenden noch die Beziehungen:

$$R_{f\varphi\psi}R_{\chi\varrho\sigma} - R_{f\varphi\chi}R_{\varrho\sigma\psi} + R_{f\varphi\varrho}R_{\sigma\psi\chi} - R_{f\varphi\sigma}R_{\psi\chi\varrho} = 0,$$

$$2R_{f\varphi\psi}R_{\chi\varrho\sigma} = \begin{vmatrix} A_{f\chi}, & A_{f\varrho}, & A_{f\sigma} \\ A_{\varphi\chi}, & A_{\varphi\varrho}, & A_{\varphi\sigma} \\ A_{\psi\chi}, & A_{\psi\varrho}, & A_{\psi\sigma} \end{vmatrix}.$$

Die Covarianten von vier oder mehr Formen sind unter anderen an die Bedingungen gebunden:

$$2\vartheta_{f\varphi}\vartheta_{\psi\chi} = \begin{vmatrix} A_{f\psi}, & A_{f\chi}, & f \\ A_{\varphi\psi}, & A_{\varphi\chi}, & \varphi \\ \psi, & \chi, & 0 \end{vmatrix},$$

$$2\vartheta_{f\varphi}R_{\varphi\psi\varrho} = \begin{vmatrix} A_{f\psi}, & A_{f\chi}, & A_{f\varrho} \\ A_{\varphi\psi}, & A_{\varphi\chi}, & A_{\varphi\varrho} \\ \psi, & \chi, & \varrho \end{vmatrix},$$

$$fR_{\varphi\psi\chi} - \varphi R_{\psi\chi f} + \psi R_{\chi f\varphi} - \chi R_{f\varphi\psi} = 0,$$

$$fR_{\varphi\psi\chi} = A_{f\varphi}\vartheta_{\psi\chi} + A_{f\psi}\vartheta_{\chi\varphi} + A_{f\chi}\vartheta_{\varphi\psi}.$$

Das Verschwinden der Invariante R, welche zu drei quadratischen Formen f, φ, ψ gehört, hat die folgende geometrische Bedeutung:

Wenn $R_{f,\varphi,\psi}$ identisch Null ist, so gehören die drei Paare von Punkten, welche die Wurzeln der drei gleich Null gesetzten quadratischen Formen darstellen, derselben Involution (siehe Bd. 2, Kap. 1) *an und umgekehrt.* Ueber die geometrischen Interpretationen der Invarianten und Covarianten quadratischer Formen siehe Bd. 2, Kap. 2.

Volles System der cubischen Formen. Das volle System der Form $f = a_x^3 = a_x'^3 = \cdots$ setzt sich zusammen aus:

1. f,

2. $\Delta = (aa')^2 a_x a'_x = 2 \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & x_2^2 \\ a_1, & a_2, & -x_1 x_2 \\ a_2, & a_3, & x_1^2 \end{vmatrix}$,

3. $R = (\Delta\Delta')^2 = (aa')^2 (a'' a''')^2 (aa''') (a'a'') =$
$= 2\{4(a_0 a_2 - a_1^2)(a_1 a_3 - a_2^2) - (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2\}$,

4. $Q = (a\Delta) a_x^2 \Delta_x = (aa')^2 (a'a'') a_x a_x'^2 =$
$= (a_0^2 a_3 - 3 a_0 a_1 a_2 + 2 a_1^3) x_1^3 +$
$+ 3(a_0 a_1 a_3 - 2 a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2) x_1^2 x_2 -$
$- 3(a_0 a_2 a_3 - 2 a_1^2 a_3 + a_1 a_2^2) x_1 x_2^2 -$
$- (a_0 a_3^2 - 3 a_1 a_2 a_3 + 2 a_2^3) x_2^3$.

Δ, R, Q heissen bezüglich *die Hesse'sche Determinante, die Discriminante und die Functionaldeterminante.*

Sie sind an die Beziehung gebunden:

$$2Q^2 + \Delta^3 + Rf^2 = 0.$$

Die Discriminante von f ist bis auf einen constanten Factor der Discriminante von Δ d. h. R gleich. Für $R = 0$ haben f und Δ einen doppelten linearen Factor, der für beide derselbe ist; Q wird dann genau der Cubus dieses linearen Factors.

Ist Δ identisch Null, so wird f genau der Cubus einer linearen Form.

Die Punkte, welche die Wurzeln von $f = 0$ und $Q = 0$ darstellen, sind drei Paare von Punkten in Involution (Bd. 2, Kap. 1), *von denen die Doppelpunkte durch die Wurzeln von $\Delta = 0$ dargestellt werden.*

Ueber andere geometrische Deutungen vergl. Bd. 2, Kap. 2.

Die zweite Ueberschiebung von f und Δ verschwindet identisch.

Die dritte Ueberschiebung von f mit Q ist gleich R.

Die invarianten Bildungen der cubischen Formen der Schar

$$\lambda f + \mu Q$$

werden rational durch die von f mittelst der Formeln ausgedrückt:

$$\Delta_{\lambda\mu} = \Theta \cdot \Delta,$$
$$R_{\lambda\mu} = \Theta^2 \cdot R,$$
$$Q_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2}\,\Theta\left(Q\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda} - f\frac{\partial\Theta}{\partial\mu}\right),$$

worin $\Theta = \lambda^2 + \frac{R}{2}\mu^2$ ist.

Das System einer cubischen binären Form war schon Cayley und Sylvester bekannt. Näheres findet man in den Werken von Clebsch und Gordan, die am Ende des § 2 citirt wurden. Ueber die sogenannte *invariante Lösung* der Gleichung 3ten Grads siehe S. 127 u. ff. des Clebsch'schen Buches. Eine Methode, um eine beliebige invariante Bildung einer binären cubischen Form durch die Bildungen des vollen Systems auszudrücken, findet man bei Pascal, *Rend. Acc. Napoli,* 1887.

Volles System einer quadratischen und cubischen Form. — Das volle System von

$$f = a_x^2 = a_x'^2 = \cdots,$$
$$\varphi = b_x^3 = b_x'^3 = \cdots$$

bilden:

1. *die fünf Invarianten*

$$A_{ff} = (aa')^2, \quad A_{\Delta\Delta} = (\Delta\Delta')^2, \quad A_{f\Delta} = (a\Delta)^2,$$
$$F = (ap)^2, \quad M = -(\theta p)^2;$$

2. *die vier linearen Covarianten*

$$p = (ab)^2 b_x, \quad r = (p\Delta)\,\Delta_x,$$
$$q = (ap)\,a_x, \quad s = (\theta p)\,\theta_x;$$

3. *die drei quadratischen Covarianten*

$$f, \quad \Delta = (bb')^2 b_x b_x', \quad \theta = (a\Delta)\,a_x\Delta_x;$$

4. *die drei cubischen Covarianten*

$$\varphi, \quad Q = (b\Delta)\,b_x^2\Delta_x, \quad \vartheta = (ab)\,a_x b_x^2.$$

Im Ganzen sind es 15 Formen. Die Bezeichnungen sind Gordan entnommen, die von Clebsch weichen etwas von ihnen ab.

Zwischen den fünf Invarianten besteht die Beziehung

$$-2M^2 = A_{ff}L^2 - 2A_{f\Delta}F \cdot L + A_{\Delta\Delta}F^2,$$

worin

$$L = \tfrac{1}{2}\{A_{ff}A_{\Delta\Delta} - A_{f\Delta}^2\} \quad \textit{ist.}$$

Die Invariante L ist die Discriminante von θ.

Andere Relationen sind:

$q^2 = fF - \frac{1}{2}p^2A_{ff}$,
$r^2 = \Delta L - \frac{1}{2}p^2A_{\Delta\Delta}$, worin L den oben angegebenen Werth hat,
$s^2 = -\theta M - \frac{1}{2}p^2L$.

Die Form θ kann man auch statt durch die Ueberschiebung (f, Δ) durch die Ueberschiebung (φ, p) ausdrücken, also

$$\theta = (f, \Delta) = (\varphi, p) \quad \textit{setzen.}$$

Die Resultante von f und φ wird durch die Fundamentalinvarianten mittelst der Formel

$$(\text{Result.}) = F - 2A_{f\Delta}A_{ff} \quad \textit{ausgedrückt.}$$

Das volle System einer quadratischen und einer cubischen Form haben Salmon und Clebsch behandelt. Ueber den Fall, in welchem statt der cubischen Form φ die Form

$$\lambda\varphi + \mu Q$$

substituirt wird, siehe Clebsch, *Crelle,* 68 und *Theorie der bin. Form.*, S. 212.

Volles System zweier cubischen Formen. Das System von $f = a_x^3 = a_x'^3 = \cdots$, $\varphi = b_x^3 = b_x'^3 = \cdots$ besteht aus den folgenden 26 *Formen:*

1. *sieben Invarianten*

$$A_{\Delta\Delta},\ A_{\nabla\nabla},\ A_{\Delta\nabla},\ A_{\Delta\theta},\ A_{\nabla\theta},$$
$$J = (f, \varphi)^3, \quad \Omega = (\Delta\nabla)(\nabla\theta)(\Delta\theta);$$

2. *sechs linearen Covarianten*

$$\pi = (f, \nabla)^2,\ p = (\varphi, \Delta)^2,$$
$$(\Delta, p),\ (\Delta, \pi),\ (\nabla, p),\ (\nabla, \pi);$$

3. *sechs quadratischen Covarianten*

$$\Delta = (f, f)^2,\ \nabla = (\varphi, \varphi)^2,\ \theta = (f, \varphi)^2,$$
$$(\Delta\nabla),\ (Q, \varphi)^2,\ (K, f)^2;$$

4. *sechs cubischen Covarianten*

$$f, \ \varphi, \ Q = (f, \Delta), \ K = (\varphi, \nabla),$$
$$(f, \nabla), \ (\varphi, \Delta);$$

5. *einer biquadratischen Covariante*

$$\vartheta = (f, \varphi).$$

Eine sehr einfache Grundbeziehung zwischen ihnen lautet

$$(f, \pi) + (\varphi, p) = 0.$$

Die Discriminante von θ *ist*

$$A_{\theta\theta} = A_{\Delta\nabla} - \frac{J^2}{2},$$

und ferner ist

$$(f, \pi) = (\nabla, \nabla),$$
$$2\Omega = (p, \pi).$$

Zwischen den sieben Invarianten gibt es die beiden Relationen

$$2\Omega^2 = \begin{vmatrix} A_{\Delta\Delta}, & A_{\theta\Delta}, & A_{\nabla\Delta} \\ A_{\Delta\theta}, & A_{\theta\theta}, & A_{\nabla\theta} \\ A_{\Delta\nabla}, & A_{\theta\nabla}, & A_{\nabla\nabla} \end{vmatrix},$$

worin $A_{\theta\theta}$ den oben angegebenen Werth hat, und

$$4J\Omega = (A_{\Delta\Delta}A_{\nabla\nabla} - A_{\nabla\Delta}A_{\Delta\nabla}) -$$
$$- 4(A_{\Delta\theta}A_{\theta\nabla} - A_{\theta\theta}A_{\Delta\nabla}).$$

Die Resultante von f und φ ist

$$(\text{Result.}) = 27\Omega - 2J^3.$$

Man glaubte früher, das System der zwei cubischen Formen sei aus 28 Formen zusammengesetzt; siehe z. B. Clebsch, *Binäre Formen,* Leipzig 1872; später fand man, dass zwei lineare Covarianten zu viel aufgeführt sind, weil sie sich rational durch die anderen ausdrücken lassen; siehe Sylvester, *Sur le vrai nombre des covariants fondamentaux d'un système de deux cubiques.* Compt. Rend., 1879, 2. Abth., S. 828; D'Ovidio und Gerbaldi, *Acc. Torino,* 1880.

Es lassen sich noch andere lineare Covarianten bilden, welche durch diejenigen des Systems ausgedrückt, die folgende Gestalt haben:

$$(Q, \nabla)^2 = (\pi, \Delta),$$
$$(K, \Delta)^2 = (p, \nabla),$$
$$(\varphi, \Delta^2)^3 = (p, \Delta),$$
$$(f, \nabla^2)^3 = (\pi, \nabla),$$
$$-(f, \pi p)^2 = (\varphi, p^2)^2 = A_{\theta\Delta}\pi + (A_{\theta\theta} + \tfrac{1}{2}J^2)p + J(\Delta, \pi),$$
$$-(\varphi, \pi p)^2 = (f, \pi^2)^2 = A_{\theta\nabla}p + (A_{\theta\theta} + \tfrac{1}{2}J^2)\pi - J(\nabla, p),$$
$$(f, p^2)^2 = A_{\Delta\Delta}\pi + A_{\theta\Delta}p + J(\Delta, p),$$
$$(\varphi, \pi^2)^2 = A_{\nabla\nabla}p + A_{\theta\nabla}\pi + J(\nabla, \pi).$$

Wenn $\Omega = 0$ ist, ohne dass die Unterdeterminanten zweiten Grads der Determinante, durch welche Ω^2 (siehe oben) *dargestellt wird, verschwinden, so gibt es eine lineare Combination von f und φ*

$$f + \lambda\varphi,$$

die der vollständige Cubus der linearen Covarianten p oder π ist, welche letzteren alsdann bis auf einen Factor zusammenfallen; und umgekehrt.

Wenn alle Minoren zweiten Grads der Determinante, durch welche Ω^2 ausgedrückt wird, und mithin auch Ω selbst, Null sind, alsdann ist entweder φ vom Typus $f + \lambda Q$, d. h. eine Covariante von f, oder f und φ sind vollständige Cuben. In beiden Fällen sind p und π identisch Null.

Das System dreier cubischer Formen hat v. Gall, *Math. Ann.*, 45, 1894 behandelt.

Untersuchungen über das System beliebig vieler cubischer binären Formen hat Peano angestellt, *Acc. Torino,* 1881—82, S. 580.

Volles System einer biquadratischen binären Form. Das volle System von

$$f = a_x^4 = a_x'^4 = \cdots$$

setzt sich zusammen aus:

1. *zwei Invarianten*

$$i = (aa')^4 = 2(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2),$$
$$j = (f, H)^4 = (aa')^2(aa'')^2(a'a'')^2 =$$
$$= 6\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2 \\ a_1, & a_2 & a_3 \\ a_2, & a_3, & a_4 \end{vmatrix};$$

2. *zwei biquadratischen Covarianten*

$$f \text{ und}$$

$$H = (aa')^2 a_x^2 a_x'^2 = 2\{(a_0a_2 - a_1^2)x_1^4 + $$
$$+ 2(a_0a_3 - a_1a_2)x_1^3x_2 + (a_0a_4 + 2a_1a_3 - 3a_2^2)x_1^2x_2^2 +$$
$$+ 2(a_1a_4 - a_2a_3)x_1x_2^3 + (a_2a_4 - a_3^2)x_2^4\};$$

3. *einer Covariante der* 6ten *Ordnung*

$$T = (f, H) = (aa')^2(a''a')a_x^2 a_x' a_x''^3 =$$
$$= (a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3)x_1^6 +$$
$$+ (a_0^2a_4 + 2a_0a_1a_3 - 9a_0a_2^2 + 6a_1^2a_2)x_1^5x_2 +$$
$$+ 5(a_0a_1a_4 - 3a_0a_2a_3 + 2a_1^2a_3)x_1^4x_2^2 +$$
$$+ 10(a_1^2a_4 - a_0a_3^2)x_1^3x_2^3 +$$
$$+ 5(-a_0a_3a_4 + 3a_1a_2a_4 - 2a_1a_3^2)x_1^2x_2^4 +$$
$$+ (9a_4a_2^2 - a_4^2a_0 - 2a_1a_3a_4 - 6a_3^2a_2)x_1x_2^5 +$$
$$+ (3a_2a_3a_4 - a_1a_4^2 - 2a_3^3)x_2^6.$$

Die Formen H und T bezeichnet Gordan mit Δ und t. *Sie sind mit f, i, j durch die Beziehung verbunden:*

$$T^2 = -\frac{1}{2}\left\{H^3 - \frac{i}{2}Hf^2 + \frac{j}{3}f^3\right\}.$$

Nennt man die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

$$\Omega = z^3 - \frac{i}{2}z - \frac{j}{3} = 0 \quad \text{(Resolvente)}$$

m, m', m'' und setzt

$$H + mf = -2\varphi^2,$$
$$H + m'f = -2\psi^2,$$
$$H + m''f = -2\chi^2,$$

so ist

$$T = 2\varphi\psi\chi.$$

Die drei quadratischen Formen φ, ψ, χ besitzen die bemerkenswerthe Eigenschaft, *dass jede von ihnen die Functionaldeterminante der beiden anderen ist:*

$$(\psi, \chi) = \frac{m' - m''}{2}\varphi,$$

$$(\chi, \varphi) = \frac{m'' - m}{2}\psi,$$

$$(\varphi, \psi) = \frac{m - m'}{2}\chi.$$

Die Discriminante von f lautet

$$R_f = \frac{1}{27}(i^3 - 6j^2).$$

Dieser Ausdruck ist auch der Discriminante der cubischen Gleichung $\Omega = 0$ äquivalent.

Die Resultante von f und H ist bis auf einen Zahlenfactor dem Quadrat der Discriminante von f gleich.

Wenn die Discriminante von f verschwindet, so hat f einen doppelten Factor, der auch für H doppelt, für T aber fünffach ist.

Wenn sich f und H um einen constanten Factor unterscheiden, dann und nur dann ist f das vollständige Quadrat einer Form zweiter Ordnung.

Ist H eine genaue vierte Potenz, ohne identisch zu verschwinden $(i = 0,\ j = 0)$, *so hat f einen dreifachen Factor; hat umgekehrt f einen dreifachen Factor, so ist H eine genaue vierte Potenz und* $i = 0,\ j = 0$. *Alsdann wird T die genaue sechste Potenz des Factors, der in f dreifach auftritt.*

Verschwindet H identisch, so ist f die genaue vierte Potenz eines linearen Ausdrucks und umgekehrt; in diesem Fall sind offenbar T, i, j gleich Null.

Die dritte Ueberschiebung von f und H verschwindet identisch.

Die vierten Ueberschiebungen von f mit T oder von H mit T sind identisch Null.

Die zweite Ueberschiebung von T mit sich selbst hat den Werth

$$(T, T)^2 = -\frac{1}{12}\left(iH^2 - 2jHf + \frac{i^2}{6}f^2\right).$$

Die vierte Ueberschiebung von T über sich selbst ist identisch gleich Null.

Die sechste Ueberschiebung von T mit sich selbst lautet:

$$(T, T)^6 = \frac{1}{4}\left(\frac{i^3}{6} - j^2\right).$$

Die Invarianten der zusammengesetzten Form

$$\lambda f + \mu H$$

sind:

$$\begin{aligned}
H_{\lambda\mu} &= \frac{1}{3}\left(H\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} - f\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right),\\
T_{\lambda\mu} &= \Omega T,\\
i_{\lambda\mu} &= -3\Delta_\Omega, \quad i^3_{\lambda\mu} - 6j^2_{\lambda\mu} = \Omega^2(i^3 - 6j^2),\\
j_{\lambda\mu} &= -3Q_\Omega,
\end{aligned}$$

worin

$$\Omega = \lambda^3 - \frac{i}{2}\lambda\mu^2 - \frac{j}{3}\mu^3 \quad \text{ist.}$$

Ueber die geometrische Bedeutung der Invarianten und Covarianten der biquadratischen Form siehe Bd. 2, Kap. 2.

Die invariante Lösung der biquadratischen Gleichung wird in dem Werk von Clebsch, S. 154 u. ff. besprochen.

Volles System einer quadratischen und biquadratischen Form. — Es sei

$$f = a_x^2 = a_x'^2 = \cdots,$$
$$\varphi = b_x^4 = b_x'^4 = \cdots.$$

Das volle System besteht dann aus:

1. *sechs Invarianten*

$$i,\ j,\ \text{(siehe oben)}$$
$$D = (aa')^2,$$
$$A = (ab)^2(a'b)^2 = (\psi a)^2,$$
$$B = (aH)^2(a'H)^2 = (\chi a)^2,$$
$$C = (\psi\chi)(\psi a)(\chi a) = (\tau a)^2;$$

2. *sechs quadratischen Covarianten*

$$f,\ \psi = (ab)^2 b_x^2,\ \chi = (aH)^2 H_x^2,$$
$$\tau = (\psi\chi)\psi_x\chi_x,\ \Psi = (\psi a)\psi_x a_x,\ X = (\chi a)\chi_x a_x;$$

3. *fünf biquadratischen Covarianten*

$$\varphi,\ H = (bb')^2 b_x^2 b_x'^2,$$
$$L = (ba)b_x^3 a_x,\ M = (Ha)H_x^3 a_x,\ K = (\psi H)\psi_x H_x^3;$$

4. *einer Covariante sechsten Grads*

$$T = (\varphi, H);$$

im Ganzen 18 *Formen.*

Sie sind an die Relation gebunden:

$$C^2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} D, & A, & B \\ A, & B + \frac{iD}{3}, & \frac{iA}{6} + \frac{jD}{3} \\ B, & \frac{iA}{6} + \frac{jD}{3}, & \frac{jA}{3} - \frac{iB}{6} + \frac{i^2D}{18} \end{vmatrix}.$$

Die Resultante von f und φ hat die Form

$$(\text{Result.}) = A^2 - 4DB + \tfrac{2}{3}iD^2.$$

Wenn C verschwindet und nur in diesem Fall, gibt es eine quadratische Form g derart, dass sich φ als quadratische Function von f und g ausdrücken lässt. Mit diesem vollen System haben sich Bessel und Harbordt, *Math. Ann.*, 1 und Brioschi, ib., 3 beschäftigt.

Das System *einer cubischen und biquadratischen Form* wurde von Gundelfinger behandelt, *Programm*, Stuttgart 1869; Sylvester, *Compt. Rend.*, 1878 reducirte es um drei Formen. *Es besteht nach dieser Reduction aus* 61 *Formen:*

1. *zwanzig Invarianten,*
2. *fünfzehn linearen Covarianten,*
3. *zehn quadratischen Covarianten,*
4. *acht cubischen,*
5. *fünf biquadratischen,*
6. *zwei Covarianten vom* 5ten *und*
7. *einer vom* 6ten *Grad.*

Die Resultante einer cubischen und biquadratischen Form wurde von Brioschi berechnet, *Collect. math. in mem. Chelini,* Mailand 1881.

Das System zweier biquadratischer Formen hat Gordan untersucht, *Math. Ann.*, 2; siehe auch Faà di Bruno, *bin. Formen,* deutsch von Walter, Leipzig 1881. Es besteht aus 28 Formen:

1. *acht Invarianten,*
2. *acht quadratischen Covarianten,*
3. *sieben Covarianten* 4ter *Ordnung und*
4. *fünf* 6ter *Ordnung.*

Gordan l. c. hatte noch zwei überflüssige Bildungen hinzugenommen, wie später Sylvester nachwies, *Compt. Rend.*, 1877. Zwischen den acht Invarianten besteht eine Beziehung, bei deren Berechnung Bertini, *Giorn. di Batt.*, 14; *Math. Ann.*, 11, 1877 Fehler machte; genau ist die Darstellung D'Ovidio's, *Acc. Torino,* 15, 1880. Auch andere Autoren beschäftigten sich mit diesem Gegenstand; siehe D'Ovidio, *Sopra alcune classi di sizigie binarie, Acc. Torino,* 1893 und eine neuere Arbeit Brioschi's, ib., 1896. Die Resultante aus zwei biquadratischen Formen hat D'Ovidio gefunden, *Acc. Torino,* 1880. Vergl. auch Brioschi, l. c.

Ueber die Berechnung der invarianten Bedingungen, unter

denen zwei biquadratische Formen *zwei* oder *drei* Wurzeln gemeinschaftlich haben, siehe Gordan, *Math. Ann.*, 3; Pascal, *Ann. di mat.*, 16 und *Rend. Acc. Napoli*, 1888.

Andere Arbeiten über das System zweier biquadratischen Formen sind von Sylvester, *Americ. Journ.*, 2; Stroh, *Math. Ann.*, 22; v. Gall, *Math. Ann.*, 33.

Eine Form 5ter *Ordnung* besitzt *höchstens* 23 invariante Formen, die sich so vertheilen:

1. vier Invarianten vom 4., 8., 12., 18ten Grad,
2. vier Covarianten 1ter Ordnung vom 5., 7., 11., 13ten Grad,
3. drei „ 2ter „ „ 2., 6., 8ten Grad,
4. drei „ 3ter „ „ 3., 5., 9ten Grad,
5. zwei „ 4ter „ „ 4., 6ten Grad,
6. drei „ 5ter „ „ 1., 3., 7ten Grad,
7. zwei „ 6ter „ „ 2., 4ten Grad,
8. eine Covariante 7ter „ „ 5ten Grad,
9. eine „ 9ter „ „ 3ten Grad.

Durch die beiden ersten Invarianten d. h. durch die vom 4ten und 8ten Grad, lässt sich die von Salmon, *Cambr. Dubl. Math. Journ.*, 5, 1850 berechnete *Discriminante* ausdrücken.

Das volle System der Form 5ter Ordnung findet man schon in dem Werke von Clebsch. Siehe auch Gordan, *Invariantenth.*; Bruno-Walter, *Binäre Formen*, S. 328—355 und Cayley, *Werke*, 2; ferner die Abhandlung D'Ovidio's, *Acc. Torino*, 1880.

Die Resultante einer Form 5ter Ordnung und einer quadratischen Form, einer Form 5ter Ordnung und einer cubischen untersuchte D'Ovidio, *Mem. Società it. delle scienze*, Bd. 4, 1881; die einer Form 5ter Ordnung und einer biquadratischen oder zweier Formen 5ter Ordnung D'Ovidio, *Mem. Lincei*, 4, 1888.

Ueber die invarianten Bedingungen, unter denen zwei Formen 5ter Ordnung *zwei* Wurzeln gemeinschaftlich haben, siehe Gordan, *Math. Ann.*, 3, über den Fall von *drei* gemeinschaftlichen Wurzeln Pascal, *Ann. di mat.*, 16 und über *vier* Berzolari, *Ann. di mat.*, 19.

Die vollen Systeme einer Form 5ter Ordnung in Verbindung mit einer anderen Form sind nicht vollständig bekannt, wenn man eine Arbeit Winter's, *Progr.*, Darmstadt 1880 ausnimmt, in welcher der Fall einer quadratischen und einer Form 5ter Ordnung behandelt wird.

Das volle System einer binären Form 6[ter] *Ordnung* besteht aus:

1. fünf Invarianten vom 2., 4., 6., 10., 15[ten] Grad,
2. sechs Covarianten 2[ter] Ordnung vom 3., 5., 7., 8., 10., 12[ten] Grad,
3. fünf „ 4[ter] „ „ 2., 4., 5., 7., 9[ten] Grad,
4. fünf „ 6[ter] „ „ 1., 3., 4., 6., 6[ten] Grad,
5. drei „ 8[ter] „ „ 2., 3., 5[ten] Grad,
6. einer Covariante 10[ter] „ „ 4[ten] Grad,
7. einer „ 12[ter] „ „ 3[ten] Grad.

Ueber dieses volle System findet man nähere Angaben bei Clebsch, *bin. Formen*, S. 286; Gordan etc. Die Discriminante dieser Form hat zuerst Brioschi berechnet, *Crelle*, 53; *Ann. di mat.*, 1. Vergl. auch Maisano, *Math. Ann.*, 30. Die Beziehungen zwischen den Formen des vollen Systems fand Clebsch, Gordan; Stephanos, *Compt. Rend.*, Bd. 96; Maisano, *Lincei*, Bd. 19; *Math. Ann.*, 31; D'Ovidio, *Acc. Torino,* 1889, 1892, 1893. Die Resultante einer Form 6[ter] Ordnung und einer cubischen Form hat D'Ovidio untersucht, *Acc. Torino*, 1892. Ueber die invarianten Bedingungen, unter denen eine Form 6[ter] Ordnung *mehrere* gleiche Wurzeln hat, siehe Maisano, *Math. Ann.*, 31 und D'Ovidio, *Acc. Torino,* 1888.

Das System einer Form 6[ter] Ordnung und einer quadratischen Form wurde von v. Gall, *Progr.*, Lemgo 1873 behandelt.

Das System einer binären Form 7[ter] *Ordnung* besteht aus Bildungen, deren Anzahl, Ordnung und Grad aus der hier folgenden Tabelle (S. 293) unmittelbar entnommen werden kann.

Mit dem System der Form 7[ter] Ordnung haben sich Krey, *Dissert.*, Göttingen 1874 und Gordan, *Ueber das Formensystem bin. Formen,* Leipzig 1875 befasst. Sylvester, *Am. Journ. of Math.*, 2, 1879 stellte eine Tabelle der Formen des vollen Systems zusammen, welche jedoch Correcturen erfuhr; v. Gall, *Math. Ann.*, 31, S. 318 hat das Problem ausführlicher behandelt und die umstehend von uns wiedergegebene Uebersicht angefertigt. Die Discriminante der Form 7[ter] Ordnung wurde von Gordan, *Math. Ann.*, 31 und von Brioschi, *Ann. di mat.*, (2), 26 untersucht.

Ordnung in den Variabelen.

Grad in den Coefficienten.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1								1								
2			1				1				1					
3				1		1		1		1		1				1
4	1				2		1		2		1				1	
5		1		2		2		2		2				1		
6			3		2		2		2				1			
7		3		2		4		2				1				
8	3		3		3		3				1					
9		3		5		2				1						
10			4		4				1							
11		5		3				1								
12	6		6				1									
13		7		1		1										
14	4				2											
15		3		1												
16	2		3													
17		2														
18	9		1													
19		2														
20	2															
22	3															
23		1														
25		1														
26	2															
30	1															

Für *das volle System der Form* 8ter *Ordnung* gilt die folgende Tabelle:

Ordnung in den Variabelen.

Grad in den Coefficienten.	0	2	4	6	8	10	12	14	18
1					1				
2	1		1		1		1		
3	1		1	1	1	1	1	1	1
4	1		2	1	1	2	1	1	1
5	1	1	2	2	1	3		1	
6	1	1	2	3	1	1			
7	1	2	2	3					
8	1	2	2	2					
9	1	3	1						
10	1	2							
11		2							
12		1							

Im Ganzen sind es 69 Functionen.

Das System wurde von Sylvester aufgestellt, *Am. Journ.*, 2; später untersuchte es v. Gall, *Math. Ann.*, 17, S. 31, 149, 456 und glaubte zuerst, in der Sylvester'schen Tabelle seien drei Bildungen zu viel enthalten und es fehle eine Covariante C_{10}^4 von der 4ten Ordnung und dem 10ten Grad; auf S. 456 corrigirte er dann diesen Irrthum bez. der drei überflüssigen Bildungen und Sylvester bewies schliesslich, *Compt. Rend.*, 1881, dass die C_{10}^4 überflüssig ist. In Bezug auf die Beziehungen zwischen den neun Invarianten vergl. Alagna, *Rend. Palermo,* 6, 1892; 10, 1896. Die Discriminante der Form 8ter Ordnung wurde von Maisano, *Rend. Palermo,* 3, 4 studirt; über die Bedingungen für die Existenz mehrerer vielfacher Wurzeln siehe Alagna, *Rend. Palermo,* 4.

Ueber andere volle Systeme vergl. die citirte Arbeit

Sylvester's, *Am. Journ.*, 2; für die 9te Ordnung erhält der Autor 415 Bildungen, für die 10te 475.[1])

Wichtig für die Theorie der vollen Systeme ist die Arbeit Gordan's *über das Formensystem* etc., Leipzig 1875.

Wir gehen nun zu *den vollen Systemen für Formen mit mehreren Reihen von Variabelen* über, die weder cogredient noch contragredient sind, sondern durchaus unabhängigen linearen Transformationen unterliegen. Ueber diese Fälle sind bis jetzt erst wenige Untersuchungen angestellt worden.

Bilineare Formen. Es liege eine einzige Form von *zwei* Reihen von Variabelen vor und sie sei in beiden Reihen linear (bilinear); symbolisch werde sie durch

$$f = a_x b_y$$

dargestellt.

Das volle System besteht aus f und der Invariante

$$A = (aa')(bb').$$

Das volle System für zwei bilineare Formen

$$f = a_x b_y, \quad \varphi = c_x d_y$$

setzt sich aus den sieben Bildungen zusammen

$$f,\ \varphi,\ A_{11} = (aa')(bb'),\ A_{22} = (cc')(dd'),\ A_{12} = (ac)(bd),$$
$$D = (bd)\,a_x c_x, \quad \Delta = (ac)\,b_y d_y.$$

Ueber das volle System n bilinearer Formen siehe Peano, *Giorn. di Batt.*, 20.

Die quadratisch-lineare Form. Das volle System der quadratisch-linearen Form $f = a_x^2 b_y$ geht aus den fünf folgenden Bildungen hervor:

$$f,\ D = (aa')(bb')\,a_x a'_x,\ \Delta = (aa')^2\,b_y b'_y,$$
$$p = (a\Delta)\,a_x D_x b_y = a_x^2 (b\Delta)\,\Delta_y,$$
$$R = (DD')^2 = (\Delta\Delta')^2.$$

Zwischen den fünf Bildungen besteht die Relation:

$$p^2 = -\tfrac{1}{2}(\Delta D^2 + Rf^2).$$

---

1) Der Autor zählt zu diesen Bildungen auch die identische Covariante (Constante) und bekommt so eine um die Einheit grössere Anzahl, als die oben angegebene.

Ueber die geometrische Bedeutung dieser invarianten Bildungen siehe Peano, *Giorn. di Batt.,* 20.

Das volle System einer quadratisch-quadratischen Form besteht aus 18 Bildungen, nämlich:

1. drei Invarianten,
2. drei quadratisch-quadratischen Formen (2, 2),
3. drei quadratisch-biquadratischen Formen (2, 4),
4. drei biquadratisch-quadratischen Formen (4, 2),
5. zwei biquadratischen Formen in x allein,
6. einer Form 6ter Ordnung in x allein,
7. zwei biquadratischen Formen in y allein,
8. einer Form 6ter Ordnung in y allein.

Die drei Invarianten hat schon Clebsch, *Vorles. über Geom.,* S. 354 gefunden; später fand Capelli, *Giorn. di Batt.,* 17 andere Bildungen und wies nach, dass keine weiteren Grundinvarianten existiren können; Peano, *Giorn. di Batt.,* 20 ermittelte dann das volle System. Viele Jahre später zeigte Gordan, *Math. Ann.,* 33, S. 388 als Anwendung einer allgemeinen Methode, dass für die quadratisch-quadratische Form nicht mehr als 38 Grundbildungen möglich sind, also 20 mehr, als schon vor ihm Peano gefunden hatte; er hat es aber unterlassen, ihre Anzahl auf geeignete Art zu reduciren.

Man kann sich nun auch Formen von mehr als zwei Variabelenreihen denken, über sie existiren jedoch bis jetzt erst wenige Untersuchungen; über die *trilinearen* und *quadrilinearen* Formen sind einige Arbeiten von Le Paige, *Compt. Rend.,* 1881—82; *Atti Torino,* 1881—82, S. 299; *Bull. Acad. Belg.,* (3), 2, S. 40 vorhanden.

§ 7. Typische Darstellung der binären Formen. Schwesterformen.

Unter *typischer Darstellung* einer oder mehrerer Formen versteht man im Allgemeinen eine solche, bei welcher die Variabelen rationale Covarianten und die Coefficienten rationale Invarianten der gegebenen Formen sind.

Bei einer Form a_x^n von *ungerader Ordnung* lässt sich die typische Darstellung auf folgende Art ausführen:

Wie man weiss, (siehe § 2) gibt es für eine solche Form, wenn $n > 3$ ist, immer zwei lineare Covarianten, deren Determinante von Null verschieden ist; sie seien α_x, β_x.

Erhebt man nun beide Seiten der symbolischen identischen Beziehung

$$a_x(\alpha\beta) = \alpha_x(a\beta) - \beta_x(a\alpha)$$

auf die n^{te} Potenz, so erhält man auf der linken Seite $f \cdot (\alpha\beta)^n$ und auf der rechten eine Form von der n^{ten} Ordnung in den Covarianten α_x und β_x mit Coefficienten, welche Invarianten sind. Man braucht alsdann nur noch diese Coefficienten durch die Grundinvarianten auszudrücken.

Ebenso kann man mit einem System von Urformen jedesmal dann verfahren, wenn zwei lineare Covarianten existiren.

Bei einer Form a_x^n von *gerader Ordnung* ergibt sich dagegen die typische Darstellung auf die folgende Art:

Wie man aus § 2 weiss, existiren für ein gerades $n > 4$ immer zwei *quadratische* Covarianten, deren Resultante von Null verschieden ist. Mit ihrer Hülfe lässt sich immer eine dritte bilden, die von den ersten linear unabhängig ist, d. h. ihre Functionaldeterminante. Jedenfalls kann man daher annehmen, es gebe drei quadratische Covarianten α_x^2, β_x^2, γ_x^2.

Aus ihnen erhält man die typische Darstellung, wenn beide Seiten der identischen Relation

$$a_x^2 R_{\alpha\beta\gamma} = \alpha(a, A)^2 + \beta(a, B)^2 + \gamma(a, C)^2,$$

in welcher A, B, C die Functionaldeterminanten von β, γ; γ, α bez. α, β sind und $R_{\alpha\beta\gamma}$ die Invariante der drei quadratischen Formen α, β, γ ist (vergl. § 6), auf die $\frac{n}{2}$te Potenz erhoben werden. Ist insbesondere $\gamma = C$, so wird

$$R_{\alpha\beta\gamma} = \tfrac{1}{2}\{(\alpha, \alpha)^2(\beta, \beta)^2 - [(\alpha, \beta)^2]^2\}$$

und mithin durch Erheben in die $\frac{n}{2}$te Potenz

$$f \cdot [R_{\alpha\beta\gamma}]^{\frac{n}{2}} = [\alpha(a, A)^2 + \beta(a, B)^2 + \gamma(a, C)^2]^{\frac{n}{2}}.$$

Entwickelt man, so ergibt sich die Darstellung von f durch die Variabelen α, β, γ mit Coefficienten, welche Invarianten sind.

Die Formen (Invarianten, Covarianten), mittelst welcher die typische Darstellung ausgeführt wird, heissen *Schwesterformen (forme associate, formes associées).*

Die Anzahl der Schwesterformen beträgt $k + 3$, wenn k die

Anzahl der Coefficienten der gegebenen Formen bezeichnet und wenn als neue Variabelen lineare Covarianten gewählt werden; nimmt man dagegen quadratische Covarianten, so beträgt diese Zahl $k + 10$.

Jede Invariante oder Covariante des gegebenen Systems lässt sich immer rational (aber nicht als ganze Function) durch die Schwesterformen der typischen Darstellung ausdrücken.

Mit der typischen Darstellung der binären Formen hat sich zuerst Hermite, *Cambr. Dubl. Math. J.*, 9, 1852 beschäftigt, dann folgten Clebsch, *Gött. Nachr.*, 1870; *Math. Ann.*, 3; Gundelfinger, *Crelle*, 74; Sylvester, *Compt. Rend.*, 1878; *Americ. J.*, 1. Mit der typischen Darstellung simultaner Formen befasste sich Bessel und Harbordt, *Math. Ann.*, 1.

Ueber die typische Darstellung der *ultrabinären* Formen (der ternären, quaternären etc.) siehe weiter unten § 11.

§ 8. Canonische Darstellung der Formen.

Unter der *canonischen Gestalt* einer gegebenen Form pflegt man eine Form zu verstehen, in welche die gegebene sich transformiren lässt, und welche besondere Vereinfachungen speciell in Bezug auf die *Anzahl* der Terme, welche sie enthält und auf die *Beschaffenheit* dieser Terme aufweist; so z. B. ist eine Form *canonisch*, in welcher die Anzahl der willkürlichen Coefficienten auf die geringste reducirt ist, und wird eine Form *canonisch* genannt, deren Terme die Potenzen einer möglichst geringen Anzahl linearer Formen sind.

Speciell *die typische canonische Form* erhält man, wenn in ihr nur Invarianten und Covarianten der Urform auftreten.

1. *Quadratische Formen.*

Jede binäre quadratische Form $f = a_x^2 = b_x^2 = \cdots$ lässt sich immer durch lineare Transformation auf die canonische Form

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 \quad \text{bringen.}$$

Man braucht dazu nur die lineare Form

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_x$$

willkürlich zu wählen; die beiden linearen Formen ξ_1, ξ_2 werden alsdann durch die Formeln

$$\xi_1 = \sqrt{-\tfrac{1}{2}(ab)^2} \cdot \alpha_x,$$
$$\xi_2 = (a\alpha)\, a_x$$

bestimmt.

Zwei quadratische Formen lassen sich gleichzeitig auf die vorstehende canonische Gestalt bringen; die Formen ξ_1, ξ_2 sind dann bis auf einen Factor die beiden linearen Factoren der Functionaldeterminante ϑ.

2. *Die cubische Form*
lässt sich stets in

$$f = \frac{1}{\sqrt{-\frac{R}{2}}} (\xi_1^3 - \xi_2^3)$$

transformiren, worin ξ_1, ξ_2, durch x_1, x_2 ausgedrückt, nichts anderes, als die beiden linearen Factoren der quadratischen Covariante Δ sind, nämlich $\Delta = -2\xi_1\xi_2$.

3. *Die biquadratische Form*
kann immer auf die canonische Form

$$f = \xi_1^4 + 6m\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4$$

gebracht werden, worin m eine Wurzel der Gleichung dritten Grads in Bezug auf m^2

$$\frac{i^3}{j^2} = \frac{2}{9} \frac{(1+3m^2)^3}{m^2(1-m^2)^2}$$

bedeutet und ξ_1, ξ_2 die linearen Factoren einer der drei quadratischen Formen φ, ψ, χ sind, in welche die Covariante 6ter Ordnung T (siehe oben) zerfällt.

Der Modul (rs) der Substitution

$$\xi_1 = r_1 x_1 + r_2 x_2,$$
$$\xi_2 = s_1 x_1 + s_2 x_2$$

ergibt sich aus der Formel

$$(rs)^2 = \frac{1+3m^2}{3m(1-m^2)} \cdot \frac{j}{i},$$

wobei angenommen ist, dass j, i aus der *allgemeinen* biquadratischen Form entnommen werden und nicht aus der auf die canonische Form reducirten.

Damit sich die biquadratische Form in

$$\xi_1^4 + \xi_2^4$$

transformiren lasse, ist es nöthig, dass $j = 0$ sei.

4. *Die Form fünfter Ordnung*
lässt sich immer in

$$k_1(\xi_1 - m_1\xi_2)^5 + k_2(\xi_1 - m_2\xi_2)^5 + k_3(\xi_1 - m_3\xi_2)^5$$

Anzahl der [illegible] *in die Summe von drei fünften Potenzen wenn als* [illegible]
nimmt man [illegible] lineare Covarianten der Form 5ter Ord-
Zahl $k +$ [illegible], die man gewöhnlich α, δ nennt:
Jede [illegible] lineare Covariante vom 5ten Grad,
lässt sich [illegible] " 13ten Grad.
die Sch[illegible]
M[illegible] Wurzeln der cubischen Covariante vom
zuerst [illegible] zu nennen pflegt, und die Grössen k
dann [illegible] Beziehungen

Gu[illegible]

$$\ldots + k_2 + k_3) R^5 = I_{26} = -(f, \xi_1^5)^5,$$

Am[illegible]

$$\ldots m_2 + k_3 m_3) R^5 = I_{34} = -(f, \xi_1^4 \xi_2)^5,$$

bef[illegible]

$$\ldots m_2^2 + k_3 m_3^2) R^5 = I_{42} = -(f, \xi_1^3 \xi_2^2)^5$$

(d[illegible] die rechten Seiten als *Ueberschiebungen* von f [illegible]onen der linearen Covarianten ξ_1, ξ_2 ausgedrückt [illegible] die Invariante ist, welche sich bei der Bildung [illegible] *Ueberschiebung* der quadratischen Covariante [illegible] ϑ mit ξ_1 ergibt:

$$R = (\vartheta, \xi_1)^2 = ((\xi_1, j), \xi_1)^2.$$

[illegible] findet man bei Gordan, *Invar.* etc. § 24.

[illegible] *j eine doppelte Wurzel hat*, welche alsdann die von [illegible] ist, so wird die vorstehende canonische Form unmöglich. [illegible] dann

$$R^2 j = \delta^2 \cdot \varrho,$$

und setzt man der Symmetrie wegen

$$\delta = \eta_1,$$

$$\varrho = \eta_2,$$

so wird *die canonische Form* von f (die Bring'sche Form)

$$6 R^4 \cdot f = B \eta_1^5 + 5 B \eta_1^4 \eta_2 - 4 A^2 \eta_2^5,$$

worin A, B die Invarianten der Form 5ter Ordnung und von dem 4ten und 8ten Grad sind.

Durch die Substitution

$$5 B = -4 A^2 \cdot I, \quad \eta_2 = \eta_1 X \sqrt[4]{I}$$

wird die Form 5ter Ordnung auf *die Hermite'sche Form* (*Compt. Rend.*, April 1858)

$$X^5 - X - \tfrac{1}{5} I^{-\frac{1}{4}} \quad \text{gebracht.}$$

Historische Angaben über die Bring'sche Form (welche auch die Jerrard'sche genannt wird, weil sie auch in den *Math. Researches*, Thl. 2, Bristol und London 1834 des letzteren Autors vorkommt) findet man bei Klein, *Ikosaeder*, Leipzig 1884, S. 143.

Die Bring'sche Arbeit, die 1786 in einer der Universität Lund unterbreiteten Promotionsschrift veröffentlicht wurde, ist von Hill, *Verhandl. der schwedischen Akad.*, 1861, welcher für Bring das Verdienst der Entdeckung in Anspruch nahm, später auch von Harley, *Quart. Journ.*, 6, 1863 und in *Grunert's Archiv*, 41, 1864, S. 105—112 reproducirt worden.

Durch eine geeignete Tschirnhausen'sche Transformation (S. 82) *lässt sich jede Gleichung* 5ten *Grads auf die Bring'sche Form bringen.*

Eine andere canonische Gestalt der Form 5ter Ordnung ist die Brioschi'sche, *Ann. di mat.*, (1), 1, 1858; *Atti Ist. Lomb.*, 1858, in welcher die Terme 4ten und 2ten Grads fehlen; *auf sie lässt sich jede allgemeine Gleichung* 5ten *Grads mittelst einer Tschirnhausen'schen Transformation zurückführen.* Siehe auch Gordan, *Math. Ann.*, 28 und *Invarianten*, S. 263—266.

5. *Die Form sechster Ordnung lässt sich auf die canonische Gestalt*

$$u^6 + v^6 + w^6 + \lambda uvw(u-v)(v-w)(w-u)$$

reduciren, worin u, v, w *drei lineare Formen sind, und* λ *die Wurzel der Gleichung*

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3 - \lambda \\ a_1, & a_2, & a_3 + \frac{1}{3}\lambda, & a_4 \\ a_2, & a_3 - \frac{1}{3}\lambda, & a_4, & a_5 \\ a_3 + \lambda, & a_4, & a_5, & a_6 \end{vmatrix} = 0 \quad \textit{bezeichnet.}$$

Wenn die Invariante 4ten *Grads*

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_3, & a_4, & a_5, & a_6 \end{vmatrix}$$

Null ist, so lässt sich die Form 6ter *Ordnung auf*

$$u^6 + v^6 + w^6$$

zurückführen.

Ueber die Reduction der Form 6ter Ordnung auf die Summe von vier sechsten Potenzen siehe Salmon, *Alg. d. lin. Transf.*, Leipzig 1877, Art. 246.

Andere canonische Formen für den allgemeinen Fall sind die Brill'sche, *Math. Ann.*, 20, S. 330; die Brioschi-Maschke'sche, *Math. Ann.*, 30, S. 496; *Acc. Lincei*, 1888; *Acta math.*, 12. Die letztere lautet:

$$x^6 + \alpha x^5 + \beta x^3 + \frac{\alpha^2}{4} x^2 + \gamma x + \delta,$$

worin α, β, γ, δ vier Invarianten der Form 6ter Ordnung bezeichnen; sie ist eine *canonische und typische* Darstellung.

Eine weitere canonische Darstellung ist die Brioschi'sche, *Ann. di mat.*, 11, 1883.

6. *Formen ungerader Ordnung.* Jede Form ungerader Ordnung $2m-1$, deren wirkliche Coefficienten $a_0, a_1, \cdots, a_{2m-1}$ sind, lässt sich immer als Summe von m Potenzen linearer Formen ausdrücken.

$$a_x^{2m-1} = b_1 (x_1 - \alpha_1 x_2)^{2m-1} + \cdots + b_m (x_1 - \alpha_m x_2)^{2m-1}$$

(canonische Form).

Die Gleichung, von welcher die Bestimmung der Coefficienten $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ abhängt, lautet:

$$\begin{vmatrix} a_0, & \cdots, & a_{m-1}, & x_2^m \\ a_1, & \cdots, & a_m, & -x_2^{m-1}x_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m, & \cdots, & a_{2m-1}, & (-1)^m x_1^m \end{vmatrix} = 0,$$

deren linke Seite eine Covariante, die sogenannte *Canonizante* ist.

Die Canonizante ist die Determinante der Derivirten $(2m-2)^{\text{ter}}$ *Ordnung.*

Mit dieser canonischen Darstellung der Formen ungerader Ordnung befasste sich zuerst Sylvester, *Cambr. Dubl. Math. J.*, 6, 7, 1851—1852; *Phil. Mag.*, 1851.

7. *Formen gerader Ordnung.* Eine Form gerader Ordnung $2m$ lässt sich immer als Summe von m Potenzen linearer Formen darstellen, wenn man einen Term hinzufügt, der als Factor eine gewisse Invariante λ enthält, welche die Wurzel von

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \cdots, a_{m-2}, & a_{m-1}, & a_m - \lambda \\ a_1, & a_2, & \cdots, a_{m-1}, & a_m + \frac{1}{(m)_1}\lambda, & a_{m+1} \\ a_2, & a_3, & \cdots, a_m - \frac{1}{(m)_2}\lambda, & a_{m+1}, & a_{m+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m + (-1)^{m-1}\lambda, & a_{m+1}, & a_{m+2}, & \cdots, & a_{2m} \end{vmatrix} = 0$$

ist. Diese Determinante wurde von Cayley *Lambdaique* genannt.

Wenn eine der Wurzeln $\lambda = 0$ *ist, d. h. wenn*

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \cdots, & a_m \\ a_1, & a_2, & \cdots, & a_{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m, & a_{m+1}, & \cdots, & a_{2m} \end{vmatrix} = 0$$

ist, so lässt sich die Form gerader Ordnung als Summe von m *Potenzen linearer Formen ausdrücken.*

Die vorstehende Determinante, deren Verschwinden die Bedingung für die *canonische Darstellbarkeit* einer Form gerader Ordnung angibt, heisst *Catalecticante; sie ist eine Invariante und die Determinante der Derivirten* $2m^{\text{ter}}$ *Ordnung.*

Ueber diese canonischen Darstellungen siehe Cayley, *Crelle,* 54; *Werke,* 4 und auch Faà di Bruno, *Ann. di Tortolini,* 1855. Neuere Arbeiten über den Fall, in welchem die Canonizante vielfache Wurzeln hat, sind von Gundelfinger, *Crelle,* 100; *Gött. Nachr.,* 1883.

§ 9. Apolarität für binäre Formen.

Man sagt, eine binäre Form n^{ter} Ordnung a_x^n oder eine Gruppe von n Punkten sei zu einer anderen, deren Punkte y, z, t, $\cdots$ sind (in der Anzahl n), *apolar,* wenn die Polare

$$a_y a_z a_t \cdots$$

Null ist. Die beiden apolaren Formen sind alsdann a_x^n und $(xy)(xz)(xt)\cdots$.

Dieser Begriff findet sich zuerst bei Battaglini, *Accad. Napoli,* 1864—68, der ihn auch auf ternäre Formen ausdehnte. Später wurde er von Rosanes, *Crelle,* 75, 76; *Math. Ann.,* 6 und von Reye, *Crelle,* 78, 79 weiter entwickelt und mit Glück verwendet. Der letztere führte den Namen *Apolarität* ein, während Battaglini die beiden Formen *harmonisch conjugirt* nannte, indem er die Apolarität als eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Harmonie (vergl. Bd. 2, Kap. 1, § 2) betrachtete, auf welche sie in der That für $n = 2$ zurückkommt.

Die Bedingung für die Apolarität der beiden binären Formen a_x^n, b_x^n *ist* $(ab)^n = 0$.

Jede binäre Form ungeraden Grads ist apolar zu sich

selbst, jede binäre Form geraden Grads dagegen ist nur dann apolar zu sich selbst, wenn die bilineare Invariante $(aa')^n$ *verschwindet, die desshalb* ***Harmonizante*** *genannt wird,* Battaglini l. c.

Eines der wichtigsten Resultate der Apolaritätstheorie verdankt man Rosanes l. c.:

Die Apolarität zweier binären Formen n^{ter} *Ordnung ist die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit eine der Formen sich linear durch die* n^{ten} *Potenzen linearer Factoren der anderen ausdrücken lasse (die canonische Form).*

n gegebene binäre Formen n^{ter} *Ordnung lassen sich durch lineare Combinationen von* n^{ten} *Potenzen von n linearen Formen darstellen, deren Product eine zu allen n gegebenen Formen apolare Form ist.*

Die Theorie der Apolarität steht in engem Zusammenhang mit der Lehre von den Combinanten, siehe Brill, *Math. Ann.*, 4, S. 530, 1871.

Mit diesen Untersuchungen hängen auch die älteren Sylvester's, *Cambr. Dubl. Math. J.*, 6, 7, 1851, 1852 und Cayley's, *Crelle*, 54 zusammen, bei welchen die Anzahl der linearen Formen, durch deren n^{te} Potenzen die gegebene Form auszudrücken war, kleiner als n sein und zwar $\frac{n}{2}$ für gerade n und $\frac{n+1}{2}$ für ungerade n betragen sollte. Man sehe darüber das Ende des § 8 nach.

§ 10. Automorphe binäre Formen. Polyederformen.

Ein interessantes Problem besteht darin, diejenigen binären Formen zu ermitteln, welche durch eine endliche Gruppe linearer, mit den Variabelen x_1, x_2 vorgenommener Transformationen sich in sich selbst zurückverwandeln. Solche Formen werden *automorph* genannt.

Wir wollen die im Allgemeinen *complexen* Wurzeln der Form geometrisch in einer Ebene interpretiren (die Gauss'sche Darstellung, vergl. Kap. 1, § 2), uns dann eine Kugel denken, welche diese Ebene in dem Coordinatenanfang O berührt und annehmen, alle Punkte der Ebene seien von dem Punkt der Kugel aus, der O diametral gegenüber liegt, auf die Kugel projicirt. Die Wurzeln der binären Form werden so durch Punkte der Kugel dargestellt.

Die linearen Transformationen nun, durch welche eine binäre Form in sich transformirt wird, entsprechen bei dieser Darstellung Rotationen der Kugel um einen ihrer Durchmesser. Die Gruppen von Rotationen der Kugel, für welche eine Gesammtheit von auf ihr liegenden Punkten unverändert bleibt, sind:

1) Die cyclische Gruppe, d. h. Rotationen, die um einen Durchmesser stattfinden, und deren Winkel $\frac{2k\pi}{n}$, $(k = 0, 1, \cdots, n - 1)$ beträgt.

2) Die Diedergruppe, d. h. um einen Durchmesser stattfindende Rotationen vom Winkel $\frac{2k\pi}{n}$, welche mit einer Rotation von 180^0 um einen zu ihm senkrechten Durchmesser combinirt sind oder nicht.

3) Die Gruppen von Rotationen, durch welche eines der fünf regelmässigen Polyeder in sich transformirt wird. Siehe auch Kap. 14.

Die allgemeinste (automorphe) Form, welche zur cyclischen Gruppe gehört, lässt sich immer durch geeignete Transformationen auf die Form

$$x_1^\alpha x_2^\beta \prod_i (\lambda_1^{(i)} x_1^n + \lambda_2^{(i)} x_2^n)$$

bringen, worin α, β positive ganze Zahlen sind und $\lambda_1^{(i)}$, $\lambda_2^{(i)}$ willkürliche Parameter bedeuten.

Die allgemeinste zur Diedergruppe gehörige Form hat den Typus:

$$F_1^\alpha F_2^\beta F_3^\gamma \prod_i (\lambda_1^{(i)} F_1^2 + \lambda_2^{(i)} F_2^2),$$

worin

$$F_1 = \frac{x_1{}^n + x_2{}^n}{2},$$

$$F_2 = \frac{x_1{}^n - x_2{}^n}{2},$$

$$F_3 = x_1 x_2 \quad \text{ist.}$$

Es bleiben also, abgesehen von diesen speciellen und trivialen Typen der automorphen binären Formen, noch die zu untersuchen, welche den fünf regulären Polyedern, dem Tetraeder, Cubus, Octaeder, Dodekaeder und dem Ikosaeder entsprechen (siehe Bd. 2, Kap. 18, § 3).

Es sind jedoch nicht mehr als *drei* Gruppen, für welche diese fünf Polyeder unverändert bleiben, nämlich die Gruppe des Tetraeders von 12 Transformationen, die des Octaeders mit 24

und die des Dodekaeders mit 60 Transformationen; die Gruppen der beiden anderen Polyeder sind dieselben wie die vorstehenden, d. h. die Gruppe des Cubus entspricht der des Octaeders und die des Ikosaeders der des Dodekaeders.

Die auf solche Art den fünf regulären Polyedern entsprechenden binären Formen, welche also automorph sind, lassen sich immer auf die folgenden canonischen Formen reduciren:

$$f_4 = x_1^4 \pm 2\sqrt{-3}\,x_1^2x_2^2 + x_2^4 \quad \ldots\ldots \quad \text{(Tetraeder)},$$
$$f_6 = x_1x_2(x_1^4 - x_2^4) \quad \ldots\ldots \quad \text{(Octaeder)},$$
$$f_8 = x_1^8 + 14x_1^4x_2^4 + x_2^8 \quad \ldots\ldots \quad \text{(Cubus)},$$
$$f_{12} = x_1x_2(x_1^{10} + 11x_1^5x_2^5 - x_2^{10}) \quad \ldots \quad \text{(Ikosaeder)},$$
$$f_{20} = -(x_1^{20} + x_2^{20}) + 228(x_1^{15}x_2^5 - x_1^5x_2^{15}) - 494x_1^{10}x_2^{10} \quad \text{(Dodekaeder)}.$$

Die Formen f_8 und f_{20} kann man bez. als Covarianten (Hesse'sche Determinanten) der Formen f_6 und f_{12} ansehen; insbesondere lässt sich also sagen:

Abgesehen von den beiden trivialen Kategorien der oben angegebenen Formen stellen die drei Formen f_4, f_6, f_{12}, wenn man ihre sämmtlichen Covarianten hinzunimmt, die einzigen automorphen Formen dar.

Es ist bemerkenswerth, *dass die drei Formen f_4, f_6, f_{12} die einzigen binären Formen sind, welche keine vielfachen Factoren haben und für welche die Eigenschaft $(f, f)^4 = 0$ gilt.* Wedekind, *Habilit.-Schr.*, Karlsruhe 1876; Brioschi, *Ann. di mat.*, (2), 8, 1877; Halphén, *Paris, Sav. Étrang.*, (2), 28, 1881; siehe auch Gordan, *Invariantenth.*, § 19. *Bei den Formen ferner, welche mehrfache Factoren haben, kann $(f, f)^4 = 0$ nur dann sein, wenn die Form n^{ter} Ordnung wenigstens einen $(n-1)$fachen Factor hat.*

Eine andere Eigenschaft der drei Formen f_4, f_6, f_{12} besteht darin, *dass ihre vollen Systeme aus drei Covarianten und einer Invariante bestehen. Die drei Covarianten sind die Form f selbst, ihre Hesse'sche Determinante H und die Functionaldeterminante T von f und H.*

Wir werden im Folgenden die Bildungen H und T in Bezug auf die Formen f_4, f_6, f_{12} bez. mit H_4, H_6, H_{12}, T_4, T_6, T_{12} bezeichnen. Es gilt die wichtige geometrische Interpretation:

Die Bildungen H haben zu Wurzeln die Werthe, welche den Centren der Seitenflächen der in Betracht gezogenen Polyeder entsprechen und die Bildungen T haben zu Wurzeln die Werthe,

welche den Mittelpunkten der Kanten dieser Polyeder entsprechen.

Zwischen geeigneten Potenzen von f, H, T besteht immer eine lineare Relation.

Es ist

$$H_4 = x_1^4 \mp 2\sqrt{-3}\, x_1^2 x_2^2 + x_2^4,$$
$$T_4 = f_6,$$
$$12\sqrt{-3}\, T_4^2 - f_4^3 + H_4^3 = 0.$$

$$H_6 = f_8,$$
$$T_6 = x_1^{12} - 33 x_1^8 x_2^4 - 33 x_1^4 x_2^8 + x_2^{12},$$
$$108 f_6^4 - H_6^3 + T_6^2 = 0.$$

$$H_{12} = f_{20},$$
$$T_{12} = (x_1^{30} + x_2^{30}) + 522\,(x_1^{25} x_2^5 - x_1^5 x_2^{25}) -$$
$$- 10\,005\,(x_1^{20} x_2^{10} + x_1^{10} x_2^{20}),$$
$$T_{12}^2 + H_{12}^3 - 1728 f_{12}^5 = 0.$$

Ueber die Gruppen linearer Transformationen, die zu diesen binären Formen gehören, siehe Kap. 14, § 3.

Wir wollen die zu den drei Formen gehörigen Invarianten bez. mit C_4, C_6, C_{12} bezeichnen, und die Verhältnisse betrachten:

$$\frac{C_4^{\lambda} f_4^3}{H_4^3}, \quad \frac{C_6^{\mu} f_6^4}{H_6^3}, \quad \frac{C_{12}^{\nu} f_{12}^5}{H_{12}^3},$$

worin λ, μ, ν derart gewählte Zahlen sind, dass jedes dieser Verhältnisse, die in den Variabelen schon von der Ordnung Null sind, auch in den Coefficienten der Urform (ursprünglichen Form) vom nullten Grad wird.

Bezeichnet man diese Verhältnisse mit ϱ (Parameter), so heisst die Function, durch welche man aus ihnen $\frac{x_1}{x_2}$ in Ausdrücken von ϱ erhält, *die Irrationalität des Tetraeders, Octaeders bez. des Ikosaeders* (Klein).

Die Wurzeln der Gleichung 5ten Grads werden durch ikosaedrische Irrationalitäten ausgedrückt, wie wir schon auf S. 93 gesagt haben.

Zur Betrachtung der automorphen Formen kam auf indirecte Art zuerst H. A. Schwarz, *Zürich, Naturf. G.*, 1871; *Crelle*, 75 bei Gelegenheit der Untersuchung der algebraischen Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichungen (Kap. 18, § 6); später wurden diese Formen direct und auf allgemeinere Art von Klein studirt, *Erl., Sitz.-Ber.*, 1874, 1875; *Math. Ann.*, 9.

Auch von einem anderen Standpunkt, indem man nämlich von den algebraischen Integralen der linearen Differentialgleichungen ausgeht, kommt man zu den automorphen Formen, wie Fuchs gezeigt hat, *Gött. Nachr.*, 1875; *Crelle*, 81, 85; siehe auch Klein, *Math. Ann.*, 11, 12; Jordan, *Crelle*, 84; *Compt. Rend.*, 1876.

Schliesslich trifft man auf dieselben automorphen Formen, wenn man die binären Formen aufsucht, für welche die vierte Ueberschiebung über sich selbst verschwindet. Siehe die oben citirten Abhandlungen von Wedekind, Brioschi, Halphén und auch Gordan, *Math. Ann.*, 12.

Ueber die Ausdehnung auf ternäre und quaternäre Formen sehe man weiter unten § 22 nach.

§ 11. Beliebige algebraische Formen. Allgemeines.

Unter einer *algebraischen Form r^{ter} Stufe* versteht man eine homogene ganze rationale Function von r Variabelen

$$x_1, x_2, \cdots, x_r;$$

per Grad dieser Variabelen heisst die *Ordnung* der Form. Die Coefficienten dieser Form können ihrerseits homogene ganze rationale Functionen von anderen Variabelen sein, deren Anzahl auch $\neq r$ sein kann. Die Formen haben in diesem Fall mehrere Reihen von Variabelen.

Wenn $r = 3$ ist, so erhält man die *ternären* Formen, für $r = 4$ die *quaternären* etc.

Setzt man eine ternäre Form mit einer Reihe von Variabelen gleich Null, so ergibt sich die Gleichung einer ebenen Curve, wenn die x als homogene Coordinaten der Punkte der Ebene interpretirt werden, vergl. Bd. 2, Kap. 1; wird eine quaternäre Form mit einer Reihe von Variabelen gleich Null gesetzt, so erhält man die Gleichung einer Fläche, indem man die x als homogene Coordinaten eines Punkts des Raums deutet.

Nach denselben Principien, wie in § 1, können wir einer Form r^{ter} Stufe und n^{ter} Ordnung mit nur einer Reihe von Variabelen *symbolisch* die Form geben

$$f = a_x^n = b_x^n = \cdots,$$

und ähnlich können wir offenbar die *symbolische Darstellung* auch auf Formen mit mehreren Reihen von Variabelen ausdehnen.

Wir nehmen an, die x unterliegen linearen Tansformationen vom Typus

$$x_i = A_{i1}x_1' + A_{i2}x_2' + \cdots + A_{ir}x_r'$$

und es sei die Determinante

$$\varDelta = | A_{ij} |,$$

welche der *Modul der Transformation* heisst, von Null verschieden. Bezeichnet man mit A_{ij}' die durch $\varDelta$ dividirten algebraischen Adjungirten (vergl. S. 41) der Elemente A_{ij} der Determinante $\varDelta$, so ergibt sich, dass die *symbolischen* Coefficienten $a_1, a_2, \cdots, a_r$ der Form a_x^n mittelst der Formeln

$$a_i = A_{i1}'a_1' + A_{i2}'a_2' + \cdots A_{ir}'a_r'$$

transformirt werden.

Die zu ihnen *inversen* Formeln lauten bez.:

$$x_i' = A_{1i}'x_1 + A_{2i}'x_2 + \cdots + A_{ri}'x_r,$$
$$a_i' = A_{1i}a_1 + A_{2i}a_2 + \cdots + A_{ri}a_r.$$

Die Formeln für die Transformation der a erhält man aus denen der x, wenn statt eines jeden Coefficienten A_{ij} seine durch $\varDelta$ dividirte algebraische Adjungirte in $\varDelta$, also A_{ij}', substituirt wird. Zwei Transformationen, welche in diesem Verhältniss zu einander stehen, heissen *reciprok*.

Die Invariantentheorie der Formen studirt jene homogenen ganzen rationalen Functionen der Coefficienten der ursprünglichen Form und auch der Variabelen, welche durch lineare Transformation der x bis auf einen Factor, der eine Potenz des Moduls $\varDelta$ ist, unverändert bleiben. Diese Functionen heissen im Allgemeinen *invariante Bildungen*.

Es ist aber leicht, sich davon zu überzeugen, dass man, um die Gesammtheit aller so beschaffenen Bildungen zu umfassen, ausser den Variabelen x auch noch andere Variabelen betrachten muss.

Es mögen r Reihen von Variabelen $x_1, \cdots, x_r$; $y_1, \cdots, y_r$; $z_1, \cdots, z_r$; $\cdots$ vorliegen; die Determinante, die diese sämmtlichen Variabelen zu Elementen hat, pflegt man dann mit dem Symbol $(xyz\cdots)$ zu bezeichnen.

Aus den Transformationsformeln geht unmittelbar hervor, dass, wenn man z. B. zwei Reihen von Variabelen

$$x_1, x_2, \cdots, x_r,$$
$$y_1, y_2, \cdots, y_r$$

betrachtet und sie denselben linearen Transformationen unterwirft, die binären Determinanten, welche in der Matrix dieser $2r$ Elemente enthalten sind, sich durch lineare Transformationsformeln in die binären Determinanten der Matrix der transformirten Elemente

$$x_1', x_2', \cdots, x_r',$$
$$y_1', y_2', \cdots, y_r'$$

verwandeln.

Daraus folgt nun, dass, wenn eine Bildung die x und die y enthält, aber nur in den Combinationen

$$\begin{vmatrix} x_i, & x_j \\ y_i, & y_j \end{vmatrix} = u_{ij},$$

es ausreicht, diese Bildung *nicht* als Function der x und y (*zweier* Reihen von Variabelen), sondern als Function der *einzigen* Reihe von Variabelen u anzusehen.

Es ist desshalb nöthig, auch die u unter die zu betrachtenden Variabelen aufzunehmen.

Ebenso aber wie die u hat man auch die Variabelen v einzuführen, welche durch die Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_i, & x_j, & x_k \\ y_i, & y_j, & y_k \\ z_i, & z_j, & z_k \end{vmatrix} = v_{ijk}$$

dargestellt werden u. s. w. Es ergibt sich daher, dass ausser den x weitere $r-2$ Reihen von Variabelen, von denen jede von specieller Beschaffenheit ist, in Betracht zu ziehen sind. Die letzte dieser Reihen besteht aus r Variabelen, also aus ebensovielen, als x vorhanden sind.

Die geometrische Interpretation dazu leuchtet ein. Fassen wir die x als homogene Coordinaten eines Punktes in einem Raum von r Dimensionen auf (vergl. Bd. 2, Kap. 19), so sind die Variabelen u, v, $\cdots$ die Coordinaten der successiven in

diesem Raum enthaltenen linearen Mannigfaltigkeiten, der Geraden, der Ebene etc. Für $r = 3$ ergibt sich, dass die u die Coordinaten der Geraden in der Ebene sind. Wir nennen desshalb im ternären Gebiet die u auch Geradencoordinaten.

Mehrere Reihen von Variabelen heissen *cogredient*, wenn sie denselben linearen Transformationen unterliegen; *contragredient* dagegen, wenn sie *reciproken* (siehe oben) linearen Transformationen, *digredient*, wenn sie weder gleichen noch reciproken linearen Transformationen unterliegen.

Contragrediente Variabelen sind die $x_1, \cdots, x_r$ und die der *letzten* der $r - 2$ Reihen von Variabelen, von denen oben die Rede war. So überzeugt man sich auch leicht davon, dass die Operationssymbole

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_r}$$

durch Formeln transformirt werden, die *reciprok* zu denen der x sind.

Um daher die Gesammtheit der invarianten Bildungen zu umfassen, muss man sich denken, dass diese im Allgemeinen *mehrere* Reihen von cogredienten Variabelen, wie die x, mehrere Reihen von cogredienten Variabelen, wie die u, mehrere Reihen der v etc. enthalten.

Ein Theorem von Clebsch jedoch, *Gött. Abh.*, 1872, welches als eine Erweiterung der Clebsch-Gordan'schen Formel (vergl. § 3) anzusehen ist, reducirt die Anzahl dieser Bildungen und stellt fest, *dass es ausreicht, Bildungen zu betrachten, die höchstens eine einzige Reihe von Variabelen x, eine einzige Reihe der u, eine einzige der v etc. enthalten.*

Wir bemerken bei dieser Gelegenheit, dass von einem anderen Standpunkt aus Capelli, *Giorn. di Batt.*, 18; *Mem. Lincei*, 12, 1882; *Rend. Lincei*, 1891, indem er von den Variabelen u, v, $\cdots$ absah und nur die mit x cogredienten Variabelen in Betracht zog, die Clebsch-Gordan'sche Formel erweitert hat.

Der Unterschied zwischen dem binären Gebiet und dem allgemeinen Fall besteht darin, dass man sich in dem binären Gebiet immer auf Formen mit einer *einzigen* Reihe von Variabelen beschränken kann, während man im allgemeinen Fall nicht unter $r - 1$ Reihen herabgehen kann, welche dann aus cogredienten (Capelli) oder digredienten Variabelen (Clebsch) bestehen können.

Hat man die invarianten Bildungen auf die in dem Clebsch'schen Theorem angegebenen beschränkt, so lässt sich eine weitere Reduction ausführen. Es ist bewiesen worden (siehe oben, § 6) auch für den Fall von *nicht, wie früher, binären,* sondern von Formen höherer Stufe, dass immer *volle Systeme* bestehen, d. h. *dass immer eine endliche Anzahl von Bildungen existirt, als deren ganze und rationale Function sich jede andere Bildung ausdrücken lässt.*

Dieses Theorem hat zuerst Gordan für specielle Fälle des ternären Gebietes, für eine cubische ternäre Form: *Math. Ann.,* 1, für zwei quadratische ternäre Formen: *Math. Ann.,* 19 bewiesen; und dann allgemein, auch für nicht ternäre, Hilbert, *Math. Ann.,* 36; siehe darüber auch Gordan, *Math. Ann.,* 42; Capelli, *Rend. Acc. Napoli,* 1896; White, *Am. J.,* 14, 1892.

Indem wir uns jetzt speciell auf die ternären Formen beschränken, unterscheiden wir die folgenden invarianten Bildungen:

1. *Invarianten* hängen nur von den Coefficienten der Urform oder Urformen ab. Der Grad in diesen Coefficienten heisst der *Grad der Invariante.*
2. *Covarianten* hängen ausser von den Coefficienten auch von den Variabelen x ab, der Grad in den Variabelen heisst ihre *Ordnung,* der Grad in den Coefficienten ihr *Grad.*
3. *Contravarianten* oder *zugeordnete Formen* hängen von den Coefficienten und den contragredienten Variabelen u ab. Der Grad in diesen letzteren heisst ihre *Classe.*
4. *Zwischenformen* hängen von den Coefficienten, den Variabelen x und den Variabelen u ab.

Bezeichnet man mit u_1, u_2, u_3 die zu den x_1, x_2, x_3 contragredienten ternären Variabelen, so verwandelt sich der Ausdruck u_x durch lineare Transformation bis auf einen Factor Δ offenbar in $u'_{x'}$; dieser letztere Ausdruck heisst *die identische Covariante;* sie gehört dem vollen System jeder beliebigen ternären Form oder jeden Systems solcher Formen an. — Aehnliches gilt für die Formen r^{ter} Stufe.

Es besteht der Satz:

Wenn eine invariante Form eines Systems gegebener ternärer Formen die Coefficienten dieser Formen nicht enthält und nur eine Reihe von Variabelen x und eine Reihe von Variabelen u, so ist sie nothwendiger Weise bis auf einen Zahlenfactor eine Potenz der identischen Covariante.

Die Betrachtungen über die invarianten Operationen in § 2 lassen sich leicht auf die Formen beliebiger Stufe ausdehnen.

Die Operation

$$\frac{1}{m}\sum y_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

worin m die Ordnung der Form oder der Covariante ist, an welcher operirt wird, und die y zu den x cogrediente Variabelen sind, heisst *Polarenprocess. Sie lässt, an einer Covariante ausgeführt, ihre Invarianteneigenschaft unverändert.*

Wenn J eine Function von r Reihen cogredienter Variabelen $x_1, x_2, \cdots, x_r;\ y_1, y_2, \cdots, y_r;\ z_1, z_2, \cdots, z_r; \cdots$ bez. von den Ordnungen $m, m', m'', \cdots$ ist, so lässt der (Cayley'sche) *symbolisch* durch

$$\Omega = \frac{1}{m\,m'\,m''\cdots}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}, & \frac{\partial}{\partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial}{\partial x_r} \\ \frac{\partial}{\partial y_1}, & \frac{\partial}{\partial y_2}, & \cdots, & \frac{\partial}{\partial y_r} \\ \frac{\partial}{\partial z_1}, & \frac{\partial}{\partial z_2}, & \cdots, & \frac{\partial}{\partial z_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

ausgedrückte Process (worin man bei der Entwicklung der Determinante statt des Products der r Derivirten die entsprechende r^{te} Derivirte zu substituiren hat), wenn er auf J ausgeübt wird, die Invarianteneigenschaft von J bestehen.

Gibt man symbolisch J die Gestalt

$$J = a_x^m\, a'^{m'}_y\, a''^{m''}_z \cdots,$$

so ist

$$\Omega J = (a\,a'\,a''\cdots)\, a_x^{m-1}\, a'^{m'-1}_y\, a''^{m''-1}_z \cdots.$$

Aehnlich lässt sich der Begriff des *Aronhold'schen Processes* ausdehnen. Siehe § 2.

Wenn $a_{ij\ldots}$ die wirklichen Coefficienten einer Form und $b_{ij\ldots}$ die Coefficienten einer anderen Form derselben Ordnung sind, so heisst die Operation

$$\sum_{ij\cdots} b_{ij\cdots}\frac{\partial}{\partial a_{ij\ldots}}$$

der Aronhold'sche Process. Wendet man ihn auf eine invariante Bildung J der gegebenen Form (der Form mit den Coefficienten a) an, so transformirt er sie in eine invariante

Bildung der beiden Formen (der Form mit den Coefficienten a und der mit den Coefficienten b).

Ueber die invarianten Processe in der Theorie der algebraischen Formen hat neuerdings Capelli zahlreiche Arbeiten veröffentlicht, *Mem. Acc. Napoli,* (2), 1, 1888; *Rend. Acc. Napoli,* 1886, 1887, 1888, 1893; *Giorn. di Batt.,* (1), 21; (2), 1; *Math. Ann.,* 29, 37.

Die Einführung der symbolischen Rechnung hat zur Folge, dass jede invariante Bildung eines Systems beliebiger Formen symbolisch als invariante Bildung eines Systems *linearer* Formen dargestellt werden kann.

Beschränkt man sich auf den *ternären* Fall, so gilt insbesondere:

Jede invariante Bildung eines Systems ternärer Formen lässt sich symbolisch als die Gesammtheit von symbolischen Producten darstellen, deren Factoren die Typen haben:

$$u_x,\ a_x,\ u_\alpha,\ a_\alpha,\ (abc),\ (abu),\ (auv),\ (uvw),$$
$$(\alpha\beta\gamma),\ (\alpha\beta x),\ (\alpha x y),\ (xyz),$$

worin a, b, c, $\cdots$ Coefficienten linearer Formen in Punktcoordinaten sind, α, β, γ, $\cdots$ Coefficienten linearer Formen in Geradencoordinaten, x, y, z, $\cdots$ Punktcoordinaten und u, v, w, $\cdots$ Geradencoordinaten bedeuten.

Für die symbolische Rechnung bei den ternären und den Formen höherer Stufe sind gewisse *Identitäten* grundlegend, die denen analog sind, welche bei der symbolischen Darstellung der binären Formen zur Verwendung kamen. Für das ternäre Gebiet lauten diese Identitäten:

$$(abc)(def) - (bcd)(aef) + (cda)(bef) - (dab)(cef) = 0,$$
$$(abc)\,d_x - (bcd)\,a_x + (cda)\,b_x - (dab)\,c_x = 0,$$
$$(abc)(xyz) - \begin{vmatrix} a_x, & a_y, & a_z \\ b_x, & b_y, & b_z \\ c_x, & c_y, & c_z \end{vmatrix} = 0,$$
$$(xyz)\,a_t - (yzt)\,a_x + (ztx)\,a_y - (txy)\,a_z = 0,$$
$$(xyz)(trs) - (yzt)(xrs) + (ztx)(yrs) - (txy)(zrs) = 0,$$

worin a, b, c, d, e, f Coefficienten linearer Formen in Punktcoordinaten oder auch Geradencoordinaten darstellen und x, y,

z, t, r, s Punktcoordinaten oder auch Coefficienten linearer Formen in Geradencoordinaten bezeichnen.

Für die Formen höherer Stufe erhält man fünf Typen von Identitäten, die den obigen analog sind.

Diese Identitäten sind die einzigen primitiven, die zwischen symbolischen Bildungen von invariantem Typus bestehen können, in dem Sinn, dass jede andere scheinbar verschiedene Identität schliesslich nur eine Combination der obigen Identitäten sein kann. — Dieses Theorem wurde für binäre und ternäre Formen von Gordan und Study, *Math. Ann.*, 30, S. 120 und für den allgemeinen Fall von Pascal bewiesen, *Lincei*, *Rend.*, 1888; *Memorie*, 5, 1888.

Die geometrische Interpretation der invarianten Bildungen der ternären, quaternären etc. Formen ist für die Geometrie von grosser Bedeutung. Eine ternäre Form mit einer Reihe von Variabelen x, die man als Punktcoordinaten interpretirt, gleich Null gesetzt, stellt geometrisch, wie wir schon gesehen haben, eine ebene Curve dar, und ähnlich eine quaternäre Form mit einer Reihe von Variabelen, gleich Null gesetzt, eine Fläche des gewöhnlichen Raumes.

Das identische Verschwinden der Invarianten und Covarianten der Form entspricht jenen Eigenschaften und Beziehungen zwischen den Elementen der Curve oder Fläche, die bei allgemeinen linearen Transformationen d. h., geometrisch gesprochen, bei homographischer Transformation unverändert bleiben (projective Eigenschaften). Siehe Bd. 2, Kap. 1.

Oder insbesondere: Nimmt man an, für eine specielle Form sei eine gewisse *Invariante* Null, so entspricht dies einer solchen Eigenschaft der Curve oder Fläche, die sich nicht ändert, wenn diese Curve oder Fläche homographisch transformirt wird.

Ferner stellt eine *Covariante* mit einer Reihe von Variabelen, gleich Null gesetzt, eine andere Curve oder Fläche dar, welche bez. der ursprünglichen projective Eigenschaften besitzt.

U. s. w.

Wir wollen noch hinzufügen, dass man, anstatt anzunehmen, die Urformen hätten nur eine Variabelenreihe, voraussetzen kann, sie hätten mehrere z. B. *zwei* zu einander *contragrediente* oder auch *digrediente* Variabelenreihen.

Von diesen Formen wird vom Standpunkt der Invariantentheorie aus in § 21 kurz die Rede sein.

Die geometrische Interpretation dieser Formen mit zwei Reihen contragredienter Variabelen ist leicht; nehmen wir an, es handele sich um *ternäre* Formen und setzen eine ternäre Form mit zwei Reihen contragredienter Variabelen gleich Null, so wird dadurch geometrisch in der Ebene eine Zuordnung zwischen den Punkten und gewissen Curven einer bestimmten Classe oder auch zwischen den Geraden und gewissen Curven einer bestimmten Ordnung festgestellt; d. h. man erhält das, was ein *ebener Connex* genannt wird. Von diesen geometrischen Formen wird in Bd. 2, Kap. 6 die Rede sein.

Zum Schluss dieses Paragraphen wollen wir einige historische und literarische Angaben über die Ausdehnungen machen, welche andere grundlegende oder wichtige Sätze und Betrachtungen, die man über die *binären* Formen anzustellen pflegt und von denen wir weiter oben gesprochen haben, auf *ternäre, quaternäre* etc. Formen erfahren haben.

Die Invarianten und Covarianten der *ultrabinären* Formen genügen ebenso, wie bei den binären Formen (vergl. § 2) gewissen Differentialgleichungen; mit ihnen hat sich für das ternäre Gebiet im Allgemeinen Forsyth, *Proc. Lond. math. Soc.*, 19, 1888 beschäftigt.

Das Umkehrungstheorem von Hermite (vergl. § 6) wurde von Deruyts, *Brux. Bull.*, (3), 22, 1891 erweitert; siehe auch Gordan, *Gött. Nachr.*, 1897.

Eine andere wichtige Ausdehnung bezieht sich auf die *typische Darstellung* (vergl. § 7). In dieser Beziehung hat zuerst Brioschi, *Ann. di mat.*, (1), 1, 1858 das Verfahren erweitert, das Hermite bei den binären Formen eingeschlagen hatte. Später beschäftigten sich damit auf andere Art auch Grassmann, *Math. Ann.*, 7 und Christoffel, *Math. Ann.*, 19.

Das Studium der typischen Darstellung und der bez. vollen Systeme von Schwesterformen wurde dann von Clebsch-Gordan, *Math. Ann.*, 1 auf cubische ternäre Formen, von Gordan, *Math. Ann.*, 17, 20 auf eine specielle biquadratische ternäre Form (siehe § 22) und von Forsyth, *Americ. J.*, 12 auf viele andere Fälle des ternären Gebiets und von demselben Autor, *Cambr. Phil. Trans.*, 14, 1889 auch auf das quaternäre Gebiet ausgedehnt.

In Verbindung mit der typischen Darstellung der ternären Formen steht ein Theorem von Hermite, *Crelle*, 57, welches

an die Sätze anschliesst, die wir in § 5 bei der Besprechung der Covariante Θ angeführt haben.

Hermite zeigte, *dass drei ternäre quadratische Formen sich immer als erste Derivirten einer und derselben cubischen ternären Form ansehen lassen, welche zu Coefficienten simultane Invarianten der gegebenen Formen hat.* Siehe darüber auch Gundelfinger, *Crelle,* 80.

Eine der ersten Arbeiten über die ternären Invarianten ist von Aronhold, *Crelle,* 39, der die Invarianten der cubischen ternären Formen untersuchte.

Vollständige Lehrbücher über die ternären, quaternären etc. Formen gibt es nicht; die Theorie dieser Formen ist nicht so entwickelt, wie die der binären. Von den Werken, die sich mit ihnen beschäftigen, citiren wir die *Algebra der linearen Transf.,* von Salmon-Fiedler, Leipzig 1877, in welcher nicht nur die binären sondern auch die Formen höherer Art behandelt werden; die bekannte *Geometrie* von Clebsch-Lindemann, 1. Bd., Leipzig 1875; 2. Bd., 1. Thl., ib., 1891 und ein Buch von Study, *Methoden zur Theorie der ternären Formen,* Leipzig 1889. Mehr literarische und historische Einzelheiten findet man in der oben (§ 2) citirten Arbeit von Franz Meyer. Schliesslich geben wir noch die neueren Werke an: Deruyts, *Essai d'une th. générale des formes alg.,* Bruxelles 1891; Elliot, *Algebra of Quantics,* Oxford 1895; Andoyer, *Théorie des formes,* Paris 1898.

§ 12. Das Uebertragungsprincip.

Von grosser Bedeutung für die Theorie der ternären Formen ist das sogenannte *Clebsch'sche Uebertragungsprincip,* welches dazu dient, aus bekannten binären Invarianten oder Covarianten gewisse specielle invariante Formen eines Systems ternärer Formen abzuleiten.

Wir wollen annehmen, es liege eine ternäre Urform $a_x^n \equiv b_x^n \equiv \cdots$ vor. Es seien y_1, y_2, y_3; z_1, z_2, z_3 zwei Reihen von cogredienten Variabelen, die als Coordinaten zweier Punkte der Ebene interpretirt werden können; die Coordinaten eines Punktes der Geraden, welche sie verbindet, sind alsdann

$$x_1 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 z_1,$$
$$x_2 = \lambda_1 y_2 + \lambda_2 z_2,$$
$$x_3 = \lambda_1 y_3 + \lambda_2 z_3,$$

während die contragredienten Variabelen u_1, u_2, u_3, d. h.

$$\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_3 & y_1 \\ z_3 & z_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

sich als Geradencoordinaten interpretiren lassen, vergl. Bd. 2, Kap. 1.

Substituirt man diese Werthe in a_x^n und setzt symbolisch

$$a_y = \alpha_1, \quad a_z = \alpha_2,$$

so erhält man α_λ^n, welches eine in λ binäre Form ist. Interpretirt man geometrisch, so ergibt sich, dass die Wurzeln λ von $\alpha_\lambda^n = 0$ den Durchschnittspunkten der Geraden (yz) mit der Curve $a_x^n = 0$ entsprechen.

Es liege nun eine Invariante oder Covariante der *binären* Form α_λ^n vor und sie werde mit Π bezeichnet. Sie besteht aus Termen, von denen jeder zu Factoren binäre Determinanten vom Typus $(\alpha\beta)$ und lineare Factoren vom Typus α_λ, β_λ, $\cdots$ hat, wobei unter β Symbole verstanden werden, die den α äquivalent sind.

Transformirt man nun Π so, dass die Coefficienten der ternären Form und die Coordinaten u darin auftreten, so erhält man eine in Bezug auf die gegebene ternäre Form invariante Bildung.

Die geometrische Deutung der so erhaltenen Bildung ist sehr einfach. *Sie stellt, gleich Null gesetzt, die Gesammtheit aller Geraden u dar, welche die gegebene Curve in Gruppen von Punkten schneiden, die jene bestimmten projectiven Eigenschaften besitzen, denen das Verschwinden der Invariante Π entspricht.*

Man überzeugt sich jetzt leicht, dass jede Determinante $(\alpha\beta)$ einer Determinante (abu) und jeder Factor α_λ einem a_x gleichwerthig ist, wobei jedoch die Variabelen x und u nicht unabhängig, sondern durch die Bedingung $u_x = 0$ miteinander verbunden sind. Nennt man dann die Coordinaten einer anderen Geraden, welche durch den Punkt x geht, v_1, v_2, v_3, so kann man statt des Factors a_x die Determinante (auv) substituiren.

Es leuchtet ein, dass die vorstehenden Ausführungen dieselben bleiben, wenn statt einer einzigen Urform mehrere vorhanden sind.

Es gilt daher die folgende einfache Regel zur Uebertragung invarianter Bildungen aus dem binären in das ternäre

Gebiet: *Jede binäre Determinante* $(\alpha\beta)$ *wird durch eine ternäre Determinante* $(a b u)$ *ersetzt, wobei* $a, b, \cdots$ *die Symbole der ternären Formen sind, welche den obigen Formeln gemäss den Symbolen* $\alpha, \beta, \cdots$ *entsprechen; ferner wird an die Stelle eines jeden linearen Factors, wie* α_λ, *eine Determinante* $(a u v)$ *gesetzt, wobei die* v *als willkürliche Grössen betrachtet werden.*

Eine derartige Bildung, gleich Null gesetzt, stellt in den Coordinaten u *eine Curve (oder ein System von Curven, wenn in die Bildung auch die* v *eingehen) dar, deren Tangenten die gegebene Curve oder Curven in Punkten schneiden, die besondere invariante Eigenschaften besitzen.*

Die Anwendungen dieses Princips sind sehr verschiedener Art. Eine der wichtigsten ist die folgende:

Um die Tangentialgleichung einer gegebenen Curve in Punktcoordinaten $f = a_x^n = 0$ *zu finden, braucht man nur den symbolischen Ausdruck der Discriminante einer binären Form* n^{ter} *Ordnung* α_λ^n *zu kennen und in ihm jede Determinante* $(\alpha\beta)$ *mit einer Determinante* $(a b u)$ *zu vertauschen.*

Ein dem hier entwickelten ähnliches Uebertragungsprincip lässt sich auch in dem Fall anwenden, in welchem die Urform eine ternäre ist, die eine Reihe von Variabelen x und eine Reihe von Variabelen u enthält, d. h. eine der Formen, welche, gleich Null gesetzt, geometrisch einen sogenannten *Connex* erzeugen, vergl. § 11.

Es sei die Form $a_x^n u_\alpha^m$ gegeben. Wir betrachten die durch die Punkte y und z bestimmte Gerade und den durch die Geraden v und w gegebenen Punkt. Setzt man dann, wie oben,

$$a_y = A_1, \quad a_z = A_2,$$
$$v_\alpha = \mathsf{A}_1, \quad w_\alpha = \mathsf{A}_2,$$

so erhält man

$$A_\lambda^n \mathsf{A}_\mu^m,$$

worin die λ und μ binäre Variabelen sind.

Es sei Π eine Invariante dieser binären Form mit zwei Reihen von Variabelen und die symbolische Gestalt von Π enthalte keine Determinante vom Typus $(A\mathsf{A})$; wir ändern in ihr, wie oben, jede Determinante (AB) in eine Determinante $(a b u)$ und jede Determinante $(\mathsf{A}\mathsf{B})$ in eine Determinante $(\alpha\beta x)$ um und erhalten so einen aus symbolischen Factoren $(a b u)$ und

$(\alpha\beta x)$ bestehenden Ausdruck, der eine invariante Bildung der Form ist. *Dieser Ausdruck, gleich Null gesetzt, stellt* 1) *für jeden Punkt* x *eine Curve dar, deren Tangenten die entsprechende Curve des gegebenen Connexes in* n *Punkten schneiden, welche specielle projective Eigenschaften besitzen und* 2) *für jede Gerade* u *eine Curve, welche so beschaffen ist, dass die von ihren Punkten nach der entsprechenden Curve des gegebenen Connexes gezogenen* m *Tangenten eine Schar von* m *Geraden bilden, der andere specielle projective Eigenschaften zukommen.*

Das Uebertragungsprincip wurde von Clebsch aufgestellt, *Crelle,* 59; siehe auch Gundelfinger, *Math. Ann.*, 6; Study, *Methoden* etc., Leipzig 1889 und die *Geometrie* von Clebsch-Lindemann.

§ 13. Hesse'sche und Functionaldeterminanten, Combinanten, Resultanten und Discriminanten beliebiger algebraischer Formen.

Es seien r Formen beliebigen Grads mit r Variabelen (also von der r^{ten} Stufe) gegeben. Wir wollen sie symbolisch durch

$$a_x^n,\ b_x^{n'},\ c_x^{n''},\ \cdots$$

darstellen, indem wir analoge Kriterien der symbolischen Darstellung, wie bei den binären und ternären Formen, zur Anwendung bringen.

Zu den einfachsten invarianten Bildungen dieser Formen gehören die *Jacobi'sche oder Functionaldeterminante der* r *Formen,* die symbolisch durch

$$(abc\cdots)\,a_x^{n-1}b_x^{n'-1}c_x^{n''-1}\cdots$$

und die *Hesse'sche Determinante einer jeden Form,* die durch

$$(a\,a'\,a''\cdots)^2\,a_x^{n-2}a_x'^{\,n-2}\cdots$$

dargestellt wird, worin unter a', a'', $\cdots$ Symbole verstanden werden, die den a äquivalent sind.

Diese Bildungen können leicht durch die Derivirten der gegebenen Formen ausgedrückt werden. Siehe Seite 51—53.

Ein wichtiges Theorem über die Jacobi'schen Determinanten ist das Clebsch'sche:

Die Functionaldeterminanten, die aus r *Functionaldeterminanten von* $r+1$ *Formen von* r *Variabelen gebildet werden,*

sind den Urformen proportional. Clebsch, *Crelle,* 69, 70; Rosanes, ib., 75; Pasch, ib., 80.

Eine interessante Eigenschaft der *Hesse'schen Determinanten* bezieht sich auf ihr identisches Verschwinden. Sie gilt *nur für binäre, ternäre und quaternäre Formen:*

Das Verschwinden der Hesse'schen Determinante ist die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit sich die gegebene Form durch lineare Transformation auf eine andere reduciren lasse, die eine Variabele weniger enthält.

Dieses Theorem haben Hesse, *Crelle,* 42, 56 und Andere, Baltzer, 1. Ausg. der *Determinanten;* Brioschi, *Determ.,* 1854; Salmon-Fiedler, *Algebr. der lin. Transf.,* 1863 für allgemein giltig gehalten; später hat Gordan-Noether, *Math. Ann.,* 10 bewiesen, dass es nur für $r = 2, 3, 4$ gilt. Näheres findet man bei Pascal, *Determinanten,* Leipzig 1900, § 65.

Eine andere Eigenschaft der Hesse'schen Determinante lautet:

Die Hesse'sche Determinante der Hesse'schen Determinante einer cubischen Form mit beliebig vielen Variabelen ist eine lineare Combination der gegebenen Form und der Hesse'schen Determinante.

Dieser Satz wurde für das ternäre Gebiet von Bauer, *Münch. Akad.,* 14, 1883, für das quaternäre von Rohn, *Math. Ann.,* 23 und allgemein von Voss, *Math. Ann.,* 27 bewiesen.

Die Hesse'sche Determinante einer beliebigen quadratischen Form

$$f = \sum_{ij}^{1 \cdots n} a_{ij} x_i x_j$$

ist ihre *Discriminante* (siehe S. 323 und 325); durch wirkliche Coefficienten ausgedrückt, hat sie die Gestalt

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \cdots \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \cdots \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \cdots \\ . & . & . & . \; . \; . \end{vmatrix}.$$

Die oben (siehe § 2, S. 265) von uns angegebenen Clebsch'schen Formeln, welche das Quadrat einer Functionaldeterminante binärer Formen oder das Product zweier solcher Determinanten liefern, sind auf die Formen höherer Stufe von D'Ovidio, *Ann. Torino,* 1879; Le Paige, *Bull. de Belgique,* 1880, 1881; *Compt. Rend.,* 1881; Torelli, *Acc. Napoli,* 1886 ausgedehnt worden.

Die Functionaldeterminante ist ein specieller Fall von Bildungen, die den Namen *Combinanten* führen (vergl. auch § 5):

Ist ein System von p Formen

$$f_1, f_2, \cdots, f_p$$

von der r^{ten} Stufe und gleicher Ordnung gegeben und macht man die lineare Combination

$$v_1 f_1 + v_2 f_2 + \cdots + v_p f_p,$$

so versteht man unter *Combinante* der p gegebenen Formen eine solche in den Coefficienten der f und in den Variabelen ganze rationale, die v nicht enthaltende Bildung, welche sich in Bezug auf die lineare Transformation der x und die lineare Transformation der Variabelen v invariant verhält. Die Combinante kann ausser den Variabelen $x_1, \cdots, x_r$ auch andere Systeme von Variabelen $y_1, \cdots, y_r$; $z_1, \cdots, z_r$; $\cdots$ enthalten, die zu den x *cogredient* sind.

Alle Combinanten der f lassen sich als invariante Bildungen einer einzigen von ihnen betrachten, die nach Gordan Fundamentalcombinante genannt wird und die sich ergibt, wenn man die Determinante bildet, welche in der ersten Zeile alle f mit den Variabelen x, in der zweiten alle f mit den Variabelen y etc. enthält; die eingeführten p Reihen von Variabelen $x, y, \cdots$ sind sämmtlich als cogredient anzusehen.

Mit den Combinanten hat sich Gordan, *Math. Ann.*, 5; Voss, *Münch. Ber.*, 1888 beschäftigt.

Es mögen r Gleichungen vom Typus

$$a_x^n = 0, \quad b_x^{n'} = 0, \quad \cdots$$

vorliegen, worin a_x^n, $b_x^{n'}$, $\cdots$ in symbolischer Bezeichnung r Formen von der r^{ten} Stufe in den Variabelen $x_1, x_2, \cdots, x_r$ sind; man eliminire die r homogenen Variabelen x und gebe dem Resultat der Elimination die Form $R = 0$, wobei R eine ganze rationale Function der Coefficienten der gegebenen Formen sei.

Die Bildung R ist eine Invariante der Formen und heisst *Resultante. Sie ist auch eine Combinante der gegebenen Formen.*

Die Resultante ist in den Coefficienten einer jeden Form von gleichem Grad, wie das Product der Ordnungszahlen aller anderen Formen.

Die Resultante der r ersten partiellen Derivirten einer Form nach den r Variabelen heisst *Discriminante.*

Der Grad der Discriminante in den Coefficienten der gegebenen Form ist $r(n-1)^{r-1}$, *wenn n den Grad der Form und r ihre Stufe bezeichnet.*

Gordan hat sich in den *Münch. Berichten,* 17, 1887 mit der Discriminante einer ternären Form von der n^{ten} Ordnung und neuerdings in den *Math. Ann.,* 50, 1897 und den *Züricher Congr.-Verh.,* 1898, S. 143 mit der Resultante dreier ternären Formen beschäftigt.

Ueber die invarianten Bedingungen, unter welchen sich eine ternäre Form in lineare Factoren zerlegen lässt, siehe Brill, *Gött. Nachr.,* 1893; *Deutsche Math.-Verein.,* 5, 1897; *Math. Ann.,* 50; Junker, *Math. Ann.,* 43; Gordan, *Math. Ann.,* 45.

§ 14. Apolarität für beliebige Formen.

Die Theorie der *Apolarität,* die wir in § 9 für binäre Formen auseinandergesetzt haben, lässt sich auf den Fall beliebiger Formen ausdehnen.

Es mögen zwei Formen von r Variabelen vorliegen, die eine a_x^n von der n^{ten} Ordnung in Coordinaten x, die andere u_α^n von derselben Classe n in contragredienten Coordinaten u. Man sagt, die beiden Formen seien *conjugirt,* Rosanes, *Crelle,* 75 oder *vereinigt liegend,* Clebsch-Lindemann oder auch *apolar,* Reye, *Crelle,* 78, 79, wenn die bilineare Invariante a_α^n Null ist.

Von der gegebenen Form nehme man die erste Polare in Bezug auf einen Pol y und dann die Polare dieser in Bezug auf einen Pol z u. s. w., bis man die gemischte Polare

$$a_y a_z a_t \cdots$$

erhält, die in jeder der Reihen von Variabelen $y, z, t, \cdots$ linear ist.

Wenn diese gemischte Polare verschwindet, so ist die gegebene Form apolar zu derjenigen, die in Coordinaten u die Gesammtheit der n Pole $y, z, t, \cdots$ *darstellt.* Man erhält auf diese Art die Apolarität einer Form *zu einer anderen in*



§ 15. **Die quadratischen Formen im Allgemeinen und die bilinearen Formen. Trägheitsgesetz. Die Theorie der Elementartheiler von Weierstrass.**

Es liege eine quadratische Form mit r Variabelen vor:

$$f = \sum_{ij}^{1\cdots r} a_{ij}x_i x_j = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2 = \cdots \qquad (a_{ij} = a_{ji}).$$

Ihre *einzige* Invariante ist die *Discriminante*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \cdots \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \cdots \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = (abc\cdots)^2.$$

Wenn Δ von Null verschieden ist, so heisst f *ordinär*, sonst *singulär*.

Bezeichnet man mit $w_1, w_2, \cdots, w_r$ die r zu den x *contragredienten* Variabelen, so lässt sich die *Contravariante* bilden:

$$F = \begin{vmatrix} 0, & w_1, & w_2, & \cdots \\ w_1, & a_{11}, & a_{12}, & \cdots \\ w_2, & a_{21}, & a_{22}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = (wab\cdots)^2.$$

Wenn man die *digredienten* Variabelen $u, v, \cdots$ einführt (vergl. § 11), so lassen sich noch andere invariante Bildungen aufstellen; für $r = 3$ (den ternären Fall) existiren nur die beiden obigen (vergl. § 16); für $r = 4$ (den quaternären Fall) lassen sich dagegen noch viele andere bilden, weil man eine weitere Variabelenreihe einzuführen hat (vergl. § 19).

Ueber die gleichzeitigen Invarianten von *zwei* quadratischen Formen mit r Variabelen siehe Segre, *Math. Ann.*, 24.

In der Theorie der quadratischen Formen ist das wegen seiner Anwendungen auf Mechanik und Geometrie vielfach behandelte Problem von Interesse, diese Formen auf ihre *canonische Gestalt* zu bringen d. h. sie auf eine *lineare Combination von Quadraten* zurückzuführen. Eine solche Reduction lässt sich im Allgemeinen auf unendlich viele Arten ausführen; hat jedoch die gegebene Form *reelle* Coefficienten und sollen die linearen Transformationen, die mit den Variabelen vorzunehmen

sind, gleichfalls *reell* sein, so unterliegen die unendlich vielen reducirten oder canonischen Formen dem sogenannten *Trägheitsgesetz der quadratischen Formen.* Es lautet:

Wenn eine quadratische Form mit r Variabelen und mit reellen Coefficienten durch reelle lineare Substitutionen auf zwei verschiedene Arten in Ausdrücke transformirt wird, die nur die Quadrate der Variabelen enthalten, so ist die Anzahl k der Terme mit positivem Vorzeichen immer dieselbe.

Dieser Satz wurde von Sylvester, *Phil. Mag.*, 1852, 2, S. 138; *Phil. Trans.*, 1853, S. 407 aufgestellt; später theilte Borchardt, *Crelle,* 53, S. 275 mit, dass ein ähnliches Gesetz schon Jacobi seit 1847 bekannt war. Ueber dieses Theorem kann man auch Hermite, *Crelle,* 53, S. 271; Gundelfinger, *Crelle,* 91; de Presle, *Bull. de la Soc. math.*, 15, S. 179; Frobenius, *Sitzungsber. der Berl. Akad.*, 1894 nachsehen. Untersuchungen, die auf das Engste mit dem Trägheitsgesetz der reellen quadratischen Formen zusammenhängen, hat Loewy, *Math. Ann.*, 50, § 9; ib., 52 und *Nova Acta Leop.*, 1898 angestellt.

Wenn die Zahl k in dem vorstehenden Theorem Null oder r ist, so heisst die quadratische Form *definit* (Gauss), sonst *indefinit.*

Jede quadratische definite Form behält dasselbe Vorzeichen bei, auf welche Art man auch die Werthe der (reellen) Variabelen ändern mag.

Eine quadratische Form mit r Variabelen lässt sich im Allgemeinen auf die vorstehende canonische Form auch dann zurückführen, wenn die Bedingung gestellt wird, dass die vorzunehmende Transformation eine *orthogonale* sein soll, d. h. derart, dass die Form

$$f' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_r^2$$

bei ihr unverändert bleibt.

Wenn in diesem Fall die reducirte Form die Gestalt

$$f = \sum_{ij}^{1\cdots r} a_{ij} x_i x_j = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \cdots + A_r x_r^2$$

annimmt, *so sind die Coefficienten A, mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen, die Wurzeln der (sogenannten charakteristischen) Gleichung*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda, & a_{12}, & a_{13}, & \cdots \\ a_{21}, & a_{22}+\lambda, & a_{23}, & \cdots \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}+\lambda, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0,$$

deren linke Seite die Discriminante der quadratischen Form $f + \lambda f'$ *ist.*

Sind die Coefficienten a_{ij} *von* f *sämmtlich reell, so sind alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung reell.* Vergl. S. 44.

Es ist dies ein specieller Fall des Problems, zwei quadratische Formen

$$f = \sum a_{ij}x_i x_j, \quad F = \sum b_{ij}x_i x_j$$

gleichzeitig auf die *canonische Form* zu reduciren.

Offenbar können wir immer auch die Bedingung hinzufügen, dass die zweite dieser Formen sich auf einen Ausdruck, wie das obige f' zurückführen lasse, d. h. auf die Summe der Quadrate der neuen Variabelen. Da die reducirten Formen

$$f = A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \cdots + A_r x_r^2,$$
$$F = B_1 x_1^2 + B_2 x_2^2 + \cdots + B_r x_r^2$$

sind, so braucht man nur

$$y_1 = \sqrt{B_1}\, x_1, \quad y_2 = \sqrt{B_2}\, x_2, \ \cdots$$

zu setzen, um

$$f = \frac{A_1}{B_1} y_1^2 + \frac{A_2}{B_2} y_2^2 + \cdots + \frac{A_r}{B_r} y_r^2,$$
$$F = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2$$

zu erhalten.

Die Verhältnisse $\frac{A_i}{B_i}$ *sind, mit anderem Vorzeichen genommen, die Wurzeln der (charakteristischen) Gleichung*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11}, & a_{12}+\lambda b_{12}, & \cdots \\ a_{21}+\lambda b_{21}, & a_{22}+\lambda b_{22}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0,$$

deren linke Seite die Discriminante der quadratischen Form $f + \lambda F$ *ist.*

Zu den ersten, die sich mit diesem Problem beschäftigten, gehören Cauchy, *Exerc. de math.*, 4, 1829 und Jacobi, *Crelle*, 12.

Die Lösung des Problems gestaltet sich so, wie hier angegeben wurde, nur dann, *wenn alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung von einander verschieden sind;* sind dagegen einige Wurzeln einander gleich, so treten andere Betrachtungen ein.

Für $r = 2$ und $r = 3$ ist die Sache einfach und schon vor langer Zeit in den Büchern über analytische Geometrie dargelegt worden; für $r = 4$ sind Untersuchungen von Sylvester, *Phil. Mag.*, (4), 1, 1851, S. 119, für ein beliebiges r von Weierstrass, *Berl. Monatsber.*, 1858, 1868 vorhanden. Der letztere behandelte das Problem nicht nur für zwei quadratische Formen, sondern auch für *bilineare Formen mit zwei Variabelenreihen.* Bei dieser Gelegenheit stellte Weierstrass die Theorie der sogenannten *Elementartheiler* auf:

Wir wollen die Determinante von der r^{ten} Ordnung

$$D = | a_{ij} + \lambda b_{ij} | = | \alpha_{ij} |$$

betrachten und im Allgemeinen annehmen, sie habe σ zur Charakteristik oder zum Rang[1]) (siehe S. 89), d. h. es seien alle Unterdeterminanten von der Ordnung $\sigma + 1$, aber *nicht* alle Unterdeterminanten von der Ordnung σ identisch Null. Es sei $a + \lambda b = p$ und l_ϱ sei der Exponent der *höchsten* Potenz, mit welcher p als Factor in *allen* Unterdeterminanten der ϱ^{ten} Ordnung $(\varrho < \sigma)$ von D enthalten ist; mit anderen Worten: p^{l_ϱ} sei ein Factor *aller* Minoren von der Ordnung ϱ, von welchen einige p auch in einer höheren Potenz enthalten, *einer* aber wenigstens p *genau* in der Potenz l_ϱ enthält; es sei D_ϱ der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Unterdeterminanten der ϱ^{ten} Ordnung, D_ϱ habe mithin p in der l_ϱ^{ten} Potenz zum Factor. Die Zahlen l_ϱ sind ganze positive Zahlen oder auch Null.

Es ist

$$l_{\varrho+1} \geqq l_\varrho$$

und, wenn $l_\varrho = 0$ *ist,*

$$l_{\varrho-1} = l_{\varrho-2} = \cdots = 0.$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} e_\sigma &= l_\sigma - l_{\sigma-1}, \\ e_{\sigma-1} &= l_{\sigma-1} - l_{\sigma-2}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ e_1 &= l_1, \end{aligned}$$

---

1) Statt der Bezeichnung *Charakteristik* benutzen deutsche Autoren nach Frobenius' Vorgang, *Crelle*, 86 das Wort *Rang*.

woraus

$$l_\sigma = e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_\sigma$$

folgt; in D_σ tritt daher als Factor

$$p^{l_\sigma} = p^{e_1} \cdot p^{e_2} \cdot p^{e_3} \cdots p^{e_\sigma} \quad \text{auf.}$$

Die Zahlen e genügen der Fundamentaleigenschaft

$$e_\sigma \geqq e_{\sigma-1} \geqq e_{\sigma-2} \geqq \cdots \geqq e_1.$$

Jeder Factor p^{e_i} heisst nun, wenn e_i von Null verschieden ist, ein *Elementartheiler des Systems der* α_{ij} und, wenn $\sigma = r$ ist, der *Determinante D* (Weierstrass), und p wird die *Basis der Elementartheiler* genannt.

Den Begriff der *Elementartheiler* kann man auf eine beliebige Determinante ausdehnen, deren Elemente α nicht wie die Elemente von D lineare Functionen von λ, sondern entweder ganze Zahlen oder *ganze* Functionen einer oder mehrerer Variabelen sind. In dem ersten Fall ist unter dem Symbol p eine *Primzahl,* in dem zweiten eine *lineare* oder im Allgemeinen *irreducibele ganze* Function dieser Variabelen zu verstehen.

Ein Elementartheiler ersten Grads heisst nach Frobenius, *Crelle,* 86 ein *linearer Elementartheiler;* Kronecker, *Berl. Monatsber.,* 1874, S. 226; *Werke,* S. 405 dagegen sagt *einfacher Elementartheiler.* Wir dagegen werden nach dem Vorgang von Frobenius, l. c. den Ausdruck *einfacher Elementartheiler* in anderem Sinn gebrauchen:

Bildet man die Verhältnisse

$$\frac{D_\sigma}{D_{\sigma-1}} = E_\sigma, \quad \frac{D_{\sigma-1}}{D_{\sigma-2}} = E_{\sigma-1}, \quad \cdots, \quad D_1 = E_1$$

und setzt

$$E_{\sigma+1} = E_{\sigma+2} = \cdots = E_r = 0,$$

so sind die Ausdrücke E *ganze Zahlen* oder bez. *ganze Functionen* und werden bez. der erste, zweite, $\cdots$, r^{te} Elementartheiler des Systems der a_{ij} oder auch, wenn $\sigma = r$ ist, der Determinante genannt. Sie sollen *zusammengesetzte Elementartheiler* des Systems und die Ausdrücke p^{e_i} *einfache Elementartheiler* (Frobenius) heissen.

Man beachte jedoch, dass der Ausdruck *zusammengesetzte Elementartheiler* von Frobenius in anderem Sinn gebraucht wird. Siehe *Crelle,* 86, S. 162. Der Ausdruck in unserem Sinn findet sich bei Muth (an dem weiter unten citirten Ort, S. 13) und wird durch die Eigenschaft gerechtfertigt, *dass*

man durch Zerlegung der zusammengesetzten Elementartheiler in Factoren alle Elementartheiler des Systems erhält.

Die Hauptarbeiten über die Theorie der *Elementartheiler,* auf welche wir hier nicht näher eingehen, sind ausser den bereits citirten: Stickelberger, *Diss. inaug.*, Berlin 1874; *Crelle,* 86; Darboux, *J. de Liouville,* (2), 19; Kronecker, *Berl. Monatsber.*, 1874, 1890, 1891; *Crelle,* 107; Frobenius, *Crelle,* 86, 88; *Sitz.-Berichte d. Berl. Akad.*, 1890, 1894, 1896; Hensel, *Crelle,* 114, 115 etc. etc. Näheres findet man in dem soeben erschienenen Werk von Muth, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler,* Leipzig 1899.

Wir wollen nun die Resultate angeben, zu denen man auf Grund der Theorie der Elementartheiler bei dem Problem der Reduction der quadratischen Formen auf die canonische Form, von welchem oben die Rede war, und bei dem anderen gleichartigen Problem der Aequivalenz von quadratischen Formen oder von *Scharen* quadratischer Formen kommt.

Damit zwei quadratische Formen mit r Variabelen sich durch dieselben linearen Transformationen auf die Gestalt

$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \cdots + A_r x_r^2,$$
$$B_1 x_1^2 + B_2 x_2^2 + \cdots + B_r x_r^2,$$

worin A_i, B_i *nicht beide zugleich Null sind, bringen lassen, ist es nöthig und ausreichend, dass die auf die gewöhnliche Art aus den Coefficienten der beiden Formen gebildete Determinante*

$$D = | a_{ij} + \lambda b_{ij} |$$

nicht verschwinde und nur lineare Elementartheiler besitze. Weierstrass, *Werke,* 2, S. 41—42.

Wenn D zwar von Null verschieden ist, die Elementartheiler von D aber beliebig sind, so lässt sich eine Reduction auf andere *canonische oder normale Formen* ausführen, deren Natur von den Elementartheilern abhängt. Darauf gründet sich dann *eine Classification der quadratischen Formen.* Wir lassen uns jedoch darauf nicht näher ein.

Ein Problem allgemeinerer Art besteht darin, zu bestimmen, ob zwei Scharen von quadratischen Formen $A + \lambda B$, $A' + \lambda B'$ *äquivalent* sind, d. h. ob sich durch lineare Transformationen, deren Coefficienten von λ nicht abhängen, die eine in die andere verwandeln lässt.

Zwei ordinäre Scharen quadratischer Formen von r Varia-
n (d. h. solche, deren Discriminante nicht identisch Null ist)
l dann und nur dann äquivalent, wenn die Elementartheiler
r Determinanten übereinstimmen. Weierstrass.

Offenbar ist in diesem allgemeinen Theorem das frühere specieller Fall enthalten.

Die Weierstrass'sche Theorie ist von der grössten Trag-
ite; sie lässt sich, auf geeignete Art modificirt, auf sehr viele
dere Aequivalenzprobleme anwenden.

Denken wir uns z. B., es liegen quadratische Formen mit
nzen Coefficienten vor und man wolle untersuchen, wann eine
n zwei Formen dieser Art durch eine Transformation von
anzen Coefficienten und dem Modul 1 (unimodulare) sich in
ie andere verwandeln lässt, oder auch speciell, wann eine
ieser Formen durch eine unimodulare Transformation auf die
anonische Form gebracht werden kann. Die Untersuchung der
Determinanten der beiden Formen und ihrer Elementartheiler
n dem Sinn, den man, wie wir oben ausgeführt haben, alsdann
diesem Ausdruck geben muss, führt zu Resultaten, die den
obigen durchaus analog sind.

Dieselbe Theorie lässt sich auch auf die *bilinearen Formen* anwenden:

Unter einer *bilinearen Form* von zwei Reihen von Variabelen

$$x_1, x_2, \cdots, x_r$$
$$y_1, y_2, \cdots, y_r$$

versteht man einen Ausdruck vom Typus

$$\sum_{ij} a_{ij} x_i y_j.$$

Wenn die Coefficienten a_{ij} *lineare* Functionen eines Parameters λ sind, so stellt dieser Ausdruck eine *Schar* von bilinearen Formen dar. Ist die Determinante der a_{ij} von Null verschieden, so erhält man eine *ordinäre* bilineare Form, ist $|a_{ij}|$ dagegen Null, eine *singuläre*.

Ueber die Theorie der bilinearen Formen siehe Weierstrass, l. c. und besonders Frobenius, *Crelle*, 84; vergl. auch Muth, l. c., § 2 u. ff.

Bei den bilinearen Formen kann man ähnliche Probleme studiren, wie bei den quadratischen:

1. vorausgesetzt, die Coefficienten seien *ganze* Zahlen, die Aequivalenz zweier solcher Formen, d. h. die Möglichkeit eine von ihnen durch eine unimodulare Transformation in die andere zu verwandeln und mithin speciell die Reduction einer von ihnen durch eine unimodulare Transformation (d. h. mit ganzen Coefficienten und dem Modul 1) auf die Form

$$\sum A_i x_i y_i,$$

welche *die normale oder canonische Form* heisst;

2. vorausgesetzt, die Coefficienten seien lineare Functionen eines Parameters λ, die Aequivalenz zweier Scharen dieser Formen, d. h. die Möglichkeit, die eine durch lineare Transformationen, deren Coefficienten von λ *nicht abhängen,* in die andere zu verwandeln und mithin insbesondere die gleichzeitige Reduction zweier bilinearer Formen mit constanten Coefficienten auf die *canonische* Form.

Es bestehen die folgenden Theoreme:

Zwei bilineare Formen mit ganzen numerischen Coefficienten sind dann und nur dann äquivalent, wenn die entsprechenden zusammengesetzten Elementartheiler des Systems der Coefficienten der beiden Formen gleich sind.

Eine gegebene bilineare Form, deren ganzzahliges Coefficientensystem die zusammengesetzten Elementartheiler

$$E_1, E_2, \cdots, E_r$$

besitzt, lässt sich durch unimodulare Substitutionen für die x_i *und* y_i *stets in die Form*

$$E_1 x_1 y_1 + E_2 x_2 y_2 + \cdots + E_r x_r y_r$$

transformiren.

Zwei bilineare Formen (zwei Formenscharen) mit Coefficienten, die lineare Functionen von λ *sind, und von Null verschiedenen Determinanten, sind dann und nur dann äquivalent (d. h. durch von* λ *unabhängige Transformationen die eine in die andere transformirbar), wenn die Determinanten der beiden Scharen in ihren Elementartheilern übereinstimmen.*

Damit sich zwei bilineare Formen durch lineare Transformationen gleichzeitig auf die Gestalt

$$A_1 x_1 y_1 + A_2 x_2 y_2 + \cdots + A_r x_r y_r,$$
$$B_1 x_1 y_1 + B_2 x_2 y_2 + \cdots + B_r x_r y_r$$

bringen lassen, worin A_i, B_i nicht beide Null sind, ist es nothwendig und hinreichend, dass die Determinante

$$D = | a_{ij} + \lambda b_{ij} |$$

nicht identisch verschwinde und lauter lineare Elementartheiler besitze.

Wir schliessen hiermit die Darlegung der Anwendungen der Theorie der Elementartheiler und geben zu einem anderen Problem in Bezug auf die quadratischen Formen über.

Eine *orthogonale* Transformation (d. h. eine lineare Transformation, bei welcher die Determinante der Coefficienten orthogonal ist, vergl. S. 48, 49) transformirt die specielle quadratische Form

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2$$

in sich selbst.

Von den n^2 Coefficienten dieser Transformation sind nur $\frac{n(n-1)}{2}$ unabhängig; es bietet sich mithin das Problem:

Wie lassen sich durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ unabhängige Grössen die Coefficienten einer linearen Transformation ausdrücken, welche die quadratische Form $\sum x_i^2$ unverändert lässt?

Mit dieser Untersuchung haben sich Euler, *Novi Comm. Petrop.*, 15, 20; Cauchy, *Exerc. de math.*, 4 und schliesslich auf allgemeinere Art Cayley, *Crelle,* 32 beschäftigt. Ueber das allgemeine Resultat, zu welchem Cayley kam, verweisen wir auf Pascal, *Determinanten,* Leipzig 1900, § 47.

Diese Forschungen lassen sich verallgemeinern, wenn man statt der obigen speciellen quadratischen Form eine beliebige quadratische Form zu Grunde legt. Hermite hat für $r = 3$ in *Crelle,* 47 und für $n = 4$ in dem *Cambr. Dubl. math. J.*, 9 darüber Untersuchungen angestellt. Von der zahlreichen Literatur sei G. Cantor, *Habilitationsschr.*, Halle 1869; Bachmann, *Crelle,* 76; Tannery, *Bull. scienc. math.*, 11, 1876; Prym, *Gött. Abhandl.*, 38, 1892; Frobenius, *Crelle,* 84 erwähnt. Die cogrediente Transformation der bilinearen Form in sich selbst wurde von A. Voss behandelt. *Abh. der kgl. Bayer. Akad.*, 1890.

Neuere Arbeiten von Loewy, *Compt. Rend.*, 1896; *Nova Acta Leop.*, 1898 behandeln auch auf Grund der Theorie der Elementartheiler *die Transformation* einer bilinearen Form *in sich selbst,* wobei die y und x conjugirt imaginäre Variabelen

sind; als Specialfall ergibt sich dabei *die reelle Transformation* einer *reellen* quadratischen Form *in sich.* Von diesem Gesichtspunkt aus werden Untersuchungen angestellt, welche in Verbindung mit denen über die automorphen Formen stehen, siehe § 22.

§ 16. Das System einer oder mehrerer ternärer quadratischer Formen.

Das volle System einer einzigen ternären quadratischen Form a_x^2 hat nur *eine* Invariante (die *Discriminante,* § 15) und mithin keine *absoluten Invarianten.* Es hat ferner nur *eine Contravariante.*

Ist $f = a_x^2$ die gegebene Form, so ergibt sich das volle System aus:

$$f,$$
$$F = (abu)^2,$$
$$A = (abc)^2.$$

Das volle System zweier ternärer quadratischer Formen $f = a_x^2$, $f' = a_x'^2$ besteht, abgesehen von der identischen Covariante, aus 20 Bildungen, die sich, wenn man der Einfachheit wegen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

und

$$\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3' = \begin{vmatrix} b_2' & c_2' \\ b_3' & c_3' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_3' & c_3' \\ b_1' & c_1' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1' & c_1' \\ b_2' & c_2' \end{vmatrix}$$

setzt, symbolisch auf die folgende Art schreiben lassen:

1) *vier Invarianten:*

$$A_{111} = (abc)^2,$$
$$A_{112} = (aba')^2,$$
$$A_{122} = (aa'b')^2,$$
$$A_{222} = (a'b'c')^2;$$

2) *vier Covarianten:*

$$f = a_x^2, \quad f' = a_x'^2,$$
$$\Delta = (\alpha\alpha' x)\, a_{\alpha'} a_\alpha' a_x a_x',$$
$$\Phi_{12} = (\alpha\alpha' x)^2;$$

3) *vier Contravarianten:*

$$F = (abu)^2, \quad F' = (a'b'u)^2,$$
$$D = (aa'u)(ab'c')(a'bc)(ub'c')(ubc),$$
$$F_{12} = (aa'u)^2;$$

4) *acht Zwischenformen:*

$$B_1 = (a'bc)a'_x(ubc), \quad B_2 = (ab'c')a_x(ub'c'),$$
$$N = (aa'u)a_x a'_x, \quad N' = (\alpha\alpha'x)u_\alpha u_{\alpha'},$$
$$C_1 = (aa'u)a'_\alpha a_x u_\alpha, \quad \Gamma_1 = (\alpha\alpha'x)a_{\alpha'}u_\alpha a_x,$$
$$C_2 = (aa'u)a_{\alpha'}a'_x u_{\alpha'}, \quad \Gamma_2 = (\alpha\alpha'x)a'_\alpha u_\alpha a'_x.$$

Dieses volle System hat Gordan, *Math. Ann.*, 19 aufgefunden; vergl. auch die *Geometrie* von Clebsch-Lindemann.

Ueber die geometrische Interpretation dieser invarianten Bildungen siehe Bd. 2, Kap. 3 und über die Reduction der ternären quadratischen Formen auf die canonische Gestalt den vorhergehenden Paragraphen.

Das System zweier ternärer quadratischer Formen hat zwei absolute Invarianten. Zu solchen kann man, als die einfachsten, die folgenden wählen:

$$A_1 = \frac{A_{112}^2}{A_{111}A_{122}},$$
$$A_2 = \frac{A_{122}^2}{A_{112}A_{222}}.$$

Ueber das System zweier ternärer quadratischer Formen siehe ausser den citirten Arbeiten von Gordan auch Perrin, *Soc. math. de France*, 18; Rosanes, *Math. Ann.*, 6; Gerbaldi, *Annali di mat.*, 17.

Das System dreier ternärer quadratischer Formen hat Ciamberlini untersucht, *Giorn. di Batt.*, 24 (das System enthält 127 Bildungen, darunter 11 Invarianten); ferner Gundelfinger, *Crelle*, 70; Mertens, *Sitzungsber. d. Wien. Akad.*, 93; Gerbaldi, *Accad. Torino*, 25, 1890; Fischer und Mumelter, *Monatsh. für Math.*, 8, 1897. Ueber die Resultante dreier ternärer quadratischer Formen siehe Sylvester, *Cambr. Dubl. math. J.*, 8, 1853; Cayley, *Crelle*, 57; Gundelfinger und Mertens, l. c.; Gordan, *J. de math.*, (5), 3, 1897 und über die Combinanten dieser drei Formen Gerbaldi, l. c.

§ 17. Die ternäre cubische Form. Ihre Invarianten und Covarianten.

Die ternäre cubische Form habe symbolisch die Gestalt $f = a_x^3 = b_x^3 = \cdots$ oder, durch die wirklichen Coefficienten ausgedrückt, die Gestalt $f = \sum a_{ihk} x_i x_h x_k$.

Aus den drei invarianten Bildungen Δ, Q, R der binären cubischen Form erhält man durch das Uebertragungsprincip die drei invarianten Bildungen für die ternäre cubische Form:

$$\Theta = (abu)^2 a_x b_x,$$
$$Q_1 = (abu)^2 (cau) c_x^2 b_x,$$
$$F = (abu)^2 (cdu)^2 (acu)(bdu).$$

Setzt man

$$f_{ij} = \frac{1}{6} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$
$$\Theta_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_j},$$

so gelten die Formeln

$$F = -2 \begin{vmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \Theta_{13} & u_1 \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \Theta_{23} & u_2 \\ \Theta_{31} & \Theta_{32} & \Theta_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Theta = -2 \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & u_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Setzt man ferner symbolisch $\Theta = \Theta_x^2 u_\vartheta^2 = \Theta_x'^2 u_{\vartheta'}^2$, so ist

$$Q_1 = u_\vartheta^2 (c\Theta u) c_x^2 \Theta_x.$$

Das volle System einer ternären cubischen Form besteht aus 34 Formen.

Andere wichtige invariante Bildungen der cubischen Form sind:

Die Hesse'sche $\quad H = (abc)^2 a_x b_x c_x = \Theta_x^2 c_\vartheta^2 c_x,$

die Cayley'sche[1] $\quad s = (abc)(abu)(acu)(bcu) = (\Theta cu)^2 c_\vartheta u_\vartheta,$

---

1) Ueber die geometrische Bedeutung dieser beiden Formen, die den sogenannten Hesse'schen und Cayley'schen Curven entsprechen, siehe Bd. 2, Kap. 5 u. 7.

die Contravariante

$$t = (abd)\,(abu)\,(aeu)\,(bfu)\,(def)^2$$
$$= \Theta_s^2 u_s u_\vartheta^2$$

und die beiden Invarianten

$$\begin{aligned}
S &= (abc)\,(abd)\,(acd)\,(bcd) \\
&= \Theta_{\vartheta'}^2 \Theta_\vartheta'^2 \\
&= a_s^3 \\
&= \tfrac{2}{3}\{(a_{122}a_{133} - a_{123}^2)^2 + (a_{222}a_{333} - a_{223}^2)(a_{111}a_{133} - a_{113}^2) + \\
&\quad + (a_{223}a_{333} - a_{233}^2)(a_{111}a_{122} - a_{112}^2) + \\
&\quad + (a_{222}a_{333} - a_{223}a_{233})(a_{112}a_{113} - a_{111}a_{123}) + \\
&\quad + (a_{122}a_{333} + a_{223}a_{133} - 2a_{123}a_{233})(a_{112}a_{123} - a_{113}a_{122}) + \\
&\quad + (a_{122}a_{233} + a_{133}a_{222} - 2a_{123}a_{223})(a_{113}a_{123} - a_{112}a_{133})\}, \\
T &= (abc)\,(abd)\,(ace)\,(bcf)\,(def)^2 \\
&= a_t^3.
\end{aligned}$$

Ausser den beiden Fundamentalinvarianten S und T existiren weitere nicht, d. h. jede andere ist stets eine rationale ganze Function dieser beiden.

Die Bedingung $S = 0$ drückt aus, dass die Hesse'sche Form von f in drei lineare Factoren zerfällt; unter dieser Bedingung besteht auch die Cayley'sche Form aus drei linearen Factoren.

Wenn $T = 0$ ist, so fällt die Hesse'sche Form der Hesse'schen Form mit der Urform zusammen und die Cayley'sche Form der Hesse'schen Form mit t.

Die Discriminante (siehe oben § 13) *der Form dritter Ordnung ist*

$$T^2 - \tfrac{1}{6}S^3.$$

Nennt man a_{ijk} und h_{ijk} die Coefficienten von f und der Hesse'schen Form H, so lautet der wirkliche Ausdruck für die Discriminante:

$$R = \begin{vmatrix}
a_{111} & a_{122} & a_{133} & a_{123} & a_{113} & a_{112} \\
a_{211} & a_{222} & a_{233} & a_{223} & a_{213} & a_{212} \\
a_{311} & a_{322} & a_{333} & a_{323} & a_{313} & a_{312} \\
h_{111} & h_{122} & h_{133} & h_{123} & h_{113} & h_{112} \\
h_{211} & h_{222} & h_{233} & h_{223} & h_{213} & h_{212} \\
h_{311} & h_{322} & h_{333} & h_{323} & h_{313} & h_{312}
\end{vmatrix}.$$

Der Ausdruck $\frac{S^3}{T^2}$ *ist absolute Invariante für die cubische Form.*

Die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit eine cubische Form sich in eine quadratische und eine lineare zerlegen lasse, besteht in dem identischen Verschwinden von

$$Ts - St.$$

Soll man die cubische Form in drei lineare Factoren zerlegen können, so ist es nothwendig und ausreichend, dass f *und* H *einander proportional seien, d. h. dass die Form*

$$(ahu)\, a_x^2 h_x^2$$

identisch verschwinde.

Die nothwendige und ausreichende Bedingung für die Zerlegung von f *in drei lineare Factoren, deren Determinante Null ist, wird durch das identische Verschwinden von* H *gegeben.*

Das identische Verschwinden von F *ist die Bedingung, unter welcher* f *in eine einfache lineare Form und in das Quadrat einer anderen zerfällt, und das identische Verschwinden von* Θ *schliesslich die Bedingung, unter welcher* f *sich auf den Cubus einer linearen Form reducirt.*

Die Contravariante $(ahu)^3$ *ist identisch Null.*

Für das Studium der ternären cubischen Form ist die Untersuchung der binären biquadratischen Form

$$G(\lambda_1 \lambda_2) = \lambda_1^4 - S\lambda_1^2\lambda_2^2 - \tfrac{4}{3}\, T\lambda_1 \lambda_2^3 - \tfrac{1}{12} S^2 \lambda_2^4$$

von Interesse, welche in der Gestalt der Hesse'schen Determinante einer beliebigen cubischen Form der sogenannten *syzygetischen* Schar

$$\lambda_1 f + \lambda_2 H$$

auftritt.

Die Invariante i *der biquadratischen Form* G *ist identisch Null.*

Die Invariante j *von* G *ist gleich* $\frac{2}{3}\left(\frac{S^3}{6} - T^2\right)$ *d. h. bis auf einen Factor der Discriminante von* f *gleich.*

Die Hesse'sche Determinante von G *unterscheidet sich nur durch einen Zahlenfactor von der Invariante* $S_{\lambda_1 \lambda_2}$ *einer Form der syzygetischen Schar.*

Die Covariante sechster Ordnung von G *differirt nur um einen Zahlenfactor von der Invariante* $T_{\lambda_1 \lambda_2}$ *einer Form der syzygetischen Schar.*

Ueber die geometrische Bedeutung der in diesen Paragraphen enthaltenen Resultate verweisen wir auf Bd. 2, Kap. 7.

Canonische Formen einer allgemeinen ternären cubischen Form sind die folgenden:

$$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6 m x_1 x_2 x_3 \quad \text{(Hesse)}, \ldots \quad \text{(I)}$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 + 27 k x_1 x_2 x_3 \ldots \ldots \quad \text{(II)}$$

Die cubische Form lässt sich ferner auch durch eine lineare Combination der Cuben von vier linearen Formen darstellen. Vergl. dazu Bd. 2, Kap. 7; Salmon-Fiedler, *Höh. Curv.*, Anm. 55 und F. London, *Math. Ann.*, 36; Scorza, ib., 50.

Bringt man die cubische Form auf die canonische Gestalt (I), so erhalten die invarianten Bildungen t, S, T und die Discriminante bez. die Werthe:

$$t = -2(1-10m^3)(u_1^3+u_2^3+u_3^3)-2(30m^2+24m^5)u_1 u_2 u_3,$$
$$S = 24m(m^3-1),$$
$$T = 6(8m^6+20m^3-1),$$
$$(\text{Discrim.}) = (1+8m^3)^3.$$

Mit den ternären cubischen Formen haben sich Hesse, Aronhold, *Crelle*, 39, 55, der die Discriminante berechnete, Cayley, *On quantics, Proc. Roy. Soc.*, 7, 1856; *Phil. Trans.*, 1861; *Am. Journ.*, 4; Gordan, *Math. Ann.*, 1; Clebsch-Gordan, *Math. Ann.*, 1, 6, 8; Gundelfinger, *Math. Ann.*, 4, 5, 8; Harnack, *Math. Ann.*, 9; Gerbaldi, *Atti Torino*, 15, 1880; Mertens, *Wien. Berichte*, 1888; Dingeldey, *Math. Ann.*, 31; Maisano, *Rend. Palermo*, 4 beschäftigt. Eine ins Einzelne gehende Darstellung findet man in der *Geom.* von Clebsch-Lindemann, die wir bei der vorstehenden Uebersicht benutzt haben. Ueber analoge Untersuchungen siehe auch Salmon, *Anal. Geom. der höheren ebenen Curven*, deutsch von Fiedler, Leipzig 1882 und Salmon-Fiedler, *Die Algebra der linearen Transformationen*, Leipzig 1877.

§ 18. Die ternäre Form vierter Ordnung.

Gibt man der ternären Form 4ter Ordnung die symbolische Gestalt

$$f = a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = \cdots,$$

so ist die erste invariante Form, die sich bei der Anwendung des Uebertragungsprincips bietet, die Contravariante

$$\sigma = (abu)^4.$$

Eine andere Contravariante ist

$$(abu)^2\,(bcu)^2\,(cau)^2.$$

Die einfachste Invariante lautet, symbolisch ausgedrückt,

$$A = (abc)^4;$$

sie ist in den Coefficienten vom 3ten Grad.

Eine andere Invariante B hat, durch die symbolischen Coefficienten ausgedrückt, die Gestalt:

$$B = a_1^2\, b_2^2\, c_3^2\, d_2 d_3\, e_3 e_1\, f_1 f_2 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_2 a_3 & a_3 a_1 & a_1 a_2 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_2 b_3 & b_3 b_1 & b_1 b_2 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_2 c_3 & c_3 c_1 & c_1 c_2 \\ d_1^2 & d_2^2 & d_3^2 & d_2 d_3 & d_3 d_1 & d_1 d_2 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 & e_2 e_3 & e_3 e_1 & e_1 e_2 \\ f_1^2 & f_2^2 & f_3^2 & f_2 f_3 & f_3 f_1 & f_1 f_2 \end{vmatrix}$$

und ist in den Coefficienten vom 6ten Grad. Man erhält sie, indem man die x auf dialytische Art aus den sechs zweiten Derivirten von f eliminirt.

Multiplicirt man die Elemente der ersten Zeile mit a_1^2, die der zweiten mit b_2^2 etc., so treten sofort als Elemente dieser Determinante die wirklichen Coefficienten der Form auf.

Die Invariante B steht in besonderer Beziehung zu der Möglichkeit, f durch eine lineare Combination der 4ten Potenzen linearer Formen auszudrücken:

Jede ternäre Form f 4ter Ordnung lässt sich immer durch die 4ten Potenzen von sechs linearen Formen darstellen; ist aber $B = 0$, so reichen dazu die 4ten Potenzen von fünf linearen Formen hin; sind schliesslich alle Minoren 5ter Ordnung der Determinante B Null, so lässt sich f durch die 4ten Potenzen von nur vier linearen Formen darstellen. Siehe Reye, *Crelle*, 78; Clebsch, ib., 59; Lüroth, *Math. Ann.*, 1.

Von den Covarianten der ternären Form 4ter Ordnung ist eine 4ter Ordnung beachtenswerth, die Clebsch, *Crelle*, 57 untersucht und mit S bezeichnet hat.

Diese Covariante S erhält man auf die folgende Art: Es sei a_x^4 die gegebene Form; wir bilden die Polare $a_x^3 a_y$ und die Invariante 4ten Grads dieser cubischen Form in Bezug auf die Variabelen x (siehe § 17). Die Clebsch'sche Covariante S ist alsdann die Resultante von $a_x^3 a_y$ und von dieser Invariante, wenn man sich die y variabel denkt.

Ist die ternäre Form 4ter *Ordnung speciell derart, dass sie sich auf die Gestalt*

$$aX_1^4 + bX_2^4 + cX_3^4 + dX_4^4 + eX_5^4,$$

in welcher die X lineare Formen sind, reduciren lässt, wie es für $B = 0$ *der Fall ist* (siehe oben), *so wird die Covariante S durch*

$$\frac{a}{X_1} + \frac{b}{X_2} + \frac{c}{X_3} + \frac{d}{X_4} + \frac{e}{X_5}$$

dargestellt.

Wenn dagegen die ternäre Form 4ter *Ordnung auf den Typus zurückgeführt werden kann, der nur die vierten Potenzen von* x_1, x_2, x_3 *und die Producte der Quadrate dieser drei Variabelen enthält, so reducirt sich auch die Covariante S selbst auf diese nämliche Form.* Siehe Salmon-Fiedler, *Höhere Curv.*, Leipzig 1882, S. 355.

Eine ternäre Form 4ter Ordnung kann nur dann mit der eigenen Covariante S zusammenfallen, wenn sie ein doppelter Kegelschnitt d. h. das Quadrat einer quadratischen Form oder die specielle Form 4ter Ordnung ist, deren Gleichung

$$x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 = 0$$

lautet. Diese letztere wurde von Klein und Anderen studirt und hat die Eigenschaft, automorph zu sein. Vergl. § 22 und Ciani, *Rend. Palermo,* 14, 1899.

Gordan untersuchte das volle System dieser speciellen Form 4ter Ordnung und fand 54 Bildungen, *Math. Ann.*, 17, 20; später betrachtete Maisano die invarianten Formen der allgemeinen ternären biquadratischen Form bis zu denen, welche in den Coefficienten vom 5ten Grad sind, *Giorn. di Batt.*, 19. Die Discriminante für den allgemeinen Fall hat Klein untersucht, *Math. Ann.*, 36, S. 56; andere Forschungen finden sich bei Salmon-Fiedler, l. c.; Scherrer, *Ann. di mat.*, 10; Maisano, *Rend. Palermo,* 1 und Ciani, *Ann. di mat.*, 20.

§ 19. Quaternäre quadratische Formen.

Um das *volle System* einer oder mehrerer quaternärer Formen zu erhalten, hat man drei verschiedene Arten von Variabelen einzuführen (siehe § 11), nämlich die Variabelen x, welche als Punktcoordinaten, die u, welche als Geraden-Coordinaten und die zu den x contragredienten v, welche als Ebenen-Coordinaten interpretirt werden können.

Das in diesem Sinn ausgedehnte volle System einer einzigen quaternären quadratischen Form hat Mertens, *Wiener Berichte,* 98, 1889 auf 20 Bildungen reducirt. Derselbe Autor hat sich später auch mit den vollen Systemen von zwei und von drei quaternären quadratischen Formen beschäftigt, *Wiener Berichte,* 99, 1890.

Von den Invarianten zweier quaternärer quadratischer Formen a_x^2, $a_x'^2$ sind die folgenden beachtenswerth, welche die symbolische Gestalt

$$\Theta = (abca')^2,$$
$$\Phi = (aba'b')^2,$$
$$\Theta' = (aa'b'c')^2 \quad \text{haben.}$$

Dazu kommen die beiden Invarianten

$$\Delta = (abcd)^2, \quad \Delta' = (a'b'c'd')^2.$$

Bringt man die beiden quadratischen Formen auf die canonische Gestalt und zwar auf die Formen

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

so erhalten die obigen Invarianten die Werthe:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}, \quad \Delta' = 1,$$
$$\Theta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{22}a_{33}a_{44} + a_{33}a_{44}a_{11} + a_{44}a_{11}a_{22},$$
$$\Theta' = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44},$$
$$\Phi = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{44} + a_{11}a_{33} + a_{11}a_{44} + a_{22}a_{44}.$$

Setzt man die beiden gegebenen quadratischen Formen gleich Null, so ergeben sich Gleichungen, welche Flächen 2ten Grads darstellen. Ueber die geometrische Interpretation der gleich Null gesetzten vorstehenden und anderer Invarianten in Bezug auf diese Flächen 2ten Grads verweisen wir auf die *Geom. d. Raumes* von Salmon-Fiedler, Bd. 1, Kap. 9.

§ 20. **Die quaternäre cubische Form.**

Drückt man die quaternäre cubische Form symbolisch durch

$$f = a_x^3 = b_x^3 = \cdots$$

aus, so ergibt sich, *dass nur fünf Fundamentalinvarianten bez. von den Ordnungen,* 8, 16, 24, 32, 40 *existiren.*

Die beiden ersten sind

$$A = (abcd)^2 (ab'c'd') (a'bc'd') (a'b'cd') (a'b'c'd),$$
$$B = (abcd)^2 (a'b'c'd')^2 (a''b''c''d'')^2 (a'''b'''c'''d''')^2 \times$$
$$\times (aa'a''a''') (bb'b''b''') (cc'c''c''') (dd'd''d''').$$

Gibt man der cubischen Form die Sylvester'sche sogenannte pentaedrale canonische Gestalt (siehe Bd. 2, Kap. 11)

$$a_1 X_1^3 + a_2 X_2^3 + a_3 X_3^3 + a_4 X_4^3 + a_5 X_5^3,$$

so werden die Invarianten A und B bez.

$$A = a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^2 \left\{ \sum_1^5 \frac{1}{a_i^2} - 2 \sum_1^5 \frac{1}{a_i a_j} \right\}, \quad (i \neq j),$$

$$B = a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5^3 \sum_1^5 a_i.$$

Die übrigen Invarianten C, D, E nehmen dann bez. die Form an:

$$C = a_1^5 a_2^5 a_3^5 a_4^5 a_5^5 \sum_1^5 \frac{1}{a_i},$$

$$D = a_1^6 a_2^6 a_3^6 a_4^6 a_5^6 \sum_1^5 a_i a_j, \quad (i \neq j),$$

$$E = a_1^8 a_2^8 a_3^8 a_4^8 a_5^8.$$

Ueber die symbolischen Ausdrücke für diese drei Invarianten im allgemeinen Fall siehe Clebsch, *Crelle*, 58, S. 120.

Die Discriminante von f lautet, wenn sie durch diese fünf Invarianten ausgedrückt wird,

$$(A^2 - 64B)^2 - 16\,384\,(D + 2AC).$$

Es gibt vier lineare Covarianten; sie sind, falls die cubische Form in die Sylvester'sche Gestalt gebracht wird:

$$L = a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^2 \sum_1^5 a_i X_i,$$

$$L' = a_1^4 a_2^4 a_3^4 a_4^4 a_5^4 \sum_1^5 \frac{X_i}{a_i}.$$

$$L'' = a_1{}^5 a_2{}^5 a_3{}^5 a_4{}^5 a_5{}^5 \sum_1^5 a_i{}^2 X_i,$$

$$L''' = a_1{}^8 a_2{}^8 a_3{}^8 a_4{}^8 a_5{}^8 \sum_1^5 a_i{}^3 X_i.$$

Die Ebenen, welche durch diese vier, gleich Null gesetzten, Covarianten dargestellt werden, schneiden sich in einem Punkt, wenn die Discriminante der a, die eine weitere Invariante vom 100ten *Grad ist, verschwindet.*

Eine Covariante 4ter *Ordnung ist die Hesse'sche Determinante der cubischen Form.* Diese Determinante reducirt sich im Fall der Sylvester'schen Form auf

$$H = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 \sum_1^5 \frac{1}{a_i X_i}.$$

Das Studium der invarianten Bildungen der quaternären cubischen Form haben im Jahr 1860 fast gleichzeitig Clebsch, *Crelle,* 58 und Salmon, *Phil. Trans.,* 1860 begonnen. Näheres findet man auch bei Salmon-Fiedler, *Anal. Geom. d. Raumes,* 2, § 317 u. ff. Clebsch drückt die fünf Invarianten auch durch die Coefficienten der Hesse'schen Determinante aus und Salmon fand den Ausdruck für eine Covariante, die, geometrisch interpretirt, eine Fläche darstellt, welche die Fläche dritten Grads, deren Gleichung $f = 0$ ist, in ihren 27 Geraden schneidet. Siehe Bd. 2, Kap. 11.

§ 21. Volle Systeme für Formen von mehreren Variabelenreihen.

Wir haben bisher vorausgesetzt, die Urform oder die Urformen hätten eine einzige Variabelenreihe (der x). Dabei waren wir auf das Problem gestossen, die invarianten Bildungen zu ermitteln, aus welchen ein *volles System* besteht, haben gefunden, dass dies vollständig nur in wenigen einfachen Fällen möglich ist, und haben in den vorstehenden Paragraphen über die bisher erreichten Resultate einige Angaben gemacht. Selbstverständlich lässt sich diese Untersuchung ausdehnen, wenn man annimmt, die Urform habe *mehrere* Variabelenreihen, und auch in diesem Fall das volle System aufsucht. Diese neue Unter-

suchung ist natürlich complicirter und bisher nur in wenigen Fällen gelungen.

Man kann z. B. annehmen, die gegebene Form sei *ternär* und enthalte zwei Variabelenreihen; diese sind dann als cogrediente Variabelen oder, wie x und u als contragrediente (vergl. § 11) oder allgemeiner als Variabelen anzusehen, die durchaus unabhängigen Transformationen unterliegen. In dem *binären* Gebiet tritt dieser Unterschied nicht auf, weil der 1[te] und der 2[te] der beiden Fälle vermöge der Clebsch-Gordan'-schen Formel auf den Fall zurückkommt, in welchem die Urformen eine einzige Variabelenreihe besitzen.

Eine ternäre Urform, welche eine Reihe von Variabelen x und eine Reihe von contragredienten Variabelen u enthält, stellt, gleich Null gesetzt, geometrisch eine Zuordnung dar zwischen Punkten und Enveloppencurven der Ebene, oder zwischen Geraden und Punktcurven der Ebene, d. h. dasjenige, was man einen *Connex* nennt. Davon wird in Bd. 2, Kap. 6 vom Standpunkt der Geometrie aus die Rede sein. Es sind insbesondere gewisse specielle invariante Bildungen der *Connexe* untersucht worden, die man mittelst des Uebertragungsprincips (§ 12) erhält; auch von ihnen werden wir in Bd. 2, Kap. 6 sprechen.

Was nun die *vollen Systeme* angeht, so hat man nur das volle System einer in x und u linearen ternären Form $a_x u_\alpha$ studirt; es enthält 7 Bildungen, Clebsch-Gordan, *Math. Ann.*, 1. Analog hat Mertens, *Wiener Berichte*, 98, 1890 den *quaternären* Fall zu behandeln angefangen; die *bilinearen* quaternären Formen mit zwei Reihen *cogredienter* Variabelen, die sogenannten *Nullsysteme*, hat derselbe Autor schon früher untersucht, ib., 97, 1888.

§ 22. Automorphe ternäre, quaternäre etc. Formen.

Man hat die von uns früher in § 10 über binäre Formen angestellten Betrachtungen auf die Formen von der Stufe $r > 2$ ausgedehnt.

Eine Form heisst im Allgemeinen *automorph*, wenn sie eine *endliche* Gruppe linearer Transformationen in sich selbst zulässt.

Wir beschränken uns hier darauf, einige literarische Angaben zu machen.

Die Untersuchung hat im Allgemeinen für beliebige r Jordan begonnen, *Compt. Rend.*, 1877; *Crelle*, 84, 1878; *Acc.*

Napoli, Atti, 8, 1880; sie wurde für ternäre Formen von demselben Autor durchgeführt, welcher 11 Typen fand. Hierbei entgingen ihm aber zwei Typen, von welchen den einen Klein studirte, *Math. Ann.*, 14, 17; siehe den ersten Band von Klein, *Theorie der elliptischen Modulfunctionen,* herausg. von Fricke, Leipzig, 1. Bd., 1890; 2. Bd., 1892. Die entsprechende Gruppe hat 168 Transformationen und die ternäre Form

$$x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$$

ist von allen der Gruppe angehörigen Formen vom niedrigsten Grad und unzerlegbar.

Den anderen Typus mit 360 Transformationen fand Valentiner, *Kjöb. Skrift.*, (6), 5, 1889; eingehendere Studien über diese letztere Gruppe sind von Wiman, *Math. Ann.*, 47; Gerbaldi, *Rend. Palermo,* 1898—99; *Math. Ann.*, 50; Fricke, *Gött. Nachr.*, 1896; *Deutsch. Math.-Verein.*, 5, 1896; die Gruppe ist *holoedrisch isomorph* zur symmetrischen Gruppe von 6 Elementen. Siehe Kap. 2, § 4.

Gerbaldi fand, dass die unzerlegbare invariante Form niedrigsten Grads für die Gruppe der 360 Transformationen vom 6ten Grad ist. Sie entspricht, gleich Null gesetzt, einer Curve ohne vielfache Punkte von der 6ten Ordnung, der 30ten Classe und dem Geschlecht 10. Siehe Bd. 2, Kap. 5.

Sie hat die Gestalt:

$$\sum_1^6 f_i^3,$$

worin (unter ε *eine imaginäre Cubikwurzel aus der Einheit verstanden)*

$$f_1 = x_1^2 + 2cx_2x_3,$$
$$f_2 = \varepsilon(x_2^2 + 2cx_3x_1),$$
$$f_3 = x_3^2 + 2cx_1x_2,$$
$$f_4 = -\tfrac{1}{3}(1+2c)\varepsilon[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2)],$$
$$f_5 = -\tfrac{1}{3}(1+2c)[x_1^2 + \varepsilon^2 x_2^2 + \varepsilon x_3^2 - c(x_2x_3 + \varepsilon^2 x_3x_1 + \varepsilon x_1x_2)]$$
$$f_6 = -\tfrac{1}{3}(1+2c)\varepsilon[x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + \varepsilon^2 x_3^2 - c(x_2x_3 + \varepsilon x_3x_1 + \varepsilon^2 x_1x_2)]$$

ist, und diese f quadratische Formen sind, welche dieselbe Discriminante $= -c^2$ *besitzen.*

Zu diesem Resultat, welches theilweise schon bei Wiman, *Math. Ann.*, 47, 1896 zu finden ist, kommt Gerbaldi in seinem citirten neuesten Aufsatz.

Von den quaternären Formen kennt man nur einige *endliche* Gruppen linearer Transformationen; wir citiren Klein, *Math. Ann.*, 28, 29; Maschke, ib., 30, 33, 36.

Von Loewy und gleichzeitig von Moore wurde der folgende Satz gefunden:

Jede endliche Gruppe führt auch eine definite Hermite'sche Form (d. h. eine Form mit conjugirt complexen Variabelen und Coefficienten, welche für conjugirt complexe Werthe der Variabelen nur verschwindet, wenn alle Variabelen gleich Null gesetzt werden) in sich über. A. Loewy, *Compt. Rend.*, 1896; *Nova Acta Leop.*, 1898; *Math. Ann.*, 50; Moore, *Math. Ann.*, 50; F. Klein, *Deutsch. Math.-Verein.*, 1896. Verwandte Untersuchungen sind von Fuchs, *Berl. Ber.*, 1896; *Compt. Rend.*, 1896. Vergl. auch oben § 15 am Ende.

Ueber Ausdehnungen auf Transformationen, die nicht, wie bisher, linear, aber rational sind, siehe Maurer, *Crelle*, 107.

Kapitel XIII.

Die Functionen complexer Variabelen.

§ 1. Allgemeines.

Der Einfachheit und Bequemlichkeit wegen wollen wir uns die complexe Variabele $x + iy$ durch die Punkte einer Ebene auf die bekannte Art (vergl. S. 4 u. ff.) dargestellt denken.

Die complexe Variabele $X + iY$ nennt Cauchy (*Exerc. d'analyse* etc.) *eine monogene Function* und Riemann in seiner *Inauguraldissertation* schlechthin *eine Function* der complexen Variabelen $x + iy$, wenn X und Y in einem gewissen Theil der Ebene, deren Punkte die Coordinaten x und y haben, reelle stetige Functionen der beiden reellen Variabelen x und y sind, ihre ersten Ableitungen nach x und y wenigstens abtheilungsweise stetig sind und den beiden Relationen

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x}$$

genügen (die Cauchy'sche Definition); oder: wenn $w = X + iY$ in dem genannten Theil der Ebene derart von $z = x + iy$ abhängt, dass das Verhältniss der entsprechenden Zuwächse, d. h. also $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ einen bestimmten und einzigen Grenzwerth hat, auf welche Art auch Δz gegen Null convergiren mag, d. h. auf welche Art auch der Punkt, welcher durch die complexe Variabele

$$(x + \Delta x) + i(y + \Delta y)$$

dargestellt wird, sich dem durch $x + iy$ dargestellten Punkt nähern mag (die Riemann'sche Definition).

In § 2 dieses Kapitels werden wir die Definition der *analytischen Functionen* in dem Weierstrass'schen Sinn besprechen.

Wenn X, Y reelle Functionen der Variabelen x, y sind und jedem individuellen Werth von x, y *nur ein einziger Functionswerth* entspricht, so heisst die Function w *eindeutig* oder *monodrom (monotrop)*; wenn sie dagegen Functionen mit *mehreren* Werthen sind, so nennt man die Function w *mehrdeutig* oder *polydrom (polytrop)*.

In dem ersten Fall, wenn w eine Function von z ist und für den Variationsbereich von z, der in Betracht kommt, d. h. für alle Punkte z desjenigen Theils der Ebene, in welchem die Function betrachtet wird, w immer *endlich* ist, heisst die Function *holomorph* (nach Briot und Bouquet) oder *synectisch* oder auch *vom Charakter der ganzen Functionen;* wenn aber w in Punkten $z = P$ zwar unendlich gross wird, aber derart, dass immer eine Umgebung eines jeden dieser Punkte existirt, innerhalb welcher die Function $\frac{1}{w}$ holomorph ist, so sagt man, w sei *meromorph* und die Unendlichkeitspunkte seien *Pole* oder *ausserwesentlich singuläre Punkte.*

Die Punkte, in deren Umgebung die gegebene monogene Function immer *endlich* ist, pflegt man nach Weierstrass *reguläre Punkte* und die Function in dieser Umgebung *regulär* zu nennen.

Ein specieller Fall der holomorphen Function ist die *rationale ganze;* ein specieller Fall der meromorphen die *rationale,* und der monogenen die *algebraische* Function. Diese letztere lässt sich auf die allgemeinste Art folgendermassen definiren: nimmt man an, w und z seien durch eine rationale *ganze* Beziehung $\varphi(w, z) = 0$ miteinander verbunden, so ist w im Allgemeinen eine *mehrdeutige* Function von z; jede *allgemeine rationale* Function $F(w, z)$ der beiden Variabelen w und z ist alsdann *eine allgemeine algebraische Function* von z. Die algebraischen Functionen behandeln wir weiter unten in Kap. 15.

Jede *monogene nicht algebraische* Function ist eine *transcendente* Function.

Man sagt, $z = a$ sei *eine k-fache Wurzel oder ein k-facher Nullpunkt,* oder die eindeutige Function $f(z)$ verschwinde von der Ordnung k, wenn $f(a) = 0$ ist und $\frac{f(z)}{(z-a)^k}$ für $z = a$ weder Null noch unendlich gross wird.

Man sagt, $z = \infty$ sei *eine k-fache Wurzel oder ein k-facher Nullpunkt,* oder die eindeutige Function $f(z)$ verschwinde von der Ordnung k, wenn $f(\infty) = 0$ ist und $z^k f(z)$ für $z = \infty$ weder Null noch unendlich gross wird.

Man sagt ferner, $z = a$ sei *ein Pol k^{ter} Ordnung* von $f(z)$, wenn $\frac{1}{f(z)}$ den Punkt $z = a$ zum Nullpunkt von der k^{ten} Ordnung hat.

Wenn w eine eindeutige Function von z ist, so genügen sowohl der reelle Theil X als der Coefficient Y des imaginären Theils der (Laplace'schen) Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Jede Function der beiden reellen Variabelen x und y, die der Laplace'schen Gleichung genügt, pflegt man *Potentialfunction* oder auch *harmonische Function* zu nennen.

Wenn umgekehrt X und Y stetige Functionen von x und y sind und dieser Differentialgleichung genügen, so können sie den reellen Theil und den Coefficienten des imaginären Theils einer eindeutigen Function bilden.

Ist der reelle Theil von w gegeben, so ist der imaginäre Theil bis auf eine Constante bestimmt.

Stellt man auf die bekannte Art die Werthe der complexen Variabelen w durch die Punkte einer Ebene (der Ebene w) dar, so wird dadurch eine Zuordnung zwischen den Punkten der Ebene w und denen der Ebene z hergestellt. Man sagt, die Ebene z werde auf die Ebene w *abgebildet*.

Betrachten wir einen Theil der Ebene z, in welchem die Function w *eindeutig* ist, so wird einem Punkt z ein Punkt w und einer stetigen Linie in dem Bereich z eine stetige Linie in dem Bereich w entsprechen. Die *Abbildung* besitzt in diesem Fall die folgende bemerkenswerthe Eigenschaft:

Der Winkel, unter welchem sich zwei Linien in einem Punkt der Ebene z schneiden, ist dem Winkel gleich, unter welchem sich die entsprechenden Linien in dem entsprechenden Punkt der Ebene w treffen.

Eine solche Abbildung heisst *conform*, Gauss, *Ges. Werke.* 4, S. 262, oder *isogonal* (siehe Bd. 2 dieses Werkes, Kap. 16, § 8), oder *winkeltreu*, oder auch nach der Bezeichnung der Engländer eine *orthomorphe Transformation* (Cayley).

Ein unendlich kleines Dreieck der Ebene z ist dem entsprechenden unendlichkleinen Dreieck der Ebene w bis auf Unendlichkleine höherer Ordnung ähnlich.

In den Punkten, in welchen $\frac{dw}{dz} = 0$ *ist, versagt die conforme Abbildung.*

Die Linien der Ebene z, für welche X constant ist, heissen *Niveaulinien,* diejenigen, für welche Y constant ist, *Stromcurven* und beide zusammen *Aequipotentiallinien oder Linien gleichen Potentials.*

Die Niveaulinien stehen senkrecht auf den Stromcurven.

Statt die complexe Variabele auf einer Ebene darzustellen, kann man auch eine Kugel benutzen und die Punkte der Ebene stereographisch auf die Kugel projiciren. Man hat dann den Vortheil, dass der unendlich ferne Punkt ein einziger Punkt auf der Kugel wird.

Diese Darstellung auf der Kugel hat besonders C. Neumann, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale,* Leipzig 1865, 2. Aufl. 1884 angewendet. Man hat die Kugel desshalb wohl auch die *Neumann'sche Kugel* genannt.

§ 2. Weiteres über die Definition der Functionen complexer Variabelen; die analytischen Functionen von Weierstrass.

Wir haben in dem vorhergebenden Paragraphen die Functionen complexer Variabelen auf specielle Art definirt und so Functionen erhalten, die man *monogen* nennt. Die Grundeigenschaft dieser Functionen besteht darin, dass sie in jedem Punkt eine einzige Derivirte haben, d. h. dass die Grenze des Zuwachsverhältnisses von der Art, auf welche der Zuwachs der unabhängigen Variabelen der Null zustrebt, nicht abhängt.

Selbstverständlich könnte man aber die Function der complexen Variabelen von einem allgemeineren Gesichtspunkt auffassen, d. h. man könnte sagen, eine beliebige reelle oder complexe Variabele sei immer dann eine Function von

$$z = x + iy,$$

wenn sie für jeden in einem gewissen Bereiche gelegenen Werth von z einen bestimmten Werth hat; alsdann lässt sich jede beliebige reelle oder complexe Function der *beiden* Variabelen x und y als Function der complexen Variabelen ansehen; denn bei gegebenem z ist der Werth von x und der von y eindeutig gegeben und mithin der Werth der Function von x und y bestimmt. Es bleibt dann zu untersuchen, unter welchen Bedingungen eine solche Function stetig und derivirbar ist. Auch

in diesem allgemeinen Sinn kann man die Functionen complexer Variabelen in die Analysis einführen; siehe z. B. Stolz, *Vorl. üb. allg. Arithm.*, 2, Leipzig 1886 und *Grundzüge der Different.- u. Integr.-Rechn.*, 2, Leipzig 1896; will man dann die *Derivirbarkeit* einführen, so kommt man zu den *monogenen* Functionen; um daher diese letzteren zu erhalten, benutzen wir den Begriff der *Derivirbarkeit*, nicht aber den der *analytischen Darstellung*. von welchem der Begriff der *monogenen Function* noch unabhängig bleibt.

Alsdann erkennt man aber, dass man auch anders verfahren kann, dass man den zweiten Begriff in der Art einführen kann, dass sich der erste als Folge aus ihm ergibt. Auf diese Weise erhält man die *analytischen monogenen Functionen von Weierstrass, Berl. Abh.*, 1876 oder *Functionenlehre*, Berl. 1886.

Wir wollen eine Reihe ganzer positiver Potenzen der Grösse $(z - z_0)$ betrachten, deren wahrer Convergenzkreis um z_0 den Radius R hat; wir wollen einen Punkt z_1 im Innern oder auf der Peripherie der Kreisfläche annehmen und die Reihe in eine andere auf den Punkt z_1 bezogene transformiren (siehe Kap. IV, § 3); die neue Reihe convergirt dann in einem Kreis um z_1, der innerhalb des wahren Convergenzkreises um z_0 liegt. Es kann aber unter Umständen der wahre Convergenzkreis um z_1 auch noch einen grösseren Bereich bedecken, als denjenigen, der ganz innerhalb des wahren Convergenzkreises um z_0 liegt. In diesem Fall ist der Radius R_1 des wahren Convergenzkreises um z_1 grösser als $R - | z_1 - z_0 |$. Tritt das Letztere ein, so wird die ursprüngliche Function auf einen Bereich ausgedehnt, über den die frühere gegebene Reihe sich nicht erstreckte; für alle Punkte z_1, für welche die neue Reihe in einem grösseren Bereich convergirt, als derjenige ist, auf den die ursprüngliche Reihe sich erstreckte, bezeichnet man die neue Reihe als *analytische Fortsetzung der früheren.* Fährt man mittelst des Princips der analytischen Fortsetzung so fort, so lässt sich die ursprüngliche Function in einen ausgedehnteren Bereich *fortsetzen;* die Gesammtheit aller dieser durch die verschiedenen Reihen dargestellten Functionen bildet eine einzige Function, welche Weierstrass *eine analytische monogene Function* genannt hat. Die Derivirbarkeit solcher Functionen ist infolge der Derivirbarkeit der Potenzreihen gesichert. Offenbar kann man sich bei geeigneter Auswahl der verschiedenen Centren der verschiedenen aufeinander folgenden Kreise denken, man erreiche auf verschiedenen Wegen den nämlichen Punkt; wenn sich nun, auf welchem Weg man

auch zu diesem Punkt gelangen möge, immer derselbe Werth der Function ergibt, so ist die Function *monodrom*, sonst *polydrom*.

Die ursprüngliche Reihe, aus welcher alle anderen Reihen durch die Methode der analytischen Fortsetzung hervorgehen, und welche den anfänglichen Bereich nach und nach ausdehnen, pflegt man *das ursprüngliche oder primitive Element der analytischen Function* zu nennen. Die Gesammtheit aller Stellen, für welche die ursprüngliche analytische Function oder die durch analytische Fortsetzung gewonnenen Reihen convergiren, heisst *der Stetigkeitsbereich der Function*. Als *Grenzstellen des Stetigkeitsbereichs* bezeichnet man sämmtliche Punkte, über welche hinaus die Potenzreihe nicht durch die Methode der analytischen Fortsetzung fortgesetzt werden kann. Die Grenzstellen des Stetigkeitsbereichs der eindeutigen Function können *isolirte Punkte* oder auch *Gruppen unendlich vieler Punkte* sein oder *Linien* bilden.

Sie heissen *singuläre Punkte* bez. *singuläre Linien*.

Wenn eine singuläre Linie einen Bereich umschliesst, in dessen Inneres sich die analytische Function nicht fortsetzen lässt, so erhält man sogenannte *Functionen mit natürlicher Grenze (Fonctions à éspaces lacunaires)*, siehe unten.

Eine analytische Function in dem hier entwickelten Sinn ist selbstverständlich stets monogen in dem Sinn des § 1. Dagegen ist die monogene Function des § 1 nicht immer eine analytische; sie kann, wie wir sehen werden, in der Umgebung gewisser Punkte in Potenzreihen entwickelt werden und fällt daher in dem Convergenzbereiche dieser Reihen mit einer analytischen Function zusammen; es kann aber vorkommen, dass entweder die analytische Function sich nicht über diesen Bereich hinaus fortsetzen lässt, während die monogene Function auch ausserhalb dieses Bereiches existirt, oder auch, dass sie sich zwar fortsetzen lässt, aber ausserhalb des genannten Bereichs nicht dieselben Werthe liefert, wie die monogene Function.

Beispiele zu der letzten Bemerkung findet man bei Tannery, *Berl. Akad.*, 1881; Schröder, *Schlömilch's math. Zeitschr.*, 22, 1876; Pringsheim, *Math. Ann.*, 22, 1883 und Anderen.

Ueber die Weierstrass'schen analytischen Functionen siehe Weierstrass, *Functionenlehre*, Berlin 1886; Pincherle, *Giorn. di Batt.*, 18; Biermann, *Theorie d. analyt. Funct.*, Leipzig 1887; Forsyth, *Theory of functions*, Cambridge 1893.

Die hauptsächlichsten Arbeiten über die Functionen mit natürlicher Grenze sind: Poincaré, *Acta soc. Fennicae*, Bd. 12,

1883; Appell, *Acta Math.*, 1, 1882; Goursat, *Compt. Rend.*, 94, 1882; *Bull. des Scienc. Math.*, 11, 1887; Lerch, *Böhm. Abh.*, 1888; *Journal de Teixeira,* 1892; Stieltjes, *Bull. des Scienc. Math.*, 11, 1887; etc. Der erste, welcher die Functionen mit natürlicher Grenze einführte, war Weierstrass, *Berl. Monatsber.*, 1866, S. 617; eines der ersten Beispiele findet man bei Hankel, *Programm,* Tübingen 1870, wieder abgedruckt in den *Math. Ann.*, 20; siehe auch Schwarz, *Abhandl.*, 2, S. 240—242.

§ 3. Die einfachsten transcendenten Functionen.

Die Function e^z wird, wenn z eine allgemeine complexe Zahl bedeutet, durch den Werth der Reihe definirt:

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots,$$

die für jedes z convergirt.

Die durch $e^z \cdot e^{z_1} = e^{z+z_1}$ ausgedrückte Eigenschaft bleibt auch für complexe Werthe von z und z_1 bestehen, ebenso die Eigenschaft $\frac{d}{dz}\, e^z = e^z$.

Die Functionen $\cos z$, $\sin z$, deren Argument z eine complexe Zahl ist, werden durch die Formeln definirt:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots.$$

Die Formeln in Bezug auf das Additionstheorem für die Sinus- und Cosinusfunction und die von ihnen abhängigen Formeln bleiben auch für complexe Argumente unverändert. Siehe Kap. 18, § 2.

Es besteht die Grundformel:

$$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Die Function e^z ist periodisch, d. h. sie nimmt wieder den nämlichen Werth an, wenn z um $2k\pi i$ vermehrt wird, worin k eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Jede Wurzel der Gleichung $e^z = A + iB$ heisst *der natürliche oder*, nach Napier, *Neper'sche Logarithmus der complexen Zahl $A + iB$. Die Gleichung hat unendlich viele Wurzeln, die im Allgemeinen sämmtlich complex sind; sie lassen sich durch*

Hinzufügen einer Zahl von der Form $2k\pi i$, *worin* k *eine ganze Zahl ist, auseinander ableiten*. Man pflegt denjenigen Werth *den Hauptwerth des natürlichen Logarithmus* zu nennen, bei welchem der Coefficient von i zwischen $-\pi$ und $+\pi$ ($+\pi$ eingeschlossen) liegt und ihn mit $\log_e(A + iB)$ zu bezeichnen. Siehe Kap. 18, § 1.

Die Function a^z *wird* durch die Formel *definirt:*

$$a^z = e^{z(\log_e a + 2k\pi i)}.$$

Auch a^z kann daher im Allgemeinen unendlich viele Werthe haben; wir werden nur den Werth in Betracht ziehen, welcher $k = 0$ entspricht, und ihn den *Hauptwerth der Potenz* nennen. *Setzt man* $z = x + iy$, $a = \varrho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, *so wird*

$$a^z = \varrho^x[\cos x(\alpha + 2k\pi) + i\sin x(\alpha + 2k\pi)] \times$$
$$\times\, e^{-y(\alpha+2k\pi)}[\cos(y\log_e\varrho) + i\sin(y\log_e\varrho)].$$

Wenn man unter a^z nur den Hauptwerth dieser Potenz verstehen will, so gelten für a^z *nicht mehr* die Grundeigenschaften für die Potenzen:

$$a^z \cdot a^{z_1} = a^{z+z_1};\quad (a^z)^{z_1} = a^{zz_1};\quad \log a^z = z\log a,$$

weil der Hauptwerth z. B. von $(a^z)^{z_1}$ *einer* der Werthe von a^{zz_1} ist, aber nicht der Hauptwerth von a^{zz_1} sein muss, etc.

Verschiedene Definitionen der Exponential- und logarithmischen Functionen findet man z. B. bei Durège, *Th. der Funct. einer compl. ver. Gr.*, Leipzig 1864, Kap. 5; eine eingehende Darstellung geben Briot et Bouquet, *Théor. des fonct. doublement périod. et en part. des fonct. ellipt.*, Paris 1859, Kap. 2; Stolz, *Arithm.*, 2 und *Grundzüge der Diff.- u. Integralrechn.*, 2; siehe auch weiter unten Kap. 18.

§ 4. Grenze, Stetigkeit, Differentiation und Integration in dem complexen Bereich.

Die Definitionen und Grundtheoreme über Grenze und Stetigkeit gelten auch für complexe Functionen complexer Variabelen; man braucht an den betreffenden Stellen nur statt des Ausdrucks *absoluter Werth* das Wort *Modul* zu setzen.

Die *Derivirte* wird, wie schon gesagt wurde, auf die übliche Art als die Grenze des Zuwachsverhältnisses definirt, und man kann zeigen, dass die Sätze über die Differentiation der Aggregate, Producte, Quotienten, der zusammengesetzten und umgekehrten Functionen etc. unverändert bleiben, und dass auch die Regeln

über die Differentiation der elementaren Functionen ihre Gültigkeit behalten.

Bemerkenswerth ist der Satz: *Die Existenz der ersten Derivirten einer monogenen Function mit complexer Variabele hat diejenige der Derivirten beliebiger Ordnung zur Folge.*

Wenn eine eindeutige Function in einem Punkt, der nicht im Unendlichgrossen liegt (der Unendlichkeitspunkt ist), von k^{ter} Ordnung verschwindet, vergl. S. 349, *so verschwindet ihre Derivirte von $(k-1)^{ter}$ Ordnung; liegt dagegen der Punkt im Unendlichen, so verschwindet ihre Derivirte für $z=\infty$ von $(k+1)^{ter}$ Ordnung.*

Wenn eine eindeutige Function in einem Punkt in endlichem Abstand einen Pol k^{ter} Ordnung besitzt, so hat ihre Derivirte in diesem Punkt einen Pol $(k+1)^{ter}$ Ordnung; liegt der Punkt im Unendlichen, so hat die Derivirte einen Pol $(k-1)^{ter}$ Ordnung.

In Bezug auf die *Integration* sind einige Betrachtungen nöthig.

Bei reellen Variabelen liegt der *Integrationsweg* fest, wie es nicht anders möglich ist, weil sich die Variabele immer längs der reellen Axe bewegen muss. In der complexen Ebene dagegen bestimmen wir zwei Punkte und eine Linie, welche sie verbindet. Wir theilen diese Linie in n Strecken und $\delta_1, \delta_2, \cdots$ seien die Unterschiede zwischen den complexen Variabelen, welche durch die successiven Theilungspunkte dargestellt werden. Wenn $f_1, f_2, \cdots$ Werthe von f in Punkten der Linie sind, welche zwischen den successiven Theilungspunkten liegen, so ist die Grenze der Summirung $\sum f_n \delta_n$, wenn $\delta_1, \delta_2, \cdots$ der Null zustreben, während n in das Unendliche wächst, *das bestimmte Integral der Function.* Lässt man die obere Grenze des Integrals variiren, so erhält man die *Integralfunction.* Hier bietet sich nun etwas Neues, was bei den reellen Variabelen nicht vorkam, dass man nämlich in unendlich vielen Richtungen zu einem Punkt gelangen kann, während man bei reellen Variabelen, wenn der Durchgang durch das Unendlichgrosse ausgeschlossen wird, von einem Punkt ausgehend, nur in *einer* Richtung zu einem anderen Punkt kommt.

Das Integral einer monogenen Function ist wieder eine monogene Function. Es ist ferner monodrom oder polydrom je nach der Beschaffenheit der gegebenen Function. Insbesondere gilt:

Wenn die gegebene Function in einem einfach begrenzten Bereich d. h. innerhalb einer von einer geschlossenen Curve um-

gebenen Fläche monogen, monodrom und holomorph ist, so hat das Integral in einem Punkt immer den nämlichen Werth, welchen Weg man auch einschlagen mag, um zu diesem Punkt zu gelangen. Dieses Theorem heisst das Cauchy'sche; wir kommen im nächsten Paragraphen bei der Besprechung der verschiedenen Sätze über die monogenen Functionen auf dasselbe zurück.

Alle, auch die geringfügigsten Einzelheiten über den Inhalt dieses Paragraphen, d. h. über die Ausdehnung der gewöhnlichen Rechnungsoperationen auf das Gebiet der complexen Variabelen findet man in dem 2. Thl. des Stolz'schen Buches: *Grundzüge der Diff.- u. Integralrechnung*, Leipzig 1896.

§ 5. Verschiedene Sätze über die monogenen, holomorphen und meromorphen Functionen.

Die Derivirten einer in einem Bereich holomorphen Function können in einem Punkt nicht sämmtlich Null sein, ohne dass die Function in dem ganzen Bereich constant ist.

Jede in einem Bereich holomorphe und für alle Punkte einer noch so kleinen Linie constante Function ist in dem ganzen Bereich constant.

Alle Derivirten einer in einem Bereich holomorphen Function sind ebenfalls holomorph.

Jede in einem endlichen Bereich holomorphe Function hat nur Wurzeln von endlichem und ganzem Grad und von begrenzter Anzahl.

Wenn eine Function in einem Bereich meromorph ist, so kann sie nicht mit allen ihren Derivirten in einem Punkt Null werden.

Die Wurzeln und Pole jeder in einem endlichen Bereich meromorphen Function sind von endlichem ganzen Grad und endlicher Anzahl.

Eine in einem Bereich meromorphe Function ist einer rationalen Function, vermehrt um eine holomorphe Function, in demselben Bereich gleich. Sind a_1, a_2, $\cdots$ die Pole i_1^{ter}, i_2^{ter}, $\cdots$ Ordnung der gegebenen Function und wird die rationale Function in einfache Brüche zerlegt (siehe S. 14), so erhält man einen Ausdruck mit einer Anzahl Brüche vom Typus:

$$\frac{A_{i_1}}{(z-a_1)^{i_1}} + \cdots + \frac{A_1}{(z-a_1)} + \cdots.$$

Die Constanten $A_1, B_1, \cdots$, d. h. die Zähler der Brüche, deren Nenner die ersten Potenzen der Binome $(z - a_1)$, $(z - a_2), \cdots$ sind, heissen *Residuen* der Function (Cauchy).

Wenn eine in der ganzen Ebene holomorphe Function die Beschaffenheit hat, dass ihr Modul immer unterhalb einer gegebenen Zahl bleibt, so ist sie constant.

Jede in der ganzen Ebene holomorphe Function, welche nur den einzigen Pol $z = \infty$ hat, ist eine rationale ganze Function.

Jede in der ganzen Ebene (auch für $z = \infty$) meromorphe Function ist rational und kann daher nur Wurzeln und Pole in endlicher Anzahl und von endlichem Grad haben.

Ist eine Function $f(z)$ in einem einfach zusammenhängenden Bereich (siehe Bd. 2, Kap. 18, § 1) *holomorph, so ist das über eine geschlossene in dem Bereich enthaltene Curve erstreckte Integral $\int f(z)\,dz$ Null (das Cauchy'sche Theorem).* Vergl. die Literaturangaben am Ende des § 6.

Werden dieselben Voraussetzungen gemacht, so hat das Integral $\int f(z)\,dz$ einen Werth, der nur von den Grenzpunkten und nicht von dem Integrationsweg abhängt.

Wenn $f(z)$ in einem Bereich mit nicht einfacher Begrenzung holomorph ist, so behält das Integral $\int f(z)\,dz$, wenn es durch eine geschlossene Curve von einem Punkt aus bis zu einem anderen oder von einem Punkt aus wieder zu demselben Punkt zurück erstreckt wird, bei der Aenderung des Integrationsweges einen unveränderlichen Werth; nur muss sich der neue Weg durch stetige Deformation aus dem alten ableiten lassen, und immer in allen Zwischenstadien der Deformation in dem Inneren des Bereichs bleiben, ohne jemals seine Begrenzung zu treffen.

Man sagt, der Rand eines Bereichs werde in *positivem* Sinn durchlaufen, wenn dabei der Bereich zur Linken bleibt.

Wenn eine Function in einem ringförmig gestalteten Bereich, d. h. in einem solchen mit zwei Umfängen, dessen einer innerhalb des anderen liegt, holomorph ist, so kommt ihr über den äusseren Rand in positivem Sinn erstrecktes Integral dem über den inneren im negativen Sinn erstreckten Integral gleich.

Wenn eine Function in einem Stück der Ebene mit einfacher Begrenzung (d. h. in einem einfach zusammenhängenden Bereich, vergl. Bd. 2, Kap. 18, § 1) *holomorph ist, so lässt sich ihr Werth in einem Punkt $z = a$ durch das Integral ausdrücken:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z - a}\,dz,$$

welches in positiver Richtung über den Umfang der Fläche erstreckt wird.

Ist $f(z)$ in einem Bereich mit einfacher Begrenzung meromorph, so ist das über den Umfang in positivem Sinn erstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz$$

der Summe der Residuen der Function in Bezug auf die in dem Bereich gelegenen Pole gleich.

Ist $f(z)$ in einem Bereich meromorph und sind in ihm ihre Nullpunkte von der $m_0{}^{\text{ten}}$, $m_0'{}^{\text{ten}}$, $\cdots$ und ihre Unendlichkeitspunkte von der $m_\infty{}^{\text{ten}}$, $m_\infty'{}^{\text{ten}}$, $\cdots$ Ordnung, so wird

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum m_0 - \sum m_\infty,$$

worin das Integral in positivem Sinn über die Umgrenzung des Bereichs zu erstrecken ist. Dieser Satz lässt sich auch so fassen:

$f(z)$ sei in einem einfach begrenzten Bereich meromorph und werde in einem Punkt des Umfangs betrachtet; durchläuft man nun diesen Umfang in positivem Sinn und berechnet die Aenderung, welche bei der Rückkehr zum Ausgangspunkt das Argument erlitten hat, so ergibt sich, dass die Differenz zwischen den beiden Werthen des Arguments ein ganzes Vielfaches k von 2π ist, wenn $k = \sum m_0 - \sum m_\infty$ gesetzt wird. Casorati, *Teorica d. funzioni di variab. complesse,* Pavia 1868, S. 430.

Bei einer in der ganzen Ebene meromorphen Function ist die Anzahl der Nullpunkte der Anzahl der Unendlichkeitspunkte gleich, wenn man einen Nullpunkt oder einen Unendlichkeitspunkt von der Ordnung i als Superposition von i Nullpunkten oder i Unendlichkeitspunkten ansieht. Daraus folgt leicht der Fundamentalsatz der Algebra, dass die Anzahl der Wurzeln eines jeden rationalen ganzen Polynoms der Zahl gleich ist, welche den Grad des Polynoms angibt.

Jede in einem Kreis, welcher zum Centrum einen Punkt z_0 hat, holomorphe Function lässt sich in eine Reihe von ganzen positiven Potenzen des Binoms $(z - z_0)$ entwickeln und convergirt in diesem Kreis. Einer solchen Reihe lässt sich entweder die Cauchy'sche Gestalt geben, Acc. Torino, 1831, 1832; *Compt. Rend.,* 1846; *Exercises d'Analyse et de Physique Math.,* Bd. 2, S. 50 u. ff., nämlich:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} + (z - z_0)\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^2} + \\ + (z - z_0)^2 \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^3} + \cdots,$$

worin die Integrale in positivem Sinn über den Umfang des Kreises oder eines beliebigen anderen concentrischen und in dem Bereich enthaltenen Kreises zu erstrecken sind, oder auch die Taylor-Maclaurin'sche Gestalt:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\frac{f'(z_0)}{1!} + (z - z_0)^2 \frac{f''(z_0)}{2!} + \cdots.$$

Wenn eine Function in einem ringförmigen, zwischen zwei concentrischen Kreisen mit dem Mittelpunkt z_0 liegenden Bereich holomorph ist, so lässt sie sich in eine in diesem Bereich convergente Reihe von positiven und negativen Potenzen des Binoms $z - z_0$ entwickeln; man erhält die Laurent'sche Reihe, Compt. Rend., 1843, Bd. 17, S. 939:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{-\infty}^{+\infty}(z - z_0)^n \int \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^n},$$

worin das Integral immer in positivem Sinn über einen der Kreise oder auch über einen anderen concentrischen in dem Ring enthaltenen Kreis erstreckt werden muss.

§ 6. Die wesentlich singulären Punkte.

Nehmen wir an, eine Function sei in der ganzen Ebene bestimmt; wenn sie auch im Unendlichen keine anderen singulären Punkte als die *Pole* besitzt, d. h. die Punkte, in denen ihre Umkehrung eindeutig bleibt und den Werth Null hat, wenn sie also in der ganzen Ebene in dem Sinn des § 1 sich meromorph verhält, so ist sie, wie wir wissen, eine *rationale* Function.

Liegt aber eine *transcendente* in der ganzen Ebene definirte Function vor, so müssen in der Ebene Punkte vorhanden sein, in welchen weder sie noch ihre Umkehrung *eindeutig* bleibt; diese Punkte heissen *wesentlich singulär* (Weierstrass). Dass isolirte Punkte von solcher Singularität existiren können, davon kann man sich sofort überzeugen, wenn man eine der einfachsten transcendenten Functionen z. B. die Exponentialfunction betrachtet.

Wenn eine Function in einem Punkt eine wesentliche Singularität hat, so besitzt auch ihre Umkehrung denselben Punkt als wesentlich singulären Punkt.

Die Grenze der Function, wenn die Variabele sich auf irgend eine Art dem wesentlich singulären Punkt nähert, ist unbestimmt.

Wenn man sich mit der Variabelen dem wesentlich singulären Punkt nähert, so kann man es so einrichten, dass der Modul der Differenz zwischen dem Werth der Function und einem beliebigen gegebenen Werth A kleiner als jede bestimmbare Grösse wird.

Wenn eine beliebige Grösse A gegeben ist, so kann man im Allgemeinen in einer Umgebung des wesentlich singulären Punktes a immer unendlich viele Punkte finden, in welchen der Werth der Function A ist; es können jedoch zwei (und nicht mehr als zwei) Ausnahmswerthe von A existiren, für welche es keinen Punkt in der Umgebung von a gibt, in dem der Werth der Function gleich A wird. Das Picard'sche Theorem, Compt. Rend., Bd. 88, 89; *Ann. de l'Éc. norm.*, 1880.

Nach diesem letzteren Theorem lassen sich die wesentlich singulären Punkte in drei Kategorien eintheilen: 1) solche, für welche Ausnahmswerthe von A in dem eben angegebenen Sinn nicht existiren; 2) solche, für die *ein einziger* existirt, wie z. B. der Punkt $z = 0$ für die Function

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{z}},$$

in welchem Fall $A = 0$ der Ausnahmswerth von A ist; und 3) diejenigen, für die es zwei solche Werthe gibt, wie z. B. der Punkt $z = 0$ der Function $e^{\frac{1}{z}}$, wobei die Ausnahmswerthe von A

$$A = 0, \quad A = \infty \quad \text{sind.}$$

Eine eindeutige Function, welche unendlich viele Pole besitzt, lässt als wesentlich singulären Punkt deren Grenzpunkt zu.

Jede Function, die keinen Unendlichkeitspunkt in endlichem Abstand in der ganzen Ebene hat, ist eine *ganze oder holomorphe (synectische)* Function in der ganzen Ebene bis auf den im Unendlichen liegenden Punkt; wenn sie im Unendlichen keinen *Pol* hat, so kann sie kein ganzes Polynom sein, sondern ist eine *ganze* transcendente Function und *hat einen Punkt von wesentlicher Singularität im Unendlichen. Sie lässt sich in eine*

für jeden beliebigen Punkt der Ebene convergente Reihe von ganzen positiven Potenzen entwickeln.

Eine solche Function kann unendlich viele Nullpunkte in endlichem Abstand haben.

Die Frage nach dem allgemeinen Ausdruck für eine so gestaltete Function, wenn ihre Nullpunkte festliegen, beantwortet das berühmte Weierstrass'sche Theorem, *Berl. Akad.*, 1876; *Functionenlehre*, Berlin 1886, welches eine Verallgemeinerung des Satzes ist, zu dem früher schon Cauchy gekommen war.

Das Cauchy'sche Theorem lautet:

Wenn $a_1, a_2, \cdots$ *die Nullpunkte der Function sind,* $\lim_{n=\infty} a_n = \infty$ *ist, und wenn die Reihe* $\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|$ *convergirt, so hat die Function, welche als Nullpunkte nur die gegebenen Punkte, keinen Pol und nur den Punkt im Unendlichen als wesentlich singulären Punkt besitzt, die Gestalt:*

$$f(z) = c \cdot e^{G(z)} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

worin $G(z)$ *seinerseits eine in der ganzen Ebene holomorphe Function ist.*

Die Weierstrass'sche Verallgemeinerung dagegen lautet: *Auch wenn die Reihe* $\sum \left|\frac{1}{a_n}\right|$ *nicht convergirt, so kann man doch immer eine ganze positive Zahl* ω, *die entweder fest ist oder mit* n *variirt, so wählen, dass die Reihe*

$$\sum_n \frac{z^\omega}{a_n^\omega (z - a_n)}$$

in jedem beliebigen endlichen Theil der Ebene gleichmässig convergirt; man erhält alsdann die Formel

$$f(z) = c \cdot e^{G(z)} \prod_1^\infty \left[\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{P_\omega\left(\frac{z}{a_n}\right)}\right],$$

worin

$$P_\omega\left(\frac{z}{a_n}\right) = \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \cdots + \frac{z^\omega}{\omega a_n^\omega} \quad ist.$$

In jedem Fall genügt die Zahl $\omega = n - 1$ *der angegebenen Bedingung.*

Der Factor $\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{P_\omega\left(\frac{z}{a_n}\right)}$ heisst eine *Primfunction*. In den vorstehenden Theoremen ist angenommen, der Nullpunkt komme unter den Punkten a_n nicht vor; ist dies dagegen k mal der Fall, so füge man zu dem ganzen Product als Factor die Grösse z^k hinzu.

Wenn ω festliegt, so erhält man die sogenannten holomorphen Functionen, welche ein bestimmtes *Geschlecht* haben; die Zahl ω heisst ihr Geschlecht, wenn sie mit n nicht variirt und der kleinste unter allen Werthen von ω ist, welche der angegebenen Bedingung genügen. Laguerre, *Compt. Rend.*, Bd. 94, 95, 98; Cesàro, *Compt. Rend.*, Bd. 98 etc.

Eine in der ganzen Ebene eindeutige Function, welche in endlichem Abstand nur Pole hat, ist immer der Quotient zweier ganzen Functionen; man kann daher mittelst der vorstehenden Formel auch eine Darstellung einer solchen Function erhalten.

Wenn man auf ähnliche Weise eine in der ganzen Ebene (auch im Unendlichen) eindeutige Function darstellen will, die nur den einen Punkt $z = a$ von wesentlicher Singularität im Endlichen besitzt, so genügt es, eine der vorstehenden ähnliche Formel anzuwenden, indem man an die Stelle von $\frac{z}{a_n}$ den Ausdruck $\frac{a_n - a}{z - a}$ setzt.

Zusätze zu dem vorstehenden Theorem sind die folgenden:

Eine eindeutige Function, welche weder Nullpunkte noch Pole in endlichem Abstand besitzt, und für die der Punkt im Unendlichen ein Punkt von wesentlicher Singularität ist, hat die Gestalt $e^{G(z)}$, worin $G(z)$ eine ganze Function bezeichnet.

Jede eindeutige Function, die in endlichem Abstand eine endliche Anzahl von Nullpunkten, aber keine Pole hat, und für die der Punkt im Unendlichen der einzige Punkt von wesentlicher Singularität ist, hat die Form:

$$P(z)\, e^{G(z)},$$

worin $P(z)$ ein Polynom bedeutet.

Eine eindeutige Function, welche eine endliche Anzahl von Nullpunkten und eine endliche Zahl von Polen besitzt, und für die der Punkt im Unendlichen der einzige wesentlich singuläre Punkt ist, hat die Form

$$\frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{G(z)},$$

worin P und Q zwei Polynome sind.

Mit Hülfe desselben Verfahrens, welches zum Beweis der Weierstrass'schen Formel dient, lässt sich auch eine Function, welche in der ganzen Ebene *unendlich viele Pole* besitzt, deren Grenzpunkt der Unendlichkeitspunkt ist, durch die Summe einer holomorphen Function und einer in der ganzen Ebene convergenten Reihe ausdrücken; dabei muss jedoch jeder Term dieser Reihe eine rationale Function von z sein, deren einziger Pol einer der Pole der gegebenen Function ist. Man erhält so eine andere Darstellung einer Function mit unendlich vielen Polen, die von der Form eines Quotienten von Producten verschieden ist.

Diese Formel wird durch das Mittag-Leffler'sche Theorem auf den Fall ausgedehnt, in welchem unendlich viele wesentliche Singularitäten statt Pole vorkommen.

Das Weierstrass'sche Theorem liefert den Ausdruck für eine eindeutige Function, welche nur *einen einzigen Punkt* von wesentlicher Singularität besitzt.

Es entsteht nun aber die Frage, ob sich nicht auch eine Function mit *einer endlichen oder einer unendlichgrossen Anzahl von wesentlichen Singularitäten darstellen lasse.*

Einen solchen Ausdruck kann man immer als Summe einer Anzahl von Functionen erhalten, von denen jede nur eine einzige wesentliche Singularität besitzt.

Man kommt so zu einer Erweiterung des Satzes über die Zerlegung einer rationalen Function in einfache Brüche:

Jede Function, welche in der ganzen Ebene bis auf eine endliche Anzahl von Punkten $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *in welchen sie entweder Pole oder wesentliche Singularitäten hat, eindeutig und holomorph ist, lässt sich immer als Summe von* n *Functionen ausdrücken, von denen jede als einzigen Pol bez. wesentliche Singularität einen einzigen der gegebenen Punkte hat. Wenn einer der gegebenen Punkte* a *der Unendlichkeitspunkt ist, so wird eine dieser Functionen eine in der ganzen Ebene holomorphe Function, deren singulärer Punkt der Unendlichkeitspunkt ist.*

Wenn unendlich viele Punkte $a_1, a_2, \cdots$ *gegeben sind, die zum einzigen Grenzpunkt den Punkt im Unendlichen haben, so lässt sich eine Function, welche diese Punkte zu alleinigen Punkten wesentlicher Singularität (oder, wenn man will, auch zu Polen) hat, durch eine Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[G_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - F_n(z)\right] + G(z)$$

ausdrücken, worin die G_n Functionen sind, die zum einzigen singulären Punkt den Punkt a_n haben, und die F_n Polynome in z bedeuten, deren Grade sich immer bestimmen lassen, während G eine in der ganzen Ebene holomorphe Function bezeichnet, deren wesentlich singulärer Punkt der Punkt im Unendlichen ist. Theorem von Mittag-Leffler.

Die Polynome F und die Function G sind nicht eindeutig bestimmt.

Wenn alle Punkte a Pole sind, so werden selbstverständlich die verschiedenen Terme der Reihe sämmtlich rationale Functionen.

Ueber diese Theoreme sehe man nach: Mittag-Leffler, *Compt. Rend.*, 1882; *Acta math.*, 4; Weierstrass, *Functionenlehre*, S. 23, 67, 102 (s. u.); Hermite, *Acta Soc. Fennicae*, 12, S. 67; *Crelle*, 91; Casorati, *Ann. di mat.*, 10; ferner die Lehrbücher von Forsyth, Cambridge 1893 (s. u.), in welchen das Problem mit vielen Einzelheiten und speciellen Fällen behandelt wird und die Vorlesungen über Analysis von Hermite, *Cours de M. Hermite*, rédigé en 1882 par M. Andoyer, Paris 1891, 4. éd. und Picard, *Traité d'analyse*, Paris 1891, 1893, 1896. Den Fall, in welchem nicht Singularitätspunkte, sondern Singularitätslinien auftreten, hat Picard, *Compt. Rend.*, 1881 untersucht.

Andere Arbeiten ausser den bereits citirten von Picard, Laguerre etc. sind: Guichard, *Thèse*, Paris 1882; *Ann. de l'Éc. norm.*, 1882; Poincaré, *Bull. Soc. math.*, 11, 1883; Hadamard, *Journ. de math.*, 1893; Borel, *Acta math.*, 20; *Compt. Rend.*, 1898. Ein kleiner neuer Aufsatz von Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, Paris 1900 stellt methodisch alle bez. der ganzen Functionen bisher erhaltenen Resultate zusammen.

Die Theoreme von Weierstrass und Mittag-Leffler sind auf die polydromen Functionen und insbesondere auf die ausgedehnt worden, die sich auf den Riemann'schen Flächen (Kap. 15, § 3) monodrom verhalten; eine der ersten Arbeiten in dieser Richtung ist von Appell, *Acta math.*, 1, welcher diese Functionen *Functionen eines analytischen Punktes* (x, y) nannte; darauf folgten Günther, *Crelle*, 109, 1892; Pascal, *Funzioni olomorfe nel campo ellittico*, Rend. Acc. Lincei, 1896 und Cazzaniga, *Acc. Torino*, 1898, Bd. 33; *Ist. Lomb.*, 1898, der die Pascal'sche Arbeit zum Ausgangspunkt nahm und die Resultate Picard's und Borel's erweiterte.

Die Theorie der Functionen von complexen Variabelen hat, wie man wohl sagen darf, hauptsächlich Cauchy in seiner berühmten Abhandlung: *Sur les intégr. définies prises entre des limites imaginaires*, 1825; *Compt. Rend.*, 1846 begründet. Einen grossen Schritt vorwärts hat die Theorie durch die geniale Auffassung Riemann's gemacht, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen Grösse*, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1851, welche die Mittel an die Hand gab, die mehrdeutigen Functionen auf die einfachste Art und mit der grössten Eleganz zu untersuchen (siehe Kap 15); mit den Begriffen Cauchy's war diese Untersuchung so leicht nicht zu machen, wenn es auch manchem der früheren Schriftsteller anfangs so vorkam; siehe z. B. die Vorrede zur zweiten Ausgabe des unten citirten Werkes von Briot und Bouquet.

Von einem verschiedenen Gesichtspunkt und auf verschiedene Art hat fast gleichzeitig mit Riemann auch Weierstrass die Lehre von den Functionen behandelt. Der Unterschied zwischen den beiden, gleich tief gehenden Auffassungen besteht hauptsächlich darin, dass Riemann von der geometrischen Darstellung der Function ausgeht und das darstellende Ding als etwas der Function gleichsam Vorhergehendes ansieht, während Weierstrass die analytische Darstellung der Function zu Grunde legt und nur Functionen betrachtet, die analytisch auf gegebene Art dargestellt sind. Uebrigens verdankt man alle gründlichen Untersuchungen über die wesentlichen Singularitäten der analytischen Functionen Weierstrass und seinen Schülern.

Ein berühmtes Werk über die Lehre von den Functionen, welches fast ausschliesslich den Ideen Cauchy's folgt, ist das Briot-Bouquet'sche, *Th. des fonct. ellipt.*, 2. Ausg., Paris 1875; dem Gedankengang Cauchy's und Riemann's schliessen sich an: Durège, *Elem. der Theor. der Funct.*, Leipzig 1864, 4. Aufl., 1893; Neumann, *Vorlesungen über Riemann's Theorie* etc., Leipzig 1865, 2. Aufl. 1884, welcher die Darstellung mittelst der Kugel einführte; Casorati, *Teorica delle funz. di variab. complesse*, Pavia 1868, wo man auch zahlreiche historische Angaben findet; Holzmüller, *Einführ. in die Theorie der isog. Verwandtschaften und conf. Abbildungen* etc., Leipzig 1882; die Weierstrass'sche Auffassung allein vertreten die Vorlesungen von Weierstrass ebenso wie seine *Functionenlehre*, Berlin 1886; Pincherle, *Giorn. di Batt.*, 18 und ein, übrigens nicht überall correctes Buch von Biermann, *Th. der*

analyt. Funct., Leipzig 1887. Die neuesten Werke gehen unabhängiger vor und suchen die Riemann'sche und Weierstrass'sche Art miteinander zu vereinigen; unter Anderen ist dazu das vortreffliche inhaltreiche Buch von Forsyth, *Th. of funct.*, Cambridge 1893 zu erwähnen; ferner: Picard, *Cours d'Analyse*, 3 Bde., Paris 1891—96 und das für eine erste Einführung besonders geeignete, nicht zu ausführliche Werk von Burkhardt, *Einführung in die Theorie der analyt. Functionen* etc., Leipzig 1898.

Insbesondere machen wir schliesslich noch aufmerksam auf: J. Thomae: *Elementare Theorie der analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen*, Halle 1880, 2. Aufl., Halle 1898.

Kapitel XIV.

Die Functionentheorie in Verbindung mit der Gruppentheorie. Die Periodicität und der Automorphismus.

§ 1. Lineare Substitutionen.

Die auf eine Variabele z ausgeführte allgemeine *lineare Substitution* hat die Form

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad - bc = 1),$$

welche auch durch das Symbol

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

oder

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ausgedrückt wird.

Wenn z eine complexe in der bekannten Art auf einer Ebene dargestellte Variabele ist, so entspricht mittelst dieser Substitution jeder Punkt der Ebene einem anderen Punkt derselben Ebene und diese Correspondenz ist *ein-eindeutig (homographische Transformation).*

Bei einer solchen Substitution existiren zwei Punkte, die sich selbst entsprechen und durch

$$z_1,\ z_2 = \frac{a - d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}$$

dargestellt werden.

Die Substitution, bei welcher diese beiden *Doppelpunkte,* welche Klein *Fixpunkte* nennt, zusammenfallen, heisst *parabolisch.*

Die gegebene Substitution muss sich, wenn die beiden Fixpunkte verschieden sind, auf die Form reduciren lassen:

$$\frac{z' - z_1}{z' - z_2} = k\,\frac{z - z_1}{z - z_2},$$

worin man

$$k = \frac{[a + d - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}]^2}{4(ad - bc)} \quad \textit{zu setzen hat.}$$

Ist k positiv und reell, so heisst die Substitution *hyperbolisch*, ist k dagegen eine complexe Zahl mit dem Modul 1, *elliptisch*, und wenn schliesslich k eine complexe Zahl bedeutet, deren Modul von 1 verschieden ist und deren Argument nicht verschwindet, so führt sie den Namen *loxodromische*.

Jede loxodromische Substitution lässt sich aus einer hyperbolischen in Verbindung mit einer elliptischen zusammensetzen.

Diese Benennungen finden sich zum ersten Mal in zwei Arbeiten von Klein, *Math. Ann.*, 14, S. 122; 21, S. 174.

Um den Unterschied zwischen den drei Arten von Substitutionen besser zu verstehen, betrachte man ihre einfachsten Formen

$$z' = kz \quad (k \text{ reell und positiv}),$$
$$z' = e^{\alpha i} z \quad (\alpha \text{ beliebig}),$$
$$z' = \varrho e^{\alpha i} z \quad (\varrho \text{ von 1 verschieden und } \alpha \text{ von 0 verschieden}).$$

Lässt man in der ersten k stetig variiren, so bewegt sich der Punkt z' offenbar von dem Coordinatenanfang aus längs einer Geraden; variirt man in der zweiten α, so findet die Bewegung des Punkts z' längs eines Kreisumfangs statt, dessen Mittelpunkt im Coordinatenanfang liegt; bei der loxodromischen Substitution schliesslich erleidet der Punkt z' eine Verschiebung, die eine Combination der beiden vorhergehenden Bewegungen ist; d. h. es findet eine Verlängerung des Radiusvectors statt, combinirt mit einer Aenderung seiner Richtung.

Die elliptische Substitution hat die Eigenschaft, dass sie entweder periodisch oder unendlich klein ist; d. h. man kehrt, von einem Punkt ausgehend, entweder wieder zu demselben Punkt zurück, wenn man die Substitution eine ganze Anzahl mal ausführt, oder man kommt bei der successiven Ausführung der Substitution dem Ausgangspunkt so nahe, als man will. Siehe Forsyth, *Theory of functions of a complex variable*, Cambridge 1893, S. 521.

Die Transformation durch reciproke Radienvectoren oder die Inversion ist eine Operation, mittelst welcher man einem Punkt A, wenn ein Kreis in einer Ebene gegeben ist, einen anderen zuordnet, der auf der Verbindungslinie des Centrums des Kreises mit A und auf derselben Seite des Centrums, wie A liegt, und

der Art ist, dass das Product der beiden Radienvectoren dem Quadrat des Radius des gegebenen Kreises gleich kommt.

Spiegelung an einer Geraden heisst die Transformation, durch welche man, wenn eine Gerade gegeben ist, einem Punkt den ihm in Bezug auf die Gerade symmetrischen entsprechen lässt.

Jede lineare Substitution lässt sich immer aus einer Inversion in Verbindung mit einer Spiegelung an einer Geraden zusammensetzen.

Das Product zweier Inversionen liefert eine lineare Substitution, die hyperbolisch, parabolisch oder elliptisch ist, je nachdem die beiden den Inversionen zu Grunde liegenden Kreise keinen, einen oder zwei Punkte gemeinschaftlich haben.

Jede lineare Substitution transformirt die Kreise in Kreise.

Jede lineare Substitution kann man auf unendlich viele Arten als die Resultante einer geraden Anzahl von Inversionen ansehen.

Poincaré ist auf einen sehr glücklichen Gedanken gekommen, mit dessen Hülfe man sich leicht eine Vorstellung von den Eigenschaften machen kann, welche die verschiedenen Arten von linearen Substitutionen auszeichnen. Wir wollen eine lineare Substitution in eine gerade Anzahl $2m$ von Inversionen in Bezug auf $2m$ Kreise der Ebene zerlegen (was auf unendlich viele Arten geschehen kann), und wollen dann jeden Kreis durch die Kugel von demselben Centrum und Radius ersetzen, und, wenn ein Punkt des Raums gegeben ist, die Inversionen in Bezug auf alle Kugeln in derselben Reihenfolge bilden. Es lässt sich beweisen, *dass man, auf welche Weise auch die erste Zerlegung der Substitution in Inversionen ausgeführt wird, immer denselben Punkt als den dem gegebenen Punkt des Raums zugehörigen erhält,* Poincaré, *Les groupes Kleinéens, Acta math.*, 3, 1883, S. 53. Damit ist das Mittel gegeben, eine lineare Substitution als Transformation der Punkte des Raums zu interpretiren.

Man erhält die folgenden Resultate:

Wenn die gegebene Substitution elliptisch ist, so werden die Punkte desjenigen Kreises in sich selbst transformirt, der durch die beiden Fixpunkte der Substitution geht, zum Durchmesser die sie verbindende Gerade hat und in der zur gegebenen senkrechten Ebene liegt (Doppel- oder Fixkreis); ferner werden alle Kreise in sich transformirt, welche derart sind, dass die durch sie gehenden Kugeln den Doppelkreis rechtwinklig treffen.

Ist die Substitution hyperbolisch, so gibt es nur zwei Punkte des Raums, die [illegible] die Fixpunkte; die Substitu-

tion transformirt alle Kreisumfänge und Kugeln in sich, die durch diese beiden Punkte gehen.

Wenn die Substitution ferner parabolisch ist, so bleibt nur ein Punkt fest liegen, nämlich der einzige Fixpunkt; die Substitution transformirt alle Peripherien und Kugeln in sich, die durch diesen Punkt gehen und in ihm eine gewisse Gerade der gegebenen Ebene berühren.

Ist die Substitution schliesslich loxodromisch, so transformirt sie den Kreis in sich, der zum Durchmesser die Verbindungslinie der beiden Fixpunkte hat und in einer zur gegebenen senkrechten Ebene liegt; sie vertauscht jedoch die Punkte dieses Kreises miteinander, selbstverständlich mit Ausnahme der Fixpunkte.

Jede Substitution, welche einen ausserhalb der Ebene gelegenen Punkt nicht vertauscht, ist nothwendiger Weise eine elliptische Substitution.

Wir wollen annehmen, die Kugel mit dem Radius 1 berühre im Coordinatenanfang O die Ebene der complexen Variabelen z, und wollen jedem Punkt der Ebene einen Punkt der Kugel zuordnen, indem wir die Punkte der Ebene von dem oberen Pol dieser letzteren aus auf die Kugel projiciren, d. h. von dem Punkt der Kugel aus, welcher dem Berührungspunkt O diametral gegenüber liegt. Diese Projection der Kugel auf die Ebene pflegt man *stereographische Projection oder Abbildung der Kugel* zu nennen. Vergl. Bd. 2, Kap. 10, § 1. Lässt man nun die Kugel um einen beliebigen ihrer Durchmesser rotiren, so erfährt die Variabele z in der Ebene eine lineare Transformation.

Die entsprechende Formel hat Cayley gefunden, Correspond. of homographics and rotations, Math. Ann. 15, 1879; sie lautet:

$$z' = \frac{(\delta + i\gamma)z - (\beta - i\alpha)}{(\beta + i\alpha)z + (\delta - i\gamma)};$$

die Coefficienten α, β, γ, δ sind reell, im Uebrigen willkürlich; sie müssen nur der Beziehung genügen:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1,$$

die, wie gewöhnlich, ausdrückt, dass die Determinante der Substitution die positive Einheit ist.

§ 2. Gruppen linearer Substitutionen.

Jede Gruppe linearer Substitutionen lässt sich, wie man an erster Stelle erkennt, aus einer *endlichen* oder einer *unendlich grossen* Anzahl von Substitutionen bilden. Diejenigen mit einer

unendlich grossen Anzahl von Substitutionen können entweder *stetig* oder *unstetig* sein; sie sind *stetig,* wenn in ihnen eine *unendlich kleine* Substitution vorkommt, d. h. eine solche, in welcher die Moduln von $a - 1$, b, c, $d - 1$ unendlich klein sind.

Bei der Anwendung auf die Functionentheorie braucht man stetige Gruppen nicht zu berücksichtigen, weil die analytischen Functionen, die zu solchen Gruppen gehören, in einander unendlich nahe liegenden Punkten denselben Werth wieder annehmen müssen, und mithin nur constant sein können. Es werden daher nur die *unstetigen Gruppen* zu betrachten sein; aber auch zwischen ihnen muss noch unterschieden werden, da man sich unstetige Gruppen denken kann, die Transformationen enthalten, welche auf *specielle* Punkte P der Ebene angewendet, Punkte liefern, die so nahe bei den Punkten P liegen, wie man will; in diesem Fall heisst die Gruppe in der Umgebung dieser speciellen Punkte *uneigentlich discontinuirlich,* im anderen *eigentlich discontinuirlich.* Klein, *Math. Ann.,* 21, S. 176; Poincaré, *Acta math.,* 3, S. 57.

So ist z. B. die Gruppe, welche aus den Substitutionen besteht, in denen die Coefficienten reelle ganze Zahlen sind, für die reellen Punkte z uneigentlich discontinuirlich und für die complexen Punkte z eigentlich discontinuirlich. Jede aus Substitutionen mit reellen Coefficienten gebildete discontinuirliche Gruppe ist für jedes complexe z immer eigentlich discontinuirlich und kann uneigentlich discontinuirlich nur für ein reelles z sein. Poincaré, *Acta math.,* 3, S. 58.

Wir betrachten zunächst die Gruppen, deren Substitutionen sich aus einer endlichen Anzahl von *Grundsubstitutionen* zusammensetzen lassen.

Wenn eine discontinuirliche Gruppe gegeben ist, so kann es geschehen, dass die Ebene z in eine gewisse Anzahl von endlichen oder unendlich grossen Flächenstücken zerfällt, die durch die Substitutionen der Gruppe *in sich transformirt werden.* Ein jedes dieser Flächenstücke lässt sich nun in unendlich viele Bereiche derart zerlegen, dass, wenn der Punkt z einen Bereich durchläuft, der durch eine Substitution der Gruppe transformirte Punkt einen anderen Bereich durchwandert, den man *dem ersteren congruent* nennen kann. Jedem Bereich entspricht daher eine Substitution der Gruppe; die Linie welche zwei benachbarte Bereiche trennt, heisst *Randcurve oder Grenzlinie;* die Ränder sind zu je zweien *einander zugeordnet,* d. h. derart beschaffen, dass eine Substitution die Punkte der einen Randcurve in die der anderen verwandelt. Der Punkt, in welchem

zwei consecutive Randcurven sich treffen, heisst *die Spitze* des Bereichs.

Man kann es immer so einrichten, dass ein Bereich ein von Kreisen oder Kreisbogen eingeschlossenes Polygon wird; jedoch kann ein solches Polygon nicht einfach zusammenhängend sein. Siehe Bd. 2, Kap. 18, § 1.

Mit dem Zusammenhang dieses Polygons ist der Begriff des *Geschlechts* der Gruppe verbunden.

Das Studium der Gruppen und ihre Existenz beruht auf der Theilung der Ebene in congruente Bereiche; wenn man einen der Bereiche *(das Anfangs- oder Erzeugungspolygon)* und die Vertheilung seiner Randcurven in Paare von einander zugeordneten Grenzlinien kennt, so ist die Gruppe bestimmt.

Grundsubstitutionen sind diejenigen, welche allen an das Erzeugungspolygon anstossenden Bereichen entsprechen.

Infolge der Untersuchungen Poincaré's, von welchen in § 1 die Rede war, lässt sich dann das Problem, die discontinuirlichen Gruppen linearer Substitutionen zu construiren, auf die regelmässige Theilung des *nicht-euclid'schen* Raums (vergl. Bd. 2, Kap. 21) in congruente Elementarpolyeder zurückführen.

Zu den aus einer endlichen Anzahl von Substitutionen gebildeten Gruppen gehören die *polyedrischen (diedrischen, tetraedrischen, octaedrischen, ikosaedrischen).* Siehe weiter unten.

Von den Gruppen unendlich vieler Transformationen ferner ist zuerst, als die einfachste, die *periodische Gruppe* zu nennen, zu welcher die *periodischen Functionen* gehören (siehe weiter unten), dann die aus Substitutionen mit ganzen Coefficienten gebildete sogenannte *Modulgruppe;* zu ihr gehören die *Modulfunctionen;* ferner die Gruppen, deren Substitutionen *reelle* Coefficienten haben *(die Fuchs'sche Gruppe und die Fuchs'schen Functionen),* und schliesslich die Gruppen von Substitutionen mit beliebigen complexen Coefficienten (die Klein'schen Gruppen nach Poincaré). Im Allgemeinen heissen diejenigen Functionen *automorph* (Klein), welche zu einer beliebigen Gruppe linearer Transformationen gehören.

Es ist zu beachten, dass Poincaré den Namen der *Fuchs'schen Gruppe* auch für gewisse specielle andere Gruppen mit complexen Coefficienten beibehalten hat. Nimmt man nämlich an,

$$s_i = \left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

seien die Substitutionen einer Gruppe mit reellen Coefficienten, so bilden die durch das Symbol

$$t_i = \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \; \frac{\alpha \left[\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right] + \beta}{\gamma \left[\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right] + \delta} \right)$$

dargestellten Substitutionen, in denen α, β, γ, δ beliebige complexe Zahlen sind, für welche die Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ gilt, ihrerseits eine Gruppe mit complexen Coefficienten; für diese Gruppe gebraucht Poincaré den Namen *Fuchs'sche.*

Eine Gruppe von Substitutionen mit reellen Coefficienten behält die reelle Axe der z-Ebene bei und transformirt die beiden Halbebenen in sich; diese Fuchs'sche Gruppe im weiteren Sinn dagegen transformirt einen Kreis (den Grundkreis) in sich, dessen Gleichung

$$\left(\textit{der imaginäre Theil von } \frac{\delta z - \gamma}{\beta z - \alpha}\right) = 0 \quad \textit{lautet.}$$

Liegt eine Fuchs'sche Gruppe im engeren Sinn vor, so ist die Summe der Flächeninhalte aller Bereiche unendlich gross; für eine Fuchs'sche Gruppe im weiteren Sinn dagegen ist diese Summe endlich, weil die Bereiche sich nur im Inneren des Grundkreises ausdehnen und ihn entweder ganz oder nur zum Theil bedecken.

In dem umfassenderen Fall der Klein'schen Gruppe ist die Summe der Flächeninhalte der Bereiche im Allgemeinen ebenfalls endlich.

Was die Geschichte und Literatur der Theorie der automorphen Functionen angeht, bemerken wir, dass, abgesehen von den periodischen Functionen, eines der ersten Beispiele einer zu Gruppen unendlichvieler Substitutionen gehörigen Function von Schwarz, *Crelle,* 75 im Jahr 1872 bei der Untersuchung der Functionen gefunden wurde, welche aus der hypergeometrischen Reihe von Gauss hervorgehen.

Alsdann haben Klein und Andere die Modulfunctionen studirt und später wurde von Klein und Poincaré von zwei verschiedenen Gesichtspunkten aus die Theorie der den linearen Gruppen angehörigen Functionen ausgearbeitet. Die wichtigsten grösseren Arbeiten Poincaré's über diesen Gegenstand sind enthalten: in den *Acta math.,* 1, 3, 4, 5; *Math. Ann.,* 19; *Compt. Rend.,* von 1881 ab; die Arbeiten Klein's

findet man in den *Math. Ann.*, 14, 17, 19, 20, 21 etc. Wir verweisen weiter auf: Dyck, *Math. Ann.*, 20, 22, 1882, 1883; v. Mangoldt, *Gött. Nachr.*, 1885; Weber, ib., 1886; Schottky, *Crelle*, 101, 1887; Stahl, *Math. Ann.*, 33, 1889; Schlesinger, *Crelle*, 105, 1889; Bolza, *Am. Journ.*, 13, 1890 und die neuen Untersuchungen von Ritter, *Math. Ann.*, 41, 44, 45, 46.

Es sind ferner die zahlreichen Arbeiten Bianchi's zu erwähnen: über die Gruppen linearer Substitutionen mit *complexen ganzen* Coefficienten und solche, welche *einem imaginären quadratischen Körper angehören* (vergl. Kap. 21), über die geometrische Darstellung dieser Gruppen und über das Studium der entsprechenden regulären Theilung eines nicht-euclid'schen Raums nach den Ideen Poincaré's. Siehe oben. Diese Arbeiten sind in den *Math. Ann.*, 38, 40, 42, 43; *Ann. di mat.*, (2), 21, 22; *Rend. Lincei*, 1890, 1891, 1893, 1894 enthalten.

In Bezug auf die Theorie der automorphen Functionen im Allgemeinen verweisen wir auf ein neues Buch von Fricke: Klein, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen*, 1, Leipzig 1897.

§ 3. Die anharmonische Gruppe. Polyedrische Gruppen und Functionen.

Von den Gruppen, die aus einer endlichen Anzahl von Substitutionen bestehen, ist zuerst die *anharmonische* zu nennen, welche aus den sechs Substitutionen

$$z' = z, \quad z' = \frac{1}{z}, \quad z' = 1 - z, \quad z' = \frac{1}{1-z},$$
$$z' = \frac{z-1}{z}, \quad z' = \frac{z}{z-1}$$

hervorgeht, von denen die rechten Seiten den sechs Werthen entsprechen, welche das anharmonische Verhältniss von vier Grössen annehmen kann. *Eine Function, welche durch die Substitutionen der Gruppe nicht verändert wird, ist*

$$f(z) = \frac{(z^2 - z + 1)^3}{(z^2 - z)^2}.$$

Andere endliche Gruppen sind die sogenannten *polyedrischen*. Denken wir uns ein regelmässiges in die Kugel vom Radius 1 eingeschriebenes Polyeder, so gibt es gewisse Rotationen des Polyeders, infolge deren die Gesammtheit aller Eckpunkte wieder in sich selbst zurückkehrt; projiciren wir nun

die Kugel stereographisch auf eine Berührungsebene, auf welcher wir die Variabele z darstellen, so entspricht jede Umdrehung der Kugel in sich selbst (§ 1) einer speciellen linearen Transformation von z. Die Function, deren Wurzeln die sämmtlichen den Eckpunkten des Polyeders entsprechenden Punkte z sind, bleibt offenbar bei allen diesen Rotationen unverändert. Man erhält so eine polyedrische Gruppe und die zugehörige Function. Diese Functionen entsprechen den automorphen binären Formen, von denen in Kap. 12, § 10 die Rede war.

1) *Die cyklische Gruppe* wird aus den n Substitutionen

$$z' = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \cdot z, \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

gebildet.

Die einfachste dahin gehörige Function ist offenbar

$$az^n + b,$$

worin a, b beliebige Constante bedeuten.

2) *Die diedrische Gruppe* besteht aus den $2n$ Substitutionen:

$$\left.\begin{aligned} z' &= e^{\frac{2ik\pi}{n}} \cdot z \\ z' &= \frac{e^{-\frac{2ik\pi}{n}}}{z} \end{aligned}\right\}, \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

Eine zu der Gruppe gehörige Function ist:

$$\frac{(z^n - 1)^2}{z^n}.$$

3) *Die tetraedrische Gruppe.* Je nach der Lage, welche das eingeschriebene Tetraeder in der Kugel hat, gibt es zwei verschiedene Hauptgruppen, deren Substitutionen die Eckpunkte eines Tetraeders untereinander vertauschen. *Diese Gruppen enthalten zwölf Substitutionen und sind holoedrisch isomorph mit der alternirenden Gruppe von vier Elementen.*

Die erste der beiden Gruppen geht aus den zwölf Substitutionen hervor:

$$z' = \pm z, \qquad z' = \pm \frac{1}{z},$$

$$z' = \pm i \frac{z+1}{z-1}, \qquad z' = \pm i \frac{z-1}{z+1},$$

$$z' = \pm \frac{z+i}{z-i}, \qquad z' = \pm \frac{z-i}{z+i}$$

und die zweite aus den folgenden zwölf:

$$z' = \pm z, \qquad z' = \pm \frac{i}{z},$$

$$z' = \pm \frac{(1+i)z + \sqrt{2}}{\sqrt{2}z - (1-i)}, \qquad z' = \pm \frac{\sqrt{2}z - (1-i)}{(1+i)z + \sqrt{2}},$$

$$z' = \pm \frac{(1-i)z + \sqrt{2}}{\sqrt{2}z - (1+i)}, \qquad z' = \pm \frac{\sqrt{2}z - (1+i)}{(1-i)z + \sqrt{2}}.$$

Für die erste der beiden Gruppen bleiben die zwei Functionen

$$z^4 \pm 2\sqrt{-3}\,z^2 + 1$$

bis auf einen Factor unverändert; für die zweite gilt das Gleiche bei den beiden Functionen

$$z^4 \pm 2\sqrt{3}\,z^2 - 1.$$

Setzt man diese Polynome gleich Null, so ergeben sich Gleichungen, deren Wurzeln den Eckpunkten des Tetraeders entsprechen, welches in die Kugel eingeschrieben und in vier verschiedenen Lagen angeordnet ist. Man pflegt eine jede dieser Gleichungen deshalb *Gleichung des Tetraeders* zu nennen. Siehe Kap. 12, § 10.

4) *Die octaedrische Gruppe.* Auch von ihr gibt es zwei Hauptarten, wie von der vorigen. *Sie besteht aus 24 Substitutionen und ist holoedrisch isomorph mit der symmetrischen Gruppe von vier Elementen.*

Die Substitutionen der ersten der beiden octaedrischen Gruppen sind:

$$\left.\begin{array}{ll} z' = i^k z, & z' = \dfrac{i^k}{z}, \\[2mm] z' = i^k \dfrac{z+1}{z-1}, & z' = i^k \dfrac{z-1}{z+1}, \\[2mm] z' = i^k \dfrac{z+i}{z-i}, & z' = i^k \dfrac{z-i}{z+i}, \end{array}\right\} \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Eine Gleichung, deren Wurzeln durch diese Substitutionen unverändert bleiben, ist

$$z(z^4 - 1) = 0 \qquad \text{(die Octaedergleichung).}$$

Die zweite Octaedergruppe besteht aus:

$$z' = i^k z, \qquad z' = \frac{i^k}{z},$$

$$z' = i^k \frac{(1+i)z + \sqrt{2}}{\sqrt{2}z - (1-i)}, \qquad z' = i^k \frac{\sqrt{2}z - (1-i)}{(1+i)z + \sqrt{2}},$$

$$z' = i^k \frac{(1-i)z + \sqrt{2}}{\sqrt{2}z - (1+i)}, \qquad z' = i^k \frac{\sqrt{2}z - (1+i)}{(1-i)z + \sqrt{2}}.$$

Die entsprechende Gleichung lautet:

$$z(z^4 + 1) = 0, \quad \text{(Octaedergleichung).}$$

5) *Die ikosaedrische Gruppe enthält* 60 *Substitutionen und ist holoedrisch isomorph mit der symmetrischen Gruppe von* 5 *Elementen.* Die Substitutionen sind:

$$z' = \varepsilon^k z, \qquad z' = \frac{-\varepsilon^{4k}}{z},$$

$$z' = \varepsilon^{k_1} \frac{-(\varepsilon - \varepsilon^4)\varepsilon^k \cdot z + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)}{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\varepsilon^k \cdot z + (\varepsilon - \varepsilon^4)},$$

$$z' = -\varepsilon^{4k_1} \frac{(\varepsilon^2 - \varepsilon^3)\varepsilon^k \cdot z + (\varepsilon - \varepsilon^4)}{-(\varepsilon - \varepsilon^4)\varepsilon^k \cdot z + (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)},$$

worin $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ ist und k, k_1 die sämmtlichen Werthe 0, 1, 2, 3, 4 annehmen.

Die Ikosaedergleichung lautet:

$$z(z^{10} + 11z^5 - 1) = 0.$$

Ueber die sogenannten Gleichungen des Würfels und Dodekaeders vergl. Kap. 12, § 10.

Die Lehre von den endlichen und speciell den Polyedergruppen hat Klein in einem besonderen Buch behandelt, *Vorlesungen über das Ikosaeder,* Leipzig 1884, in welchem auch die nöthigen Hinweise auf die Geschichte und Literatur gegeben werden.

Wir citiren ferner: Klein, *Binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst,* Math. Ann., 9; Gordan, *Math. Ann.,* 12; Brioschi, *Equaz. d. ottaedro,* Roma, Acc. Linc. Atti, 3, 1879; *Una classe di forme binarie,* Ann. di mat., 8. 1877; *Forme binaire du 8. ordre,* Paris, Compt. Rend., 96, 1883; Cayley, *Quart. Journ. of math.,* 16, 1879 etc.

Weitere Angaben findet man in Kap. 12, § 10.

§ 4. Periodische Functionen einer Variabelen.

Die durch eine der beiden Substitutionen vom Typus

$$z' = z + 2\omega, \quad z' = z + 2\omega' \quad \text{(parabolische Substitutionen)}$$

oder durch beide erzeugten Gruppen kann man *periodische* nennen und die dazu gehörigen Functionen *einfach* oder *doppelt periodisch*. Die Grössen 2ω und $2\omega'$ heissen *Perioden*.

Die aus diesen beiden Substitutionen entstehende Gruppe kann aus einer einzigen Substitution von derselben Form hergestellt werden, wenn das Verhältniss $\frac{\omega'}{\omega}$ *reell und rational ist; sie ist eine continuirliche Gruppe, wenn* $\frac{\omega'}{\omega}$ *eine reelle, irrationale Zahl darstellt.*

Die aus drei oder mehr Substitutionen von dem obigen Typus gebildete Gruppe lässt sich entweder aus zwei Substitutionen von demselben Typus herstellen, oder sie ist eine continuirliche Gruppe; mit anderen Worten: man kann immer ganze Zahlen m, m', m'' *von der Beschaffenheit finden, dass der Ausdruck*

$$m\omega + m'\omega' + m''\omega''$$

entweder Null wird oder dass seine Theile, der reelle und der imaginäre, kleiner als jede beliebige angebbare Grösse d. h. also unendlich klein werden.

Diese allgemeinen Theoreme findet man unter einer etwas verschiedenen Form bei Clebsch-Gordan, *Theorie der Abel'schen Functionen,* § 38, Leipzig 1866.

Es gibt keine monodromen Functionen eines einzigen Arguments mit einer mehr als zweifachen Periodicität. Dieser Satz rührt von Jacobi her, *Werke,* 2, Seite 202.

Jede monodrome $2p$*-fach periodische Function muss eine Function von mindestens* p *Argumenten sein* (Jacobi). Ueber dieses Theorem siehe auch Riemann nach, *Crelle,* 71.

Jede einfach periodische analytische Function $f(z)$, *die im Endlichen bis auf Pole überall regulär und so beschaffen ist, dass wenigstens eine der beiden Grenzen*

$$\lim_{y=\infty} f(z) \quad \textit{oder} \quad \lim_{y=\infty} \frac{1}{f(z)}$$

existirt, wenn sich y *(nachdem man* $z = x + iy$ *gesetzt hat) entweder dem positiven* ∞ *oder dem negativen* ∞ *nähert, ohne dass dabei die Grenze in dem einen Fall der Grenze in dem*

anderen gleich sein müsste, ist eine rationale Function der Exponentialfunction

$$e^{2 i \pi z}.$$

Man sagt, eine analytische Function besitze ein *algebraisches Additionstheorem,* wenn zwischen den Werthen $f(z)$, $f(z')$, $f(z+z')$, worin z, z' zwei beliebige Punkte der Ebene bedeuten, eine algebraische Relation existirt.

Jede Function von der in dem vorigen Theorem betrachteten Art besitzt ein algebraisches Additionstheorem.

Zwischen je zwei solchen Functionen besteht eine algebraische Gleichung mit von z unabhängigen Coefficienten.

Jede solche Function genügt einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung, in der die unabhängige Variabele explicite nicht vorkommt, d. h.:

Jede solche Function ist die Umkehrung des Integrals einer algebraischen Function.

Das Verhältniss der Perioden einer doppelt periodischen Function kann keine reelle Grösse sein, Jacobi, *Werke,* 2, S. 25.

Das Erzeugungspolygon (siehe § 2) einer doppelt periodischen Gruppe lässt sich auf ein Parallelogramm reduciren, dessen einer Eckpunkt mit dem Coordinatenanfang der z-Ebene und dessen eine Seite mit der reellen Axe zusammenfallen kann; dieses Parallelogramm heisst *Grundparallelogramm;* die Ebene zerfällt in ein Netz ihm congruenter Parallelogramme.

Eine doppelt periodische Function kann nicht holomorph sein.

Die Summe der Residuen, die eine meromorphe doppelt periodische Function in jedem elementaren Parallelogramm hat, ist Null.

Eine solche Function hat in jedem Parallelogramm wenigstens zwei Pole.

Bei jeder so beschaffenen Function ist die Summe der Nullpunkte, die sie in dem elementaren Parallelogramm besitzt, der Summe der Ordnungen der Unendlichkeitspunkte in demselben Parallelogramm gleich.

Zwei meromorphe doppelt periodische Functionen, welche dieselben Perioden, Nullpunkte und Unendlichkeitspunkte haben, sind bis auf einen constanten Factor gleich.

Die Summe der Nullpunkte, die eine doppelt periodische Function in einem Parallelogramm hat, vermindert um die Summe der Unendlichkeitspunkte, ist einem ganzen Vielfachen der Perioden gleich. Liouville'scher Satz. Vergl. die Literaturangaben auf S. 382.

Wenn die Perioden, n dieser Bedingung genügende Nullpunkte und n ebensolche Unendlichkeitspunkte gegeben sind, so existirt immer die entsprechende doppelt periodische Function.

Die Summe der Punkte, in welchen die doppelt periodischen Functionen denselben Werth in dem Grundparallelogramm haben, ist bis auf Vielfache der Perioden constant.

Eine doppelt periodische Function heisst *von der n^{ten} Ordnung,* wenn sie in dem Grundparallelogramm n Unendlichkeitspunkte hat.

Jede doppelt periodische Function 2ter Ordnung genügt der Beziehung $f(\alpha + \beta - z) = f(z)$, wenn α, β ihre beiden Unendlichkeitspunkte sind.

Die Derivirte einer doppelt periodischen Function 2ter Ordnung verschwindet in den vier Punkten

$$\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \frac{\alpha+\beta}{2} + \omega, \quad \frac{\alpha+\beta}{2} + \omega', \quad \frac{\alpha+\beta}{2} + \omega + \omega',$$

wobei ω, ω' die halben Perioden angeben.

Jede Function $F(z)$, welche dieselben Unendlichkeitspunkte und Perioden hat, wie die Function in dem vorstehenden Satz, und der Gleichung $F(\alpha + \beta - z) = F(z)$ genügt, lässt sich rational durch $f(z)$ ausdrücken.

Jede doppelt periodische Function von der n^{ten} Ordnung kann man rational durch eine Function zweiter Ordnung ausdrücken, welche dieselben Perioden hat, und durch die Derivirte dieser Function (Liouville'sches Theorem).

Zwei doppelt periodische Functionen, deren Netze von Parallelogrammen ein Netz von Eckpunkten gemeinschaftlich haben, sind durch eine algebraische Gleichung miteinander verbunden.

Zwischen einer doppelt periodischen Function und ihrer Derivirten besteht eine algebraische Gleichung.

Wenn eine Function, welche ein Additionstheorem besitzt, monodrom ist, so lässt sich $f(z + z')$ rational durch $f(z)$, $f(z')$, $f'(z)$, $f'(z')$ ausdrücken.

Jede doppelt periodische meromorphe monodrome Function besitzt ein algebraisches Additionstheorem; umgekehrt ist jede in der ganzen Ebene mit Ausnahme des Unendlichkeitspunktes meromorphe Function, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzt und deshalb nur im Unendlichgrossen wesentlich singuläre Punkte hat, im Allgemeinen eine doppelt periodische Function.

Ueber dieses Weierstrass'sche Theorem siehe Schwarz, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der ellipt. Funct.*, Göttingen

1885; Phragmen, *Acta math.*, 7, 1885 und Biermann, *Theorie der analyt. Funct.*, Leipzig 1887.

Wir bemerken bei dieser Gelegenheit, dass Poincaré auch die Functionen studirt hat, die ein *Multiplicationstheorem* haben, *Liouville's Journ.*, Ser. 4, Bd. 4, 1890, S. 313.

Eine in der ganzen Ebene mit Ausnahme des Unendlichkeitspunktes meromorphe doppelt periodische Function, welche mithin ein algebraisches Additionstheorem hat, heisst im Allgemeinen eine *monodrome elliptische Function.*

Die Function $p(u)$ (vergl. Kap. 16) kann man die elliptische Elementarfunction nennen; durch sie, die von 2ter Ordnung ist, und ihre Derivirte lässt sich jede andere elliptische Function einem eben angeführten Satze entsprechend ausdrücken.

Wie man sieht, hängt die Lehre von den doppelt periodischen Functionen mit der von den elliptischen Functionen eng zusammen. Näheres findet der Leser in Kap. 16, in welchem diese elliptischen Functionen behandelt werden.

Wir wollen nur noch bemerken, dass Liouville, *Leçons sur les fonctions doublement périodiques,* 1847 eine Lehre von den elliptischen Functionen, die sich hauptsächlich auf den Begriff der doppelten Periodicität gründet, aufgestellt und in den *Compt. Rend.*, 1851 veröffentlicht hat; siehe auch *Crelle,* 88, 1880; auf ihn folgten in derselben Richtung Briot und Bouquet, *J. Éc. Polyt.*, 21, 1856 und Meray; eine sehr klare Darlegung der Theoreme über die doppelte Periodicität findet man in dem Werk von Briot und Bouquet, *Fonct. ellipt.*, 2. Ausg., Paris 1875.

Diejenigen Functionen, welche nicht unverändert bleiben, wenn das Argument um Perioden wächst, sondern mit Factoren: Constanten oder Exponentialgrössen 1ten Grads multiplicirt werden, pflegt man *pseudoperiodische oder doppelt periodische Functionen* 2ter *oder* 3ter *Art* zu nennen, je nachdem dieser Factor constant oder ein Exponentialfactor ersten Grads in der Variabelen ist. Ueber diese Functionen und ihren Zusammenhang mit den gewöhnlichen elliptischen Functionen findet man Näheres in den Arbeiten von Hermite, *Compt. Rend.*, 1861, 1862, 1885; Mittag-Leffler, *Compt. Rend.*, 1880; Brioschi, ebenda 1881; Frobenius, *Crelle*, 93; Halphén, *Traité des fonctions ellipt.*, Paris 1886, 1, S. 225, 411, 438, 463; etc. Man sehe auch Forsyth nach, *Th. of funct.*, Cambridge 1893, Kap. 12, S. 273 u. ff. und Krause, *Theorie der doppelt-periodischen Functionen,* Leipzig 1895, 1897.

In Bezug auf die $2p$-fach periodischen Functionen mit p Argumenten verweisen wir ausser auf den schon citirten Jacobi auch auf die Arbeiten über die Abel'schen Functionen, welche gerade Functionen dieser Art sind; vergl. Kap. 17. Wir führen dann noch Weierstrass an, *Berl. Monatsber.*, 1869 und *Crelle*, 89, welcher einige Theoreme Liouville's über die doppelt periodischen Functionen auf diese mehrfach periodischen Functionen ausdehnt und schliesslich beweist, dass diese allgemeinen Functionen sich durch die ϑ-Functionen mit p Argumenten ausdrücken lassen. Siehe Kap. 17, § 3.

§ 5. Die Modulfunctionen.

Eine eindeutige Function heisst *Modulfunction*, wenn sie bei allen Substitutionen einer Modulgruppe oder -Untergruppe

$$\left(z, \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right), \quad (a_i d_i - b_i c_i = 1),$$

worin a, b, c, d *reelle ganze Zahlen* sind, unverändert bleibt. Sie hat den Namen „Modulfunction" erhalten, weil der Modul k^2 der elliptischen Functionen, als Function des Verhältnisses der transcendenten Perioden $z = \frac{\omega'}{\omega}$ (vergl. Kap. 16) betrachtet, eine Function dieser Art ist.

Die Modulgruppe ist für reelle z uneigentlich discontinuirlich. Siehe § 2.

Wenn $F(z)$, $f(z)$ den Gruppen G, G' zugehörige Modulfunctionen sind und G' eine Untergruppe von G ist, so lässt sich die Function F rational durch f ausdrücken.

Von zweien zu derselben Gruppe gehörigen Modulfunctionen kann jede rational durch die andere ausgedrückt werden.

Die absolute Invariante der elliptischen Functionen (siehe Kap. 16)

$$J = \frac{4}{27} \frac{(1 - k^2 + k^4)^3}{k^4 (1 - k^2)^2}$$

ist die zur totalen Gruppe gehörige Modulfunction.

Die Erzeugungssubstitutionen der ganzen Gruppe sind

$$(z, z + 1), \quad \left(z, -\frac{1}{z}\right),$$

von denen die erste parabolisch und die zweite elliptisch periodisch ist.

Das Anfangs- oder Erzeugungspolygon für die Function k^2 wird auf folgende Art definirt: Es ist eine in der positiven

Halbebene liegende unendlich grosse krummlinige vierseitige Figur, von welcher zwei Seiten der imaginären Axe parallel laufende Gerade sind und die Abscissen $+1$, -1 haben, während die beiden anderen Seiten in der positiven Halbebene liegende Halbkreise mit dem Radius $=\frac{1}{2}$ sind, deren Mittelpunkte in den Punkten $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ liegen.

In einem solchen Polygon nimmt die Function k^2 ein einziges Mal ihre sämmtlichen Werthe an, d. h., die Werthe, welche sie in den übrigen Theilen der Ebene erhält, sind denen gleich, die sie in Punkten im Inneren des Polygons annimmt.

Die Gruppe der Modulfunction $k^2k'^2$ wird durch die beiden Substitutionen $(z, z+2)$, $\left(z, -\frac{1}{z}\right)$ erzeugt.

Die beiden Functionen $\varphi = \sqrt[4]{k}$, $\psi = \sqrt[4]{k'}$ sind Modulfunctionen; von ihnen gehört φ zu dem Theiler der Gruppe von k^2, der aus den drei Substitutionen

$$A = (z, z+2), \quad B = \left(z, \frac{z}{-2z+1}\right),$$
$$C = \left(z, \frac{z}{2z+1}\right)$$

in der Art zusammengesetzt ist, dass in jedem Produkt die Anzahl der Factoren A, die in ihm auftreten, $\equiv 0 \pmod{8}$ ist; ψ dagegen gehört zu dem Theiler der Gruppe von k^2, der aus denselben drei Substitutionen so gebildet ist, dass in jedem Product die Anzahl der Factoren B, um die der Factoren C vermindert, $\equiv 0 \pmod{8}$ ist.

Das Erzeugungspolygon (vergl. § 2) für die absolute Invariante

$$J(z) = \frac{4}{27}\frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2} \quad \text{(vergl. Kap. 16)}$$

hat drei Seiten; die eine ist derjenige Kreisbogen vom Radius 1 und dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt, der von dem Punkt mit der Abscisse $-\frac{1}{2}$ und positiver Ordinate bis zu dem Punkt mit der Abscisse $+\frac{1}{2}$ und positiver Ordinate geht; die anderen beiden Seiten sind die Geraden, die von den Endpunkten dieses Bogens ausgehen und, der imaginären Axe parallel laufend, sich bis $+\infty$ erstrecken. Die Function $J(z)$ nimmt in den Punkten

$$z = i, \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad i\infty,$$

den Eckpunkten des halben Erzeugungsdreiecks, bez. die Werthe an:

$$1, \; 0, \; \infty.$$

Die Gruppe der Modulfunction k^2 (Legendre'scher Modul) besteht aus den Substitutionen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{mod. } 2).$$

Die beiden Erzeugungssubstitutionen dieser Gruppe sind:

$$\left(z, \frac{1}{2z+1}\right), \quad (z, z+2).$$

Die Theorie der Modulfunctionen hängt aufs engste mit der Transformation der elliptischen Functionen zusammen. (Vergl. Kap. 16.)

Der Name *elliptische Modulfunctionen* rührt von Dedekind her. *Die elliptischen Modulfunctionen. Crelle.* 83, 1877. Dedekind stellte eine gründliche Untersuchung aller Theiler der Fundamentalgruppe und der zu ihr gehörigen Functionen an. Klein hat eine ausgedehnte Classe dieser Untergruppen bearbeitet.

Die hierher gehörigen Hauptarbeiten sind: Klein, *Math. Ann.*. 14, 17; Hurwitz, ib., 18; Dyck, Gierster, ib., 17, 20; Fricke, ib., 21, 28, 29; Kiepert, *Crelle*, 87.

Zum Ausgangspunkt für seine ersten Forschungen dienten Klein seine eigenen Untersuchungen der endlichen Gruppen und dann eine Abhandlung von Schwarz, *Crelle*, 75 über die hypergeometrische Reihe. Ein umfangreiches Werk über die Modulfunctionen ist von Fricke herausgegeben worden: Klein, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, Leipzig 1890, 1892, 2 Bde.

§ 6. Die Fuchs'schen und Klein'schen (automorphen) Functionen.

Wie man bei den doppelt periodischen Functionen damit beginnt, die Functionen ϑ zu construiren, durch deren Verhältnisse dann die doppelt periodischen Functionen ausgedrückt werden, so versuchte Poincaré auch in dem allgemeinsten Fall, der uns hier beschäftigt, zu verfahren.

Indem man beachtet, dass die Reihe

$$\sum_i \left| \frac{1}{(c_i z + d_i)^{2m}} \right|, \quad (m \text{ eine ganze Zahl} > 1)$$

convergirt, wird die convergente Reihe

$$\theta(z) = \sum_i H\left(\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right) \frac{1}{(c_i z + d_i)^{2m}}$$

gebildet, in welcher H das Symbol einer beliebigen rationalen Function ist. Diese Reihe stellt eine *eindeutige Function* dar und heisst eine *Fuchs'sche* oder *Klein'sche Thetafunction*, je nachdem die Fundamentalgruppe eine Fuchs'sche oder Klein'sche ist. Eine solche Function pflegt man auch zuweilen eine *pseudoautomorphe* zu nennen.

Die Anzahl der Null- und Unendlichkeitspunkte dieser Function im Inneren des Anfangs- oder Erzeugungspolygons R_0 ist immer endlich.

Die Function θ genügt der Relation

$$\theta\left(\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right) = \theta(z)\,(c_i z + d_i)^{2m}.$$

Eine analytische Function dieser Art existirt nur in dem Theil der Ebene, welchem das Anfangspolygon und die sämmtlichen unendlich vielen Polygone angehören, die man durch die Substitutionen der Gruppe aus ihm erhält, vergl. § 2; so kommt z. B. in dem Fall der Fuchs'schen Gruppen in weiterem Sinn, vergl. § 2, die Function nur in dem Grundkreis oder einem seiner Theile vor; der Umfang dieses Kreises ist für die Function eine Singularitätslinie. Man erhält daher Functionen *mit natürlichen Grenzen (fonctions à espaces lacunaires)*, vergl. S. 353.

Der Quotient zweier so beschaffener Functionen, die demselben m entsprechen, ist eine automorphe Function mit einer endlichen Anzahl von Null- und Unendlichkeitspunkten in dem Inneren von R_0; umgekehrt lässt sich jede automorphe Function immer durch die θ-Functionen ausdrücken.

Zwischen zwei automorphen derselben Gruppe entsprechenden Functionen besteht immer eine algebraische Beziehung und jede andere Function der nämlichen Gruppe lässt sich rational durch zwei von ihnen ausdrücken.

Die Coordinaten der Punkte einer beliebigen algebraischen Curve können immer als Fuchs'sche Functionen desselben Parameters ausgedrückt werden.

Jede lineare Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten lässt sich durch Fuchs'sche Functionen und Fuchs'sche Thetafunctionen integriren.

Weitere Einzelheiten findet man in den Arbeiten, die in § 2 citirt wurden.

Kapitel XV.

Die algebraischen Functionen und die Abel'schen Integrale.

§ 1. Allgemeines über die algebraischen Functionen. Die Verzweigungen.

Wir wollen uns eine algebraische rationale ganze Relation $f(w, z) = 0$ zwischen den beiden complexen Variabelen w, z denken; *die durch diese Relation als Function von z definirte Variabele w wird im Allgemeinen vieldeutig sein und n Werthe besitzen, wenn n der Grad der Gleichung in z ist;* sie heisst *algebraische Function von z.* Allgemeiner: jede rationale Function der durch die vorstehende Relation verbundenen Grössen w und z heisst *eine algebraische Function von z.*

Uebrigens lässt sich diese zweite Definition auf die erstere zurückführen, indem man

$$w_1 = R(w, z)$$

setzt und aus dieser Beziehung in Verbindung mit $f(w, z) = 0$ die Grösse w eliminirt; man erhält eine rationale Gleichung $F(w_1, z) = 0$.

Legt man der Grösse z einen Werth bei, d. h. setzt man $z = z_0$, so liefert die Gleichung $f(w, z) = 0$, welche in Bezug auf w vom n^{ten} Grad ist, n Wurzeln für w, die entweder sämmtlich verschieden oder von denen einige gleich sein können. Nimmt man im Allgemeinen an, m dieser Wurzeln seien gleich, so lautet ein Theorem von Cauchy, *Exercises d'Analyse* etc., 1841:

Wenn die Gleichung für $z = z_0$, m Wurzeln w hat, die gleich w_0 sind, so hat diese Gleichung für einen Werth von z, der sehr nahe an z_0 liegt, m Wurzeln, die sich sämmtlich unendlich wenig von dem Werth w_0 unterscheiden.

Wenn die Wurzel $w = w_0$ von $f = 0$ für $z = z_0$ nicht vielfach ist und wenn man in der Ebene z sich in einem hinreichend kleinen Kreis um z_0 bewegt, so wird man sich in der



Ebene w in einem kleinen Kreis um w_0 drehen und einer einzigen Rotation in der Ebene z wird in der Ebene w entweder eine Rotation oder eine ganze Zahl von Rotationen entsprechen. In der Umgebung von z_0 lässt sich $w - w_0$ in eine nach positiven ganzen Potenzen von $z - z_0$ geordnete, mit der ersten oder einer höheren als der ersten Potenz beginnende Reihe entwickeln.

Wenn $f = 0$ für $z = z_0$, m Wurzeln gleich w_0 hat, und wenn z_0 in der Ebene z in hinreichend geringem Abstand umschrieben wird, so dreht man sich in der Ebene w um w_0 in der Art, dass man bei einer einzigen Rotation in der Ebene z in der Ebene w nur von einer der m (nach dem Cauchy'schen Theorem) unendlich nahe an w_0 gelegenen Wurzeln zu einer anderen übergeht. Beschreibt man um z_0 eine gewisse Anzahl m_1 von Rotationen, so kehrt man in der Ebene w nach dem Durchgang durch m_1 der m Wurzeln zu der Wurzel zurück, von der man ausgegangen war. In diesem Fall sagt man, die m_1 Wurzeln bilden einen Cyclus; andere m_2 Wurzeln bilden dann ihrerseits wieder einen Cyclus u. s. w.; die Summe $m_1 + m_2 + \cdots$ ist offenbar gleich m. Die m_1 Wurzeln, aus welchen ein Cyclus besteht, lassen sich in der Umgebung von z_0 in eine Reihe entwickeln, deren erster Term w_0 ist und deren übrige Terme nach positiven ganzen Potenzen von $(z - z_0)^{\frac{1}{m_1}}$ fortschreiten; ebenso verhält es sich mit den m_2 Wurzeln, aus denen ein anderer Cyclus besteht, etc. *Der Werth von w für einen nahe an z_0 gelegenen Punkt kann daher in soviele Reihen entwickelt werden, als Cyclen vorhanden sind, in welche die m Wurzeln sich vertheilen.*

Wenn alle $m_1, m_2, \cdots$ gleich 1 sind, so erhält man für die Function w in der Umgebung von z_0, m Entwickelungen in Reihen, welche den m verschiedenen Werthen entsprechen, die diese Function in der Umgebung von z_0 annimmt. Denkt man sich die Relation $f(w, z) = 0$ durch eine Curve in der Ebene dargestellt, so entspricht dieser Fall dem Vorkommen eines m-fachen Punktes der Curve mit verschiedenen Tangenten.

Sind nicht alle m gleich 1, so heisst der Punkt z_0 *ein Verzweigungspunkt von der $(m_1 - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung* für die m_1 in einem Cyclus vereinigten Werthe von w, *von der $(m_2 - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung* für die m_2 ebenfalls in einem Cyclus vereinigten Werthe u. s. w. *Bei der geometrischen Darstellung durch die Curve entspricht der Verzweigungspunkt einem Punkt der Curve, dessen Ordinate wenigstens in zwei unendlich nahe aneinander*

gelegenen Punkten denselben Zweig der Curve trifft, insbesondere einem Punkt, in welchem die Tangente an einen Zweig der Curve senkrecht auf der Abscissenaxe steht.

Wenn speciell die Entwickelung von w in Reihen nach Potenzen von $(z-z_0)^{\frac{1}{m}}$ mit dem Term $(z-z_0)^{\frac{m_1}{m_1}}=(z-z_0)$ beginnt, d. h. wenn die sämmtlichen m_1-1 ersten Coefficienten der Entwickelung Null sind, so ist der Punkt z_0 ebenfalls ein Verzweigungspunkt, aber von complicirterer Art. Bei der geometrischen Darstellung durch die Curve tritt dieser Fall z. B. bei einer Spitze ein oder allgemeiner bei einem mehrfachen Punkt mit zusammenfallenden Tangenten. Um Verwechselungen zu vermeiden, wollen wir eine solche Verzweigung *Spitzenverzweigung* nennen.

Wenn z_0 entweder kein Verzweigungspunkt oder ein Spitzenverzweigungspunkt ist, so stehen seine Umgebung und die von w_0 zu einander in der Beziehung conformer Abbildung; ist dagegen z_0 ein gewöhnlicher Verzweigungspunkt der $(m_1-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, so ist die Abbildung nicht mehr conform.

Einen gewöhnlichen Verzweigungspunkt der $(m_1-1)^{\text{ten}}$ Ordnung kann man als die Vereinigung von m_1-1 unendlich nahe aneinander gelegenen Verzweigungspunkten 1ter Ordnung ansehen.

Es ist auch möglich, ohne die Einführung des Begriffs der Spitzenverzweigung auszukommen, wenn man das folgende Theorem von Noether benutzt, *Math. Ann.*, 9, 1876; vergl. auch Halphén, *Points singuliers d. courbes algébr.*, Paris, C. R., 78, 1874, wo man auch Literaturnachweise findet:

Man kann immer mittelst Cremona'scher Transformationen, siehe Bd. 2, Kap. 5, § 5, *eine ebene algebraische Curve $f(w,z)=0$ in eine andere transformiren, welche nur mehrfache Punkte mit lauter verschiedenen Tangenten hat.*

Die Anzahl der einfachen, gewöhnlichen und Spitzen-Verzweigungspunkte, die der Beziehung $f(w,z)=0$ entsprechen, ist $n(n-1)-2d-2r$, wenn n die Ordnung der Gleichung dieser Curve, d die Anzahl der Doppelpunkte und r die Anzahl der Spitzen der Curve angiebt; hat die Curve mehrfache Punkte, so muss jeder derselben in dieser Formel mit seiner gleichwerthigen Anzahl von Doppelpunkten und Spitzen angerechnet werden, wie es die Theorie der algebraischen Curven lehrt. Siehe Bd. 2, Kap. 5.

Für jeden Verzweigungspunkt muss

$$\frac{\partial f}{\partial w}=0 \quad \textit{oder} \quad \frac{\partial w}{\partial z}=\infty \quad \textit{sein.}$$

Dies ist jedoch keine ausreichende Bedingung dafür, dass eine Verzweigung stattfinde; denn, wenn z. B. ausser

$$\frac{\partial f}{\partial w} = 0 \quad \text{auch} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ist, so kann es eine Verzweigung nicht mehr geben.

Wenn die Grundgleichung $f = 0$ die Form

$$z - (a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_n) = 0$$

hat, so sind die Verzweigungen: der Punkt $z = \infty$, der eine Verzweigung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, und die Punkte z, denen die Werthe von w entsprechen, welche die Wurzeln der Gleichung

$$n a_0 w^{n-1} + (n-1) a_1 w^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

sind. Die linke Seite dieser Gleichung erhält man durch Differentiation der linken Seite von $f = 0$ nach w.

Hat die Grundgleichung die Gestalt

$$w^2 - (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n) = 0,$$

so gibt es n Verzweigungspunkte; sie sind die Wurzeln der Gleichung:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Der grössere Theil der vorstehenden Sätze rührt von Puiseux her; siehe dessen classische Arbeit in dem *Journ. de Liouville,* 15, 1850, *Recherches sur les fonctions algébriques.*

§ 2. Die Construction der Riemann'schen Fläche.

Zum Studium der algebraischen Functionen eignen sich besonders gut die sogenannten *Riemann'schen Flächen,* welche, wie der Name sagt, Riemann zuerst eingeführt hat (*Diss.,* 1851). Wir werden diesen Flächen in dem zweiten Theil des vorliegenden Werkes ein besonderes Kapitel widmen und sie dort vom geometrischen Gesichtspunkt aus betrachten (vergl. Bd. 2, Kap. 18, § 4); hier wollen wir nur insoweit einen Begriff von ihnen geben, als es zur Darstellung der algebraischen Functionen nöthig ist.

Wir nehmen an, die algebraische Function w von z besitze n Werthe und denken uns statt einer einzigen Ebene z, n Ebenen z so aufeinander gelegt, dass sich die Punkte, für welche z das nämliche ist, entsprechen; in jede Ebene legen wir nun einen der n Werthe, die w für dasselbe z annimmt; schliesslich ver-

binden wir diese Ebenen in der Art, dass man, von einem Punkt ausgehend und die ganze Gesammtheit der Ebenen auf einem beliebigen Weg durchlaufend, stets mit demselben Werthe von w wieder zum Ausgangspunkt zurückkehrt.

Die aufeinander gelegten Ebenen, welche die Riemann'sche Fläche zusammensetzen, pflegt man *Blätter* zu nennen.

Zum bessern Verständniss wollen wir zunächst annehmen, es handele sich um nur zwei Ebenen ($n = 2$); man bezeichne die Verzweigungspunkte, die in diesem Fall in gerader Anzahl auftreten müssen, und verbinde sie zu je zweien (d. h. den 1ten mit dem 2ten, dann den 3ten mit dem 4ten, etc.) durch beliebige Linien (speciell auch Gerade), die sich nicht schneiden (*Querschnitte*). Macht man nun Schnitte längs dieser Linien durch die Ebenen und verbindet den Rand auf der rechten Seite der oberen Ebene mit dem Rand auf der linken der unteren Ebene und ebenso den Rand auf der linken Seite der oberen mit dem auf der rechten der unteren Ebene, so werden die beiden Ebenen dadurch so verbunden, dass man von der einen auf die andere übergehen kann, dass man sich aber *nicht in derselben Ebene* um einen Verzweigungspunkt herum bewegen kann; d. h. wenn man einen Kreis um einen Verzweigungspunkt durchläuft, so kommt man von der oberen zur unteren Ebene, um dann nach einer Umdrehung zur oberen Ebene zurückzukehren.

Wir gehen nun zu der allgemeinen Voraussetzung über, es seien n Ebenen z aufeinander gelegt; wenn alsdann $z = z_0$ ein Verzweigungspunkt ist, um welchen sich m_1 der n Werthe w cyclisch untereinander vertauschen, und andere m_2 dann ihrerseits wieder einen Cyclus bilden etc. (vergl. § 1), so werden von z_0 aus so viele Schnitte in die verschiedenen Ebenen gemacht und diese Ebenen so miteinander verbunden, dass die ersten m_1 cyclisch zusammenhängen (die 1te mit der 2ten, diese mit der 3ten, . . ., die $m_1$te mit der 1ten); auf dieselbe Art werden dann auch die m_2 folgenden Ebenen cyclisch verbunden und so fortgefahren.

Wenn die durch $f(w, z) = 0$ dargestellte Curve nicht zerlegbar ist, d. h. sich nicht in Curven geringeren Grads theilen lässt, so erhält man in der Gesammtheit der n so verbundenen Ebenen eine einzige Fläche, welche sich stetig derart deformiren lässt, dass eine mannigfaltig verschlungene Fläche von gewöhnlichem Aussehen resultirt und man von einem Punkt stetig zu einem beliebigen anderen gelangen kann. Ist f dagegen zerlegbar, so erhält man nicht eine einzige Fläche, sondern soviele, als Factoren vorhanden sind, in welche sich f theilen lässt; und man

kann niemals von einem Punkt der einen Fläche aus einen Punkt einer anderen stetig erreichen.

Wenn die durch $f(w, z) = 0$ *dargestellte nicht zerlegbare Curve vom Geschlecht p ist* (vergl. Bd. 2, Kap. 5), *so heisst auch die entsprechende Riemann'sche Fläche vom Geschlecht p; diese positive ganze Zahl stellt die grösste Anzahl geschlossener Schnitte dar, die man durch die Fläche machen kann, ohne sie zu trennen.* Siehe Bd. 2, Kap. 18, § 4.

Eine Riemann'sche Fläche vom Geschlecht p kann stetig in eine Kugel mit p Henkeln transformirt werden, d. h. eine Kugel, in welche man 2p Löcher gemacht und diese zu je zweien durch Flächen von der Form gebogener Röhren verbunden hat.

Eine Fläche heisst *einfach zusammenhängend,* wenn sie mittelst eines beliebigen durch sie geführten geschlossenen Schnittes oder auch, wenn die Fläche Ränder hat, mittelst eines beliebigen Schnittes, der einen Punkt des Randes mit einem andern Punkt dieses Randes verbindet, in Theile zerlegt wird; so ist z. B. eine Kugel einfach zusammenhängend (Fläche ohne Rand) oder ein von einem Kreis begrenztes Stück Ebene (Fläche mit Rand).

Jede Riemann'sche Fläche vom Geschlecht p lässt sich einfach zusammenhängend machen: durch p geschlossene Schnitte (Schnitte A), p offene Schnitte, d. h. solche, die zwei Punkte des ganzen Randes verbinden, den die Fläche durch die ersteren Schnitte erhalten hat (Schnitte B), und durch $p - 1$ *andere offene Schnitte (Schnitte C).*

Die Gesammtheit dieser Schnitte stellt einen einzigen Rand vor, den man, von einem Punkt ausgehend, ganz durchlaufen kann, und welcher der Rand der einfach zusammenhängend gemachten Fläche ist.

Wenn sich eine Riemann'sche Fläche vom Geschlecht p in eine solche transformiren lässt, die nur zwei Blätter hat, so heisst sie *eine hyperelliptische Riemann'sche Fläche.*

Der canonische Typus einer hyperelliptischen Riemann'schen Fläche vom Geschlecht p ist eine aus zwei Blättern und $2p + 2$ *Verzweigungspunkten gebildete Fläche.*

Für $p = 1$ *und* $p = 2$ *ist jede Riemann'sche Fläche hyperelliptisch;* man erhält im ersten Fall speciell die sogenannte *elliptische Riemann'sche Fläche.*

Bei einer hyperelliptischen Fläche mit zwei Blättern wird das System der Schnitte A, B, C, welche sie zu einer einfach

zusammenhängenden machen, auf folgende Art gebildet: Wenn $a_1, a_2, \cdots, a_{2p+2}$ *die Verzweigungspunkte sind und die Geraden* $(a_1 a_2), (a_3 a_4), \cdots, (a_{2p+1} a_{2p+2})$ *die Querschnitte, so zeichne man in einer der Ebenen geschlossene Curven auf, welche in ihrem Innern die ersten p dieser Querschnitte enthalten; man erhält so die Linien* $A_1, A_2, \cdots, A_p$; *darauf bilde man* B_1, *indem man eine geschlossene Curve zieht, die in einer der Ebenen von einem Punkt von* $(a_1 a_2)$ *ausgeht, einen Punkt von* $(a_{2p+1} a_{2p+2})$ *erreicht, alsdann, auf die gegenüberliegende Ebene übergehend, wieder zu demselben Punkt von* $(a_1 a_2)$ *zurückkehrt; ähnlich bilde man* $B_2, \cdots, B_p$; *diese Linien* $B_1, \cdots, B_p$ *werden so aufgezeichnet, dass sie sich nicht schneiden; schliesslich ziehe man noch die Linien* $C_1, \cdots, C_{p-1}$, *indem man einen Punkt von* A_2 *mit einem solchen von* B_1, *einen von* A_3 *mit einem von* B_2, *etc. verbindet.*

Weitere Einzelheiten über dieselben Probleme, sowie verschiedene Literaturangaben findet man in Bd. 2, Kap. 18, § 4.

§ 3. Die Functionen auf der Riemann'schen Fläche.

Für jeden Punkt der Riemann'schen Fläche gibt es einen einzigen Werth von z und einen einzigen Werth von w; dieser letztere bleibt unverändert, welchen Weg man auf der Fläche auch einschlagen mag, um den Punkt zu erreichen.

Denken wir uns eine monogene Function von z und w, welche für jedes Werthepaar z, w, das der Relation $f(w, z) = 0$ genügt, d. h. für jeden Punkt der Riemann'schen Fläche, einen einzigen Werth hat; eine solche Funktion wird *eine eindeutige Function auf der Riemann'schen Fläche* genannt.

Für eine solche in einem Theil der Riemann'schen Fläche betrachtete Function gelten selbstverständlich alle Theoreme über die monogenen Functionen in Kap. 13, § 5; so gilt z. B. das Cauchy'sche Theorem und die sich aus ihm ergebenden Entwickelungen in Reihen für einen einfach zusammenhängenden Theil der Fläche, welcher in seinem Inneren keine singulären Punkte der Function oder *Verzweigungs*punkte der Fläche enthält.

Wenn eine so beschaffene Function in einem *beliebigen* Punkt der Fläche (aber nicht in einem *Verzweigungs*punkt) einen *Pol* hat (vergl. Kap. 13, § 1), so bleiben die eben genannten Theoreme auch dann unverändert; und in der Umgebung dieses Punktes lässt sich die Function in eine holomorphe Function und eine rationale zerlegen, deren *Residuum* in dem

Cauchy'schen Sinn (vergl. Kap. 13, § 5) *das Residuum der Function in diesem Pol* ist.

Daraus folgt, dass in diesem Fall das Integral der Function, wenn es über eine Linie erstreckt wird, welche diesen Pol umgibt, dem mit $2\pi i$ multiplicirten Residuum gleich ist.

Wenn dagegen der Pol z_0 der Function ein Verzweigungspunkt m^{ter} Ordnung für die Riemann'sche Fläche ist, so lässt sich die Function in der Umgebung dieses Pols nicht mehr in eine nach ganzen Potenzen von $z - z_0$, sondern in eine nach ganzen Potenzen von $(z - z_0)^{\frac{1}{m}}$ fortschreitende Reihe entwickeln (siehe auch § 1); *in dieser Entwickelung tritt auch eine endliche Anzahl von Termen mit negativen Potenzen von $(z - z_0)^{\frac{1}{m}}$ auf.*

Der Coefficient von $\frac{1}{z - z_0}$ in dieser Entwickelung heisst immer das diesem *Pol* entsprechende *Residuum* der Function; es besteht dann der Satz, *dass das Integral der Function, wenn es über einen geschlossenen geeignet kleinen Weg erstreckt wird, welcher auf der Riemann'schen Fläche den Verzweigungspunkt m^{ter} Ordnung, der zugleich Pol für die Function ist, umgibt, dem mit $2im\pi$ multiplicirten Residuum gleich ist.*

Jede eindeutige Function auf der Riemann'schen Fläche, welche keine anderen Singularitäten als Pole besitzt, ist eine rationale Function von w und z (eine algebraische Function von z).

Jede eindeutige Function auf der Riemann'schen Fläche muss nothwendiger Weise Pole haben, d. h. sie kann auf der ganzen Fläche nicht immer endlich bleiben, es sei denn, sie reducire sich auf eine Constante.

Jede algebraische Function (eindeutige Function auf der Riemann'schen Fläche) nimmt dieselbe Anzahl mal den nämlichen beliebigen Werth an; insbesondere hat sie ebensoviel Nullpunkte wie Pole. Die Zahl k, welche angibt, wie oft die algebraische Function denselben bestimmten Werth annimmt, pflegt man *den Grad der Function* zu nennen.

Die Gruppe von k Punkten, in welchen die algebraische Function den nämlichen bestimmten Werth erhält, heisst *corresidual* zu der Gruppe von k Punkten, in welchen diese Function einen anderen Werth annimmt.

Es gibt keine algebraische Function, welche weniger als $p + 1$ willkürlich gegebene Pole hat; dabei ist p das Geschlecht der zu Grunde liegenden Riemann'schen Fläche.



Die allgemeinste algebraische Function mit $p+1$ willkürlich gegebenen Polen enthält linear zwei homogene Constante, d. h. sie hat die Form $c_1 F + c_2$, worin F eine bestimmte Function von solcher Beschaffenheit ist.

Die allgemeinste algebraische Function mit k willkürlich festgesetzten Polen enthält linear $k-p+1$ beliebige Constante, d. h. es existiren $k-p$ wirkliche linear unabhängige Functionen (mit Ausschluss der Constanten), welche die gegebenen k Punkte oder einen Theil von ihnen zu Polen haben. Das Riemann'sche Theorem, Crelle, 54, 1857, *Theorie der Abel'schen Functionen,* Nr. 5.

Eine Verallgemeinerung dieses Theorems bezieht sich auf den Fall, in welchem die k gegebenen Punkte specielle Lagen haben.

Interpretirt man $f(w, z) = 0$ als Gleichung einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung, so heisst *adjungirte Curve* von der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung diejenige Curve dieser Ordnung, welche $r-1$ mal durch alle $r$fachen Punkte der ursprünglichen Curve geht. Siehe Bd. 2, Kap. 5, § 4.

Jede adjungirte Curve von der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung hat $2p-2$ variabele Schnittpunkte (ausser den vielfachen Punkten) mit der ursprünglichen Curve und es existiren p adjungirte Curven von der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, die unter sich linear unabhängig sind.

Wenn k Punkte zwischen den (variabelen) Schnittpunkten einer adjungirten Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung mit f liegen, so sagt man, die k Punkte bilden *eine specielle Gruppe.*

Sind k Punkte der Art gegeben, dass τ linear unabhängige adjungirte Curven von der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung durch sie gehen, so enthält die allgemeinste algebraische Function, welche diese k Punkte oder einen Theil von ihnen zu Polen hat, linear $k-p+\tau+1$ willkürliche homogene Constante. Theorem von Riemann-Roch, Anzahl der willkürl. Const. einer alg. Funct., Crelle, 64, 1865. *Für $\tau = 0$ kommt man auf den obigen Satz Riemann's zurück.*

Eine algebraische Function, deren Pole *eine specielle Gruppe* bilden, heisst *eine specielle Function.*

Die Anzahl der Pole einer speciellen Function beträgt höchstens $2p-2$ und kann diese Grenze wirklich erreichen.

Jeder speciellen Function lässt sich die Form $\frac{\Phi}{\Psi}$ geben,

wobei Φ und Ψ die linken Seiten der Gleichungen zweier adjungirter Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung vorstellen.

Die Theorie der algebraischen Functionen ist mit derjenigen der Punktgruppen auf einer Curve eng verbunden. Eine hervorragende classische Arbeit über den Gegenstand ist von Brill-Noether, *Ueber die algebr. Funct. u. ihre geometr. Anwend., Math. Ann.*, 7, 1874. Ausführlicheres findet man in Bd. 2, Kap. 5, § 4.

Ueber den Riemann-Roch'schen Satz vergleiche ausser den citirten Arbeiten auch Lindemann, *Untersuchungen über den Riemann-Roch'schen Satz*, Leipzig 1879; Noether, *Sitz.-Ber. Phys.-med. Soc.*, Erlangen 1879; etc.

Ehe wir diesen Paragraphen beendigen, wollen wir noch hinzufügen, dass sich eine Theorie der monogenen Functionen auf einer Fläche auch dadurch aufstellen lässt, dass man die Begriffe der Functionen von complexen Variabelen auf der Ebene verallgemeinert.

Wenn eine Fläche gegeben ist, so betrachte man auf ihr ein System krummliniger Coordinaten p, q; und E, F, G seien die Coefficienten der Differentialform, welche das Quadrat des Linienelements der Fläche ausdrückt. Vergl. die Differentialgeometrie Bd. 2, Kap. 16.

Wenn p', q' reelle Functionen von p, q sind, die den beiden Beziehungen

$$\frac{\partial q'}{\partial p} = -\frac{E\frac{\partial p'}{\partial q} - F\frac{\partial p'}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$\frac{\partial q'}{\partial q} = +\frac{G\frac{\partial p'}{\partial p} - F\frac{\partial p'}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}$$

genügen, so ist die complexe Variabele $p'+iq'$ eine Function des Punktes der Fläche, der die Coordinaten p, q hat; und ihre Derivirte hat einen von der Richtung, in welcher sich der Punkt p, q auf der gegebenen Fläche zu bewegen sucht, unabhängigen Werth. Sie ist jedoch keine Function der complexen Variabelen $p+iq$, es sei denn p, q stellten ein System isometrischer Coordinaten dar; im Allgemeinen ist sie aber die Funktion einer anderen complexen Combination der beiden Variabelen p, q; diese Combination ist das Integral des genauen Differentials, welches man durch Multiplication des Ausdrucks

$$\left(\sqrt{E}\,dp + \frac{F}{\sqrt{E}}\,dq\right) + i\,\frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}\,dq$$

mit einem seiner integrirenden Factoren von der allgemeinen complexen Form $\mu - i\nu$ erhält.

Die obigen beiden Beziehungen bilden die gewöhnlichen nothwendigen und ausreichenden Relationen, damit eine complexe Variabele die Function einer anderen sei; *aus ihnen ergeben sich die beiden anderen:*

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{G\frac{\partial q'}{\partial p} - F\frac{\partial q'}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{E\frac{\partial q'}{\partial q} - F\frac{\partial q'}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{G\frac{\partial p'}{\partial p} - F\frac{\partial p'}{\partial q}}{\sqrt{EG-F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{E\frac{\partial p'}{\partial q} - F\frac{\partial p'}{\partial p}}{\sqrt{EG-F^2}}\right) = 0,$$

welche die Relationen $\Delta = 0$ der gewöhnlichen Theorie ersetzen (vergl. Kap. 13).

Stellt man $p' + iq'$ durch die Punkte einer Ebene dar, so ist diese Variabele eine Function des Punktes der Fläche in dem angegebenen Sinn, wenn die Fläche und ein Theil der Ebene sich mit *conformer Abbildung* (vergl. Bd. 2, Kap. 16, § 8) entsprechen; und allgemeiner: wenn p', q' die krummlinigen Coordinaten eines Punktes einer anderen Fläche sind, so entspricht das Problem: *den Punkt der einen Fläche zur monogenen Function des Punktes der anderen zu machen*, dem Problem: *die eine Fläche auf der anderen conform abzubilden.*

Die vorstehenden Resultate hat zuerst Beltrami in einer vortrefflichen Abhandlung mitgetheilt, *Ann. di mat.*, 1, S. 329; weitere Angaben und Einzelheiten auch bez. der Funktionen der Punkte einer Kugel findet man bei Neumann, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*, 2. Ausg., Leipzig 1884; Klein, *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*, Leipzig 1882, sowie in seinen autographirten Vorlesungen über Riemann'sche Flächen.

§ 4. Die Abel'schen Integrale.

Wenn $R(w, z)$ eine algebraische Function von z ist, und w, z durch die rationale Beziehung

$$f(w, z) = 0$$

verbunden sind, so heisst das Integral

$$\int R(w, z)\, dz$$

ein *Abel'sches Integral.*

Die durch dieses Integral dargestellte Function von z ist im Allgemeinen eine Function mit unendlich vielen Werthen; d. h. verfolgt man auf der Riemann'schen Fläche verschiedene Integrationswege, so kann man zu demselben Punkt mit beliebig vielen verschiedenen Werthen des Integrals gelangen.

Wenn wir durch das System der Schnitte A, B, C die Fläche einfach zusammenhängend machen (vergl. § 2), so ist die Differenz zwischen den Werthen des Integrals in zwei sich entsprechenden Punkten der durch einen Schnitt A erzeugten Ränder eine constante Grösse und heisst *Periodicitätsmodul* 1ter *Gattung;* den Schnitten B entsprechen *die Periodicitätsmoduln* 2ter *Gattung; für die Schnitte C dagegen ist die Differenz Null.*

Jedes Abel'sche Integral hat wenigstens $2p$ Periodicitätsmoduln; der Unterschied zweier Werthe, die es in einem Punkt annehmen kann, ist die Summe ganzer Vielfachen seiner Periodicitätsmoduln.

Die Abel'schen Integrale unterscheiden sich nach der Beschaffenheit der Function $R(w, z)$, oder besser nach der Beschaffenheit der Pole dieser Function.

Wenn diese Function nur die Verzweigungspunkte zu Polen hat, so kann das Integral immer endlich bleiben und man erhält das Integral 1ter *Gattung; hat die Function R den Punkt (w_0, z_0) zum Pol von höherer als der ersten Ordnung, dessen Residuum* (vergl. § 3) *gleich Null ist, so wird das Integral in diesem Punkt unendlich gross, wie eine algebraische Function (der algebraische Unendlichkeitspunkt) und es ergibt sich das Integral* 2ter *Gattung; hat schliesslich R einen Punkt (w_0, z_0) zum Pol* 1ter *Ordnung, so wird das Integral in diesem Punkt unendlich gross, wie der Logarithmus einer algebraischen Function (logarithmischer Unendlichkeitspunkt) und man erhält ein Integral* 3ter *Gattung.*

Die Integrale der beiden ersten Gattungen haben zu Periodicitätsmoduln nur die $2p$ oben angeführten Moduln; diejenigen 3ter *Gattung dagegen ausserdem noch andere, die von den logarithmischen Unendlichkeitspunkten abhängen; d. h. umkreist man einen dieser Unendlichkeitspunkte, so wächst der Werth des Integrals um die mit einem ganzen Vielfachen des dem Unendlichkeitspunkt entsprechenden Residuums multiplicirte Grösse $2\pi i$.*



Die Summe der Residuen der Integrale 3ter *Gattung ist immer Null.*

Jedes Abel'sche Integral lässt sich immer mittelst einer linearen Combination von Integralen 1ter, 2ter, 3ter *Gattung bilden.*

Wenn die Variabele eines Abel'schen Integrals die Gesammtheit der 3 Systeme von Schnitten A, B, C stetig durchläuft, d. h. den ganzen Umfang der einfach zusammenhängend gemachten Riemann'schen Fläche, so ist das Resultat identisch Null.

Im Fall des Geschlechts $p = 0$, *z. B. in dem Fall der einfachen complexen Ebene existiren keine Integrale* 1ter *Gattung; dies heisst: die Integrale der rationalen Functionen einer Variabelen sind immer entweder* 2ter *oder* 3ter *Gattung, es gibt also für* $p = 0$ *keine Functionen, auch keine polydromen, die in der ganzen complexen Ebene, auch wenn* $z = \infty$ *wird, endlich bleiben.*

Wenn die zu Grunde liegende Riemann'sche Fläche hyperelliptisch oder speciell elliptisch ist, so heissen die entsprechenden Abel'schen Integrale *hyperelliptisch* bez. *elliptisch.* Näheres über die elliptischen Integrale findet man in Kap. 7, § 4.

§ 5. Die Abel'schen Integrale erster Gattung.

Es existiren p Abel'sche Integrale 1ter *Gattung, die linear unabhängig von einander sind, wenn die zu Grunde liegende Riemann'sche Fläche unzerlegbar und vom Geschlecht p ist.*

Lässt sich dagegen $f(w, z) = 0$ *in k Factoren zerlegen, so gibt es* $p - k + 1$ *linear unabhängige Abel'sche Integrale* 1ter *Gattung,* Christoffel, *Ann. di mat.*, 10, 1880—1882, *Algebr. Beweis des Satzes von der Anzahl linear unabhängiger Integrale* 1ter *Gattung.*

Jedes Integral 1ter *Gattung entspricht einer der p adjungirten Curven* $(n - 3)^{\text{ter}}$ *Ordnung.*

Wir wollen mit $w_1, w_2, \cdots, w_p$ diese Integrale 1ter Gattung bezeichnen und es seien ω_{ik}, $\omega_{i,p+k}$ ihre Periodicitätsmoduln; d. h. es sei ω_{ik} der Werth des Integrals w_i, wenn die Integrationsvariabele in positivem Sinn, d. h. in dem der Bewegung eines Uhrzeigers entgegengesetzten Sinn, die Linie B_k beschreibt, und ebenso sei $\omega_{i,p+k}$ der Werth dieses Integrals, wenn die Variabele die Linie A_k durchläuft. Die Grösse ω_{ik} lässt sich auch als die Differenz zwischen den beiden Werthen des Integrals an den zwei Rändern der Linie A_k definieren und ähnlich auch $\omega_{i,p+k}$ als die Differenz der zwei Werthe des Integrals an den beiden Rändern der Linie B_k.

Zwischen den Periodicitätsmoduln ω *bestehen die folgenden bilinearen Relationen, die* Riemann *gefunden hat, Crelle,* **54**; *Ges. math. Werke und wissenschaftl. Nachlass,* edirt von Dedekind und Weber, Leipzig, 1876, S. 124:

$$\sum_{k=1}^{p} (\omega_{ik}\,\omega_{j,\,p+k} - \omega_{i,\,p+k}\,\omega_{jk}) = 0;$$

ihre Anzahl beträgt $\frac{p(p-1)}{2}$.

Nimmt man zu diesen Relationen die analogen für die Periodicitätsmoduln der Integrale 2ter Gattung (siehe weiter unten) hinzu und löst sie auf eine gewisse Weise auf, so kann man zu Relationen kommen, in welchen die zweiten Indices der ω bei der Summirung unverändert bleiben, die ersten dagegen variiren, während hier das Gegentheil der Fall ist; die so erhaltenen Relationen heissen die Weierstrass'schen, *Beitr. zur Theorie der Abel'schen Integrale, Progr. d. Gymn. zu Braunsberg,* 1849, auch *Crelle's J.,* 47, 1854 (vergl. § 6).

Setzt man $\omega_{ik} = \alpha_{ik} + i\beta_{ik}$, *so ist die Summe*

$$\sum_{k=1}^{p} (\alpha_{ik}\,\beta_{i,\,k+p} - \alpha_{i,\,k+p}\,\beta_{ik})$$

jedenfalls von Null verschieden und positiv; sie stellt den Flächeninhalt der ganzen conformen Abbildung der Riemann'schen Fläche auf die Ebene des Integrals w_i *dar.*

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega_{11}, & \omega_{12}, & \cdots, & \omega_{1p} \\ \omega_{21}, & \omega_{22}, & \cdots, & \omega_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p1}, & \omega_{p2}, & \cdots, & \omega_{pp} \end{vmatrix}$$

muss von Null verschieden sein.

Es können die Moduln 1ter *Gattung nicht sämmtlich reell oder sämmtlich rein imaginär sein.*

Es gibt kein Integral 1ter *Gattung, dessen Periodicitätsmoduln in Bezug auf die Schnitte A oder die Schnitte B sämmtlich Null wären.*

Man kann p Integrale v 1ter *Gattung in Betracht ziehen, die lineare Combinationen der vorstehenden w sind und deren Periodicitätsmoduln in Bezug auf die Schnitte A die folgende Tabelle angibt:*

	A_1	A_2	$\cdots$	A_p
v_1	1	0	$\cdots$	0
v_2	0	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_p	0	0	$\cdots$	1

Diese Integrale heissen *normal.* Man beachte, dass Riemann statt dieser *normalen* Integrale solche betrachtet, für welche in der vorstehenden Tabelle als Elemente der Hauptdiagonale $i\pi$ an die Stelle von 1 zu setzen ist, während Clebsch-Gordan, *Abel'sche Functionen,* Leipzig 1866, S. 108 Integrale untersucht, bei welchen dieselben Elemente durch $2i\pi$ zu ersetzen sind.

Nennt man τ_{ij} die Periodicitätsmoduln der normalen Integrale in Bezug auf die Schnitte B, so erhält man die Relationen $\tau_{ij} = \tau_{ji}$; und es müssen überdies die imaginären Theile von τ_{ii} sämmtlich positiv sein.

Setzt man $\tau_{ij} = \gamma_{ij} + i\delta_{ij}$, so ist die quadratische Form

$$\sum \delta_{ij}\, n_i\, n_j\,,$$

in welcher die n beliebige reelle Zahlen sind, immer positiv und von Null verschieden (eine definite quadratische Form).

§ 6. Die Abel'schen Integrale zweiter Gattung.

Es gibt p linear von einander unabhängige Integrale 2ter Gattung, die unendlich von der 1ten Ordnung in demselben bestimmten Punkt $z = t$ werden.

Differenzirt man eines dieser Integrale $r - 1$ mal nach t, so erhält man ein Integral 2ter Gattung, welches im Punkt t ∞^r wird.

Ein Integral 2ter Gattung, welches in zwei Punkten ∞^1 wird, lässt sich als Summe zweier anderen ausdrücken, von denen jedes nur in einem Punkt ∞^1 wird.

Es lassen sich Integrale 2ter Gattung $Y^{(i)}$ derart bestimmen, dass die Periodicitätsmoduln für die Schnitte A sämmtlich Null sind; die Periodicitätsmoduln auf den Schnitten B ergeben sich

dann als algebraische Functionen von t, d. h. gleich $-2i\pi\psi_i(t)$, *worin* $\psi_i(z)$ *die linke Seite der Gleichung derjenigen adjungirten Curve* $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung ist, welche dem normalen Integral* 1ter *Gattung* v_i *entspricht.*

Wenn die p Punkte $t', t'', \cdots, t^{(p)}$ *nicht auf einer der Fundamentalcurve* $f(w, z) = 0$ *adjungirten Curve* $(n-3)^{\text{ter}}$ *Ordnung liegen, so lässt sich jedes Integral* $Y^{(t)}$ 2ter *Gattung, welches einen beliebigen Unendlichkeitspunkt t,* 1ter *Ordnung hat, und dessen Moduln auf den Schnitten A gleich Null sind, durch die analogen Integrale bez. der Punkte* $t', t'', \cdots$ *ausdrücken. Die entsprechende Formel erhält man durch Entwickelung der Determinante:*

$$\begin{vmatrix} Y^{(t)}, & Y^{(t')}, & \cdots, & Y^{(t^p)} \\ \psi_1(t), & \psi_1(t'), & \cdots, & \psi_1(t^p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_p(t), & \psi_p(t'), & \cdots, & \psi_p(t^p) \end{vmatrix} = (\text{einer algebraischen Function der } t),$$

in welcher die ψ die oben angegebene Bedeutung haben.

Nennt man $Y_1, \cdots, Y_p$ die Quotienten, welche man erhält, wenn die in der Matrix der letzten p Columnen der vorstehenden Determinante enthaltenen Minoren (mit Ausschluss des durch die ψ allein gebildeten Minors) durch die Determinante

$$C = -\begin{vmatrix} \psi_1(t'), & \cdots, & \psi_1(t^p) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_p(t'), & \cdots, & \psi_p(t^p) \end{vmatrix}$$

dividirt werden, *so ergiebt sich die Formel*

$$Y^{(t)} = \sum \psi_i(t)\, Y_i + (\text{einer algebraischen Function der } t).$$

Die Integrale $Y_1, \cdots, Y_p$ nennt man wohl *normal,* sie verhalten sich in Bezug auf die Periodicität auf ganz besondere Art. *Ihre Moduln auf den Schnitten A sind sämmtlich Null und ebenso die auf den Schnitten B bis auf einen, der gleich* $2i\pi$ *ist: für Y_i wird der Modul bez. B_i gleich* $2i\pi$; *die Moduln dieser Integrale sind unabhängig von den Unendlichkeitspunkten. Aendert man die Unendlichkeitspunkte, so unterscheiden sich die neuen Integrale von den früheren durch algebraische Functionen.*

Wird die vorstehende Formel $r-1$ mal nach t differenzirt, so erhält man das Integral 2ter *Gattung, welches im Punkt t* ∞^r *wird, als lineare Function der p normalen Integrale.*

Nennt man $Z^{(t)}$ ein beliebiges Integral 2ter *Gattung mit dem Unendlichkeitspunkt* 1ter *Ordnung in t und bildet* $Z^{(t')}, \cdots, Z^{(t^p)}$ *wie in den vorstehenden Theoremen, so ergeben sich wieder die nämlichen Resultate, wie zuvor, wenn man nur die Y in Z und die ψ in φ verwandelt und mit φ die linken Seiten der Gleichungen derjenigen adjungirten Curven* $(n-3)$ter *Ordnung bezeichnet, welche den Integralen* 1ter *Gattung w, aber nicht den normalen Integralen v entsprechen.* Vergl. § 5.

Die Integrale $Z_1, \cdots, Z_p$, *die man so erhält, heissen ebenfalls normal; auch ihre Moduln sind unabhängig von den Unendlichkeitspunkten.*

Werden unter $-\eta_{i,k}$, $-\eta_{i,k+p}$ die Periodicitätsmoduln von Z_i in Bezug auf die Schnitte A_k, B_k verstanden, *so ergeben sich die bilinearen Relationen*

$$\sum_{k=1}^{p}(\omega_{i,k}\eta_{j,k+p}-\omega_{i,k+p}\eta_{j,k})=0, \text{ wenn } i \text{ von } j \text{ verschieden ist und } =2i\pi, \text{ wenn } i=j \text{ ist;}$$

darin bezeichnen die Grössen ω die Moduln der Integrale 1ter *Gattung.*

Ferner bestehen zwischen den Moduln 2ter *Gattung allein die Beziehungen*

$$\sum_{k=1}^{p}(\eta_{i,k}\eta_{j,k+p}-\eta_{i,k+p}\eta_{j,k})=0;$$

ihre Anzahl beträgt $\frac{p(p-1)}{2}$.

Wird $\omega_{p+i,k}$ an die Stelle von $\eta_{i,k}$ gesetzt, *so sind alle vorstehenden Formeln, sowie auch die des letzten Paragraphen in der einzigen Formel enthalten (die Riemann'schen Relationen):*

$$\sum_{k=1}^{p}(\omega_{i,k}\omega_{j,k+p}-\omega_{j,k}\omega_{i,k+p})=0, \text{ wenn } j \text{ von } i+p \text{ verschieden ist, und } =2i\pi, \text{ wenn } j=i+p \text{ ist;}$$

in ihr sind den i, j *alle Werthe* $1, 2, \cdots, 2p$ *beizulegen.*

Kehrt man diese Beziehungen um, so ergeben sich die Weierstrass'schen Formeln:

$$\sum_{k=1}^{p}(\omega_{k,i}\omega_{k+p,j} - \omega_{k,j}\omega_{k+p,i}) = 0,$$ *wenn* j *von* $i+p$ *verschieden ist, und*

$= 2i\pi$, *wenn* $j = i + p$ *ist.*

Ihre Anzahl beträgt $\frac{2p(2p-1)}{2}$.

Die Determinante von der $2p^{\text{ten}}$ *Ordnung, die sich aus allen* ω *der Integrale* 1ter *und* 2ter *Gattung bilden lässt,*

$$\begin{vmatrix} \omega_{1,1}, & \cdots, & \omega_{1,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{2p,1}, & \cdots, & \omega_{2p,2p} \end{vmatrix}$$

ist von Null verschieden.

Die allgemeinste algebraische Function, welche in r *Punkten* $t', t'', \cdots, t^r$ *unendlich gross wird, lässt sich immer durch die Formel ausdrücken:*

$$F = c'Z^{(t')} + \cdots + c^{(r)}Z^{(t^{(r)})} + C;$$

dabei wird die Anzahl der c, *die willkürlich bleiben, durch das Riemann-Roch'sche Theorem bestimmt.*

§ 7. Die Abel'schen Integrale dritter Gattung.

Aus dem Theorem in § 4, dass bei einem Integral 3ter Gattung die Summe der logarithmischen Residuen Null sein muss, folgt, *dass ein solches Integral wenigstens zwei logarithmische Unendlichkeitspunkte besitzt.*

Die Grenze des Integrals 3ter *Gattung mit zwei logarithmischen Unendlichkeitspunkten, wenn sich diese unbegrenzt einander nähern, ist ein Integral* 2ter *Gattung, welches diesen Punkt zum algebraischen Unendlichheitspunkt hat.*

Jedes Integral 3ter *Gattung mit* r *logarithmischen Unendlichkeitspunkten lässt sich linear durch* r *Integrale* 3ter *Gattung ausdrücken, von denen jedes nur zwei Unendlichkeitspunkte besitzt.*

Um das Integral 3ter *Gattung mit zwei Unendlichkeitspunkten auf der einfach zusammenhängend gemachten Riemann'schen Fläche eindeutig zu machen, muss man die beiden Unendlichkeitspunkte durch einen Schnitt verbinden; auf der so durchschnittenen Fläche ist das Integral eindeutig.*

Die Derivirte eines Integrals 3ter *Gattung in Bezug auf einen der logarithmischen Unendlichkeitspunkte ist ein Integral*

2ter *Gattung, welches nur diesen Punkt zum algebraischen Unendlichkeitspunkt* 1ter *Ordnung hat.*

Bezeichnet man mit P^{tt_1} das Integral 3ter Gattung mit zwei logarithmischen Unendlichkeitspunkten t, t_1 und mit $Z^{(t)}$ dasjenige 2ter Gattung mit dem algebraischen Unendlichkeitspunkt t, *so gilt die Formel:*

$$P^{tt_1} = \int_t^{t_1} Z^{(t)} dt.$$

Der Ausdruck $Z^{(t)}$ ist seinerseits ein zwischen zwei Punkten der Riemann'schen Fläche erstrecktes Integral; die Punkte wollen wir z und z_1 nennen und sie als untere Indices verwenden. *Es ist dann vollständig*

$$P_{zz_1}^{tt_1} = \int_t^{t_1} Z_{zz_1}^{(t)} dt.$$

Führt man die Normalintegrale 2ter *Gattung ein, so wird*

$$P_{zz_1}^{tt_1} = w_1^{tt_1} Z_1^{zz_1} + \cdots + w_p^{tt_1} Z_p^{zz_1} + \int_t^{t_1} F dt,$$

worin F eine algebraische Function von z, z_1, t und allen Punkten t', t'', $\cdots$, t^p bedeutet, mit deren Hilfe die Normalintegrale Z_1, Z_2, $\cdots$, Z_p gebildet werden. Der letzte Term ist eine in Bezug auf z eindeutige Function; denn die Integration wird nur bez. der Variabelen t ausgeführt.

Die Periodicitätsmoduln von $P_{zz_1}^{tt_1}$ sind:

$$-\sum_{i=1}^{p} w_i^{tt_1} \eta_{ik} \text{ für den Schnitt } A_k,$$

$$-\sum_{i=1}^{p} w_i^{tt_1} \eta_{i,k+p} \text{ für den Schnitt } B_k.$$

Geht man statt von den Normalintegralen Z_i von den Y_i aus (vergl. § 6), so erhält man ein Integral 3ter Gattung, das meistens Π genannt wird und von Clebsch und Gordan benutzt wurde.

Die Periodicitätsmoduln von $\Pi_{zz_1}^{tt_1}$ haben auf den Schnitten A den Werth Null und sind auf den Schnitten B_i gleich $2i\pi v_i^{tt_1}$.

Das Integral Π hat die Eigenschaft

$$\Pi_{z z_1}^{t t_1} = \Pi_{t t_1}^{z z_1};$$

(die Vertauschung der Parameter t, t_1 mit den Argumenten $z z_1$).
Es besteht die Formel

$$\Pi_{z z_1}^{t t_1} + \Pi_{z z_1}^{t_1 t_2} + \Pi_{z z_1}^{t_2 t} = 0,$$

wenn der Integrationsweg von z nach z_1 den Weg $t t_1 t_2 t$ nicht schneidet.

Für jedes beliebige Integral 3ter Gattung $P_{z z_1}^{t t_1}$ ist die Summe

$$P_{z z_1}^{t t_1} + P_{z z_1}^{t_1 t_2} + P_{z z_1}^{t_2 t}$$

stets ein Integral 1ter Gattung.

Die Integrale 2ter und 3ter Gattung, die in dem vorigen und in diesem Paragraphen betrachtet wurden, sind zu normalen gemacht worden, um ihre Periodicitätsmoduln auf eine möglichst einfache Form zurückzuführen. Die neuesten Untersuchungen Klein's und seiner Schüler haben dagegen ein anderes Ziel im Auge; sie suchen Integrale 2ter und 3ter Gattung herzustellen, deren Integranden invariante Ausdrücke in Bezug auf die Fundamentalform $f(w, z) = 0$ bilden, welche die Riemann'sche Fläche darstellt.

Es werden dabei an die Stelle von w und z drei homogene Variabele eingeführt und es wird ein mit dem Buchstaben Q bezeichnetes Integral 3ter Gattung construirt, welches auch die Eigenschaft besitzt, dass es sich, wie das Π Clebsch-Gordan's, bei der Vertauschung der Parameter mit den Argumenten nicht ändert.

Wir können uns hier nicht weiter auf die Einzelheiten dieser neuen Untersuchungen einlassen und schliessen mit einigen Literaturangaben über die Abel'schen Integrale.

Es war Abel, der zuerst in Bezug auf diese Integrale das berühmte und wichtige Theorem entdeckt hat, von dem wir in dem nächsten Paragraphen sprechen werden. Die Theorie der Abel'schen Integrale hängt mit der Lehre von den Abel'schen Functionen, von welcher in Kap. 17 die Rede sein wird, so eng zusammen, dass die beiderseitige Literatur sich vermischt. Grundlegend für diese Fragen sind die *Theorie der Abel'schen Functionen* (*Crelle*, Bd. 54), wieder abgedruckt in den ges. math. Werken von B. Riemann, 2. Aufl., Leipzig 1892; die Abhandlungen *Crelle*, 47, 52 und *die Vorlesungen über die*

Abel'schen Functionen von Weierstrass; ferner: Neumann, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen*, Leipzig, 1865, 1884; Clebsch-Gordan, *Abel'sche Functionen*, Leipzig 1866, welche die ersten waren, die mit Erfolg die geometrischen und analytischen Begriffe auf diesem Gebiet zu verbinden wussten; Klein, *Ueber Riemann's Theorie der algebr. Funct. und ihrer Integr.*, Leipzig 1882. Die neuesten Arbeiten Klein's sind zum grossen Theil in den *Math. Ann.*, 27, 32, 36 enthalten. Siehe auch die Literaturangaben am Ende des Kap. 17, § 5.

Das *invariante* Integral Q behandelte Klein in dem hyperelliptischen Fall, Pick dagegen, *Wiener Ber.*, 1886; *Math. Ann.*, 29, 1887 in dem Fall, in welchem $f = 0$ eine ebene Curve *ohne Singularitäten* darstellt; White, *Math. Ann.*, 36, 1890, *Acta Leopold. Halle*, 1891 legte eine Raumcurve, die der *vollständige* Schnitt zweier Flächen ist, zu Grund; dieselben Autoren untersuchten auch den Fall ebener Curven, deren Gleichung $w^m = R(z)$ lautet, worin R eine rationale Function bedeutet. Die einer solchen Curve entsprechenden Integrale pflegt man *binomische* zu nennen. Siehe Pick und Ungar, *Wiener Berichte*, 1880; Pick, ib., 1886; White, *Dissert. Göttingen*, 1890.

§ 8. Das Abel'sche Theorem.

Es liege eine algebraische Function t auf der Riemann'schen Fläche vor und

$$x_1, x_2, \cdots, x_m; \ y_1, y_2, \cdots, y_m$$

seien ihre Nullpunkte bez. Unendlichkeitspunkte (zwei Gruppen corresidualer Punkte); wenn dann I ein beliebiges Abel'sches Integral bezeichnet, so ist die Summe

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{y_i}^{x_i} dI$$

bis auf ganze Vielfache der Periodicitätsmoduln von I eine algebraisch-logarithmische Function von t (das Abel'sche Theorem).

Wenn I ein Integral 1ter Gattung bezeichnet, so ist die obige Summe bis auf ganze Vielfache der Periodicitätsmoduln Null.

Ist I ferner ein Integral 3ter Gattung mit nur zwei logarithmischen Unendlichkeitspunkten ξ und η, so hat die vorstehende

Summe einen von dem speciell gewählten Integral unabhängigen Werth: er ist bis auf ganze Vielfache der Periodicitätsmoduln gleich $\log \frac{t(\xi)}{t(\eta)}$.

Wenn I dann schliesslich ein Integral 2ter Gattung Z mit dem algebraischen Unendlichkeitspunkt ξ bezeichnet, so ist der Werth dieser Summe mit Ausnahme der oben genannten Vielfachen

$$\frac{t'(\xi)}{t(\xi)}.$$

Gibt man t die Form $t = \frac{\varphi(w, z)}{\psi(w, z)}$ *und existirt ein Werth λ, für welchen die Curve* $\varphi(w, z) - \lambda\psi(w, z) = 0$ *durch die beiden Punkte ξ und η geht, alsdann ist die rechte Seite der Formel des Abel'schen Theorems für die Integrale 3ter Gattung bis auf die obigen Vielfachen Null.*

Mit Hilfe des Abel'schen Theorems lässt sich eine Summe von k Integralen

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{y_i}^{x_i} dI,$$

worin $k > p + 1$ *ist und x, y beliebige Punkte bedeuten, stets als Summe von p anderen analogen einzelnen Integralen ausdrücken, wenn man unter p das Geschlecht der Riemann'schen Fläche versteht. Dabei ist nur eine algebraisch-logarithmische Function auszunehmen, falls es sich um Integrale 2ter und 3ter Gattung handelt.*

In dem elliptischen Fall ($p = 1$) *kann man die Summe zweier oder mehrerer elliptischer Integrale immer durch ein einziges Integral ausdrücken, dessen eine Grenze willkürlich festgesetzt ist (das Additionstheorem Euler's,* siehe S. 154).

Das Abel'sche Theorem für die Integrale 1ter Gattung gibt die nothwendige und ausreichende Bedingung an, damit zwei Punktgruppen corresidual seien (Riemann, Weierstrass).

Wenn man in der Formel des Abel'schen Theorems die Correspondenz zwischen den oberen und unteren Grenzen verändert, so vermehrt oder vermindert sich die totale Summe um ganze Vielfache der Periodicitätsmoduln.

Mittelst des Abel'schen Theorems kann man den Riemann-Roch'schen Satz und die anderen Grundtheoreme der Theorie der algebraischen Functionen beweisen, z. B. auch den sogenannten *Restsatz*, von dem der Abel'sche nur die transcendente Form ist. Der *Restsatz* (vergl. Bd. 2, Kap. 5, § 4) lautet:

Wenn $x_1, x_2, \cdots, x_m$; $y_1, y_2, \cdots, y_m$ *zwei Gruppen corresidualer Punkte sind und man lässt durch die* x *eine beliebige Curve gehen, welche die zu Grunde liegende Curve in anderen* k *Punkten* $z_1, \cdots, z_k$ *schneidet, so sind die Punkte* z *und* y *die vollzähligen Schnittpunkte einer zweiten Curve mit der Grundcurve.*

Ist die Riemann'sche Fläche r*-blätterig, so wird die Summe der Werthe, welche dasselbe Abel'sche Integral* 1ter *und* 2ter *Gattung annimmt, wenn es geschlossene conjugirte Wege in allen* r *Blättern beschreibt, Null.*

Das Abel'sche Theorem und die Ausdehnung des Euler'schen Additionstheorems auf die elliptischen Integrale ist grundlegend für die ganze Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale.

Es wurde von Abel zuerst für den hyperelliptischen Fall, *Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendentes, Crelle,* 3 und *Oeuvres complètes, nouv. édit.*, 1881, Christiania, Bd. 1, S. 444 und dann 1826 auch für den allgemeinen Fall aufgestellt, *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendentes, Mém. prés. par div. sav.*, Bd. 7, 1841; siehe auch *Crelle,* 4, 1829 und *Oeuvres compl.*, Bd. 1, S. 145, 1881.

Die betr. Beweise findet man bei Clebsch-Gordan und in den anderen am Ende des vorigen Paragraphen citirten Arbeiten.

Der erwähnte Abel'sche Aufsatz wurde der Akademie der Wissenschaften in Paris am 30. October 1826 überreicht, aber erst 15 Jahre später 1841 veröffentlicht. In der Zwischenzeit erschienen viele Arbeiten über dasselbe Thema von Abel, Minding, Jürgensen, Broch, Richelot, Jacobi, Rosenhain in den ersten 30 Bänden des *Crelle'schen Journals.*

Vergl. auch das neue Werk von Baker, *Abel's Theorem and the allied theory including the theory of the thetafunctions,* Cambridge 1897.

Kapitel XVI.

Die Theorie der elliptischen Functionen.

§ 1. Die Jacobi'schen Thetafunctionen.

Die Jacobi'schen ϑ-Functionen lauten (*Fundamenta nova theoriae funct. ellipticarum,* Königsberg 1829; *Werke,* Berlin 1881, 1, S. 49—239, § 60):

$$\vartheta(x) = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu} q^{\nu^2}\cos 2\nu x = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{\nu} q^{\nu^2} e^{2\nu i x},$$

$$\vartheta_1(x) = 2\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1} q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2}\sin(2\nu-1)x = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{\nu} i q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} e^{(2\nu-1)ix},$$

$$\vartheta_2(x) = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2}\cos(2\nu-1)x = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} e^{(2\nu-1)ix},$$

$$\vartheta_3(x) = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu^2}\cos 2\nu x = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\nu^2} e^{2\nu i x}.$$

Diese Reihen convergiren für jedes x, wenn mod $q < 1$ ist.

Die ϑ-Functionen mit imaginärem Argument lassen sich, wie zuerst Jacobi, *Fundamenta,* § 56, *Ges. Werke,* 1, S. 214 gezeigt hat, auf ϑ-Functionen reduciren, in welchen das Argument reell ist.

Die Function ϑ_1 ist eine ungerade Function; die übrigen sind gerade.

Es gelten die Formeln.

$$\begin{aligned}
\vartheta(x \pm \tfrac{1}{2}\pi) &= \vartheta_3(x), \\
\vartheta_1(x \pm \tfrac{1}{2}\pi) &= \pm \vartheta_2(x), \\
\vartheta_2(x \pm \tfrac{1}{2}\pi) &= \mp \vartheta_1(x), \\
\vartheta_3(x \pm \tfrac{1}{2}\pi) &= \vartheta(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta\left(x \pm \frac{1}{2} i \log q\right) &= \mp i q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_1(x), \\
\vartheta_1\left(x \pm \frac{1}{2} i \log q\right) &= \mp i q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta(x), \\
\vartheta_2\left(x \pm \frac{1}{2} i \log q\right) &= + q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_3(x), \\
\vartheta_3\left(x \pm \frac{1}{2} i \log q\right) &= + q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_2(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta\left(x + \frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2} i \log q\right) &= q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_2(x), \\
\vartheta_1\left(x + \frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2} i \log q\right) &= q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_3(x), \\
\vartheta_2\left(x + \frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2} i \log q\right) &= \pm i q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta(x), \\
\vartheta_3\left(x + \frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2} i \log q\right) &= \mp q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_1(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta(x \pm \pi) &= \vartheta(x), \\
\vartheta_1(x \pm \pi) &= - \vartheta_1(x), \\
\vartheta_2(x \pm \pi) &= - \vartheta_2(x), \\
\vartheta_3(x \pm \pi) &= \vartheta_3(x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta(x \pm i \log q) &= - q^{-1} e^{\pm 2xi} \vartheta(x), \\
\vartheta_1(x \pm i \log q) &= - q^{-1} e^{\pm 2xi} \vartheta_1(x), \\
\vartheta_2(x \pm i \log q) &= + q^{-1} e^{\pm 2xi} \vartheta_2(x), \\
\vartheta_3(x \pm i \log q) &= + q^{-1} e^{\pm 2xi} \vartheta_3(x).
\end{aligned}$$

Alle ϑ-Functionen und ihre Derivirten genügen der Differentialgleichung (Jacobi, *Crelle*, 26):

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial \vartheta}{\partial (\log q)} = 0.$$

Wenn die x' mit den x durch die Relationen

$$\begin{aligned} x_1' &= \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \\ x_2' &= \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4), \\ x_3' &= \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4), \\ x_4' &= \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \end{aligned}$$

verbunden sind, so gelten die drei Jacobi'schen Formeln

$$\prod_{k=1}^{4} \vartheta_2(x_k) + \prod_{k=1}^{4} \vartheta_3(x_k) = \prod_{k=1}^{4} \vartheta_2(x_k') + \prod_{k=1}^{4} \vartheta_3(x_k'),$$

$$\prod_{k=1}^{4} \vartheta(x_k) - \prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x_k) = \prod_{k=1}^{4} \vartheta(x_k') - \prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x_k'),$$

$$\prod_{k=1}^{4} \vartheta_3(x_k) - \prod_{k=1}^{4} \vartheta_2(x_k) = \prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x_k') + \prod_{k=1}^{4} \vartheta(x_k').$$

Bezeichnet man das Product

$$\vartheta_i(x_1)\, \vartheta_j(x_2)\, \vartheta_h(x_3)\, \vartheta_k(x_4)$$

mit

$$(ijhk)$$

und dasselbe Product aber nicht für die x, sondern für die Argumente x', mit

$$(ijhk)',$$

so erhält man

$$\begin{aligned} (0033) + (1122) &= (0033)' + (1122)', \\ (0033) - (1122) &= (3300)' + (2211)', \\ (0022) + (1133) &= (0022)' + (1133)', \\ (0022) - (1133) &= (2200)' + (3311)', \\ (3322) + (0011) &= (3322)' + (0011)', \\ (3322) - (0011) &= (2233)' + (1100)'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3021) - (2130) &= (3021)' - (2130)', \\ (2031) - (3120) &= (2031)' - (3120)', \\ (1320) + (2013) &= (1320)' + (2013)'. \end{aligned}$$

Die Fundamentalformel, aus welcher alle diese Formeln sich ableiten lassen, wurde von Jacobi in einem Brief an Hermite, *Crelle,* 32; *Werke,* 2, S. 115 mitgetheilt. Auf diese Formel gründete in der Folge Jacobi eine ganze Theorie der elliptischen Functionen; die bezügliche Arbeit Jacobi's, *Theorie der ellipt. Funct., aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet* ist uns durch Borchardt, *Jacobi's gesammelte Werke,* 1, S. 497 vermittelt worden. Siehe auch Rosenhain, *Mém. des savants étrang.,* 11, S. 371.

Aus den oben angeführten Jacobi'schen Fundamentalformeln ergeben sich weiter die folgenden:

$$\begin{aligned}
\vartheta^2(0)\,\vartheta(x_1+x_2)\,\vartheta(x_1-x_2) &= \\
&= \vartheta^2(x_1)\,\vartheta^2(x_2) - \vartheta_1{}^2(x_1)\,\vartheta_1{}^2(x_2) = \\
&= \vartheta_3{}^2(x_1)\,\vartheta_3{}^2(x_2) - \vartheta_2{}^2(x_1)\,\vartheta_2{}^2(x_2),\\
\vartheta^2(0)\,\vartheta_1(x_1+x_2)\,\vartheta_1(x_1-x_2) &= \\
&= \vartheta_1{}^2(x_1)\,\vartheta^2(x_2) - \vartheta^2(x_1)\,\vartheta_1{}^2(x_2),\\
\vartheta_2{}^2(0)\,\vartheta_1(x_1+x_2)\,\vartheta_1(x_1-x_2) &= \\
&= \vartheta_1{}^2(x_1)\,\vartheta_2{}^2(x_2) - \vartheta_2{}^2(x_1)\,\vartheta_1{}^2(x_2),\\
\vartheta_3{}^2(0)\,\vartheta_1(x_1+x_2)\,\vartheta_1(x_1-x_2) &= \\
&= \vartheta_1{}^2(x_1)\,\vartheta_3{}^2(x_2) - \vartheta_3{}^2(x_1)\,\vartheta_1{}^2(x_2),\\
\vartheta_2{}^2(0)\,\vartheta_2(x_1+x_2)\,\vartheta_2(x_1-x_2) &= \\
&= \vartheta_3{}^2(x_1)\,\vartheta_3{}^2(x_2) - \vartheta^2(x_1)\,\vartheta^2(x_2) = \\
&= \vartheta_2{}^2(x_1)\,\vartheta_2{}^2(x_2) - \vartheta_1{}^2(x_1)\,\vartheta_1{}^2(x_2),\\
\vartheta_3{}^2(0)\,\vartheta_3(x_1+x_2)\,\vartheta_3(x_1-x_2) &= \\
&= \vartheta^2(x_1)\,\vartheta^2(x_2) + \vartheta_2{}^2(x_1)\,\vartheta_2{}^2(x_2) = \\
&= \vartheta_3{}^2(x_1)\,\vartheta_3{}^2(x_2) + \vartheta_1{}^2(x_1)\,\vartheta_1{}^2(x_2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta^3(0)\,\vartheta(2x) &= \vartheta^4(x) - \vartheta_1{}^4(x) = \\
&= \vartheta_3{}^4(x) - \vartheta_2{}^4(x),\\
\vartheta_2{}^3(0)\,\vartheta_2(2x) &= \vartheta_3{}^4(x) - \vartheta^4(x) = \\
&= \vartheta_2{}^4(x) - \vartheta_1{}^4(x),\\
\vartheta_3{}^3(0)\,\vartheta_3(2x) &= \vartheta^4(x) + \vartheta_2{}^4(x) = \\
&= \vartheta_3{}^4(x) + \vartheta_1{}^4(x),
\end{aligned}$$

$$\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_1(2x) = 2\,\vartheta(x)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_3(x).$$

Zwischen den ϑ-Functionen desselben Arguments bestehen zwei von einander unabhängige algebraische Beziehungen. Sie lassen sich durch zwei der folgenden vier Relationen darstellen:

$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta^2(x) = \vartheta^2(0)\,\vartheta_3^2(x) + \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_1^2(x),$$
$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_1^2(x) = \vartheta_2^2(0)\,\vartheta^2(x) - \vartheta^2(0)\,\vartheta_2^2(x),$$
$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_2^2(x) = \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_3^2(x) - \vartheta^2(0)\,\vartheta_1^2(x),$$
$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_3^2(x) = \vartheta^2(0)\,\vartheta^2(x) + \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_2^2(x).$$

Durch diese Relationen wird *das Quadrat einer ϑ-Function rational mittelst der Quadrate zweier anderer ausgedrückt.*

Zwischen den geraden ϑ und der Derivirten von ϑ_1 gibt es für das Argument 0 zwei algebraische Beziehungen:

$$\vartheta_3^4(0) = \vartheta^4(0) + \vartheta_2^4(0),$$
$$\vartheta_1'(0) = \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0).$$

Andere Relationen zwischen den Derivirten der ϑ für das Argument 0 sind die nachstehenden:

$$\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} = \vartheta^4, \qquad \frac{\vartheta^{IV}}{\vartheta} - 3\,\frac{\vartheta''^2}{\vartheta^2} = -\,2\,\vartheta_2^4\,\vartheta_3^4,$$
$$\frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = \vartheta_2^4, \qquad \frac{\vartheta_2^{IV}}{\vartheta_2} - 3\,\frac{\vartheta_2''^2}{\vartheta_2^2} = -\,2\,\vartheta_3^4\,\vartheta^4,$$
$$\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \frac{\vartheta''}{\vartheta} = -\,\vartheta_3^4, \qquad \frac{\vartheta_3^{IV}}{\vartheta_3} - 3\,\frac{\vartheta_3''^2}{\vartheta_3^2} = +\,2\,\vartheta^4\,\vartheta_2^4,$$
$$-\,3\,\frac{\vartheta_1^{V}}{\vartheta_1'} + 5\,\frac{\vartheta_1'''^2}{\vartheta_1'^2} = \vartheta^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8.$$

Pascal, *Annali di mat.*, (2), 24, 1895.

Die Function ϑ_1 genügt der folgenden Relation, die man nach Halphén, der übrigens mit diesem Namen die analoge Relation bezeichnet hat, welcher die Weierstrass'sche σ-Function genügt, vergl. § 3 und *Traité des fonctions elliptiques* von Halphén, Paris 1886, 1, S. 187, 244, *die dreigliedrige Gleichung (équation à trois termes) zu nennen pflegt:*

$$\vartheta_1(x_1 + x_2)\,\vartheta_1(x_1 - x_2)\,\vartheta_1(x_3 + x_4)\,\vartheta_1(x_3 - x_4) +$$
$$+ \vartheta_1(x_1 + x_3)\,\vartheta_1(x_1 - x_3)\,\vartheta_1(x_4 + x_2)\,\vartheta_1(x_4 - x_2) +$$
$$+ \vartheta_1(x_1 + x_4)\,\vartheta_1(x_1 - x_4)\,\vartheta_1(x_2 + x_3)\,\vartheta_1(x_2 - x_3) = 0.$$

Die Derivirten der Verhältnisse der ϑ lassen sich durch die Verhältnisse der ϑ mittelst der Formeln ausdrücken:

$$\frac{d}{dx}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \vartheta^2(0)\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)},$$
$$\frac{d}{dx}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = -\vartheta_3{}^2(0)\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)},$$
$$\frac{d}{dx}\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = -\vartheta_2{}^2(0)\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)},$$
$$\frac{d}{dx}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_2(x)} = \vartheta_2{}^2(0)\frac{\vartheta(x)}{\vartheta_2(x)}\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_2(x)},$$
$$\frac{d}{dx}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_3(x)} = \vartheta_3{}^2(0)\frac{\vartheta(x)}{\vartheta_3(x)}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_3(x)},$$
$$\frac{d}{dx}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_3(x)} = -\vartheta^2(0)\frac{\vartheta(x)}{\vartheta_3(x)}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_3(x)}.$$

Die Derivirten der Logarithmen der ϑ-Functionen lassen sich, von der zweiten Ableitung an, durch die ϑ selbst ausdrücken. Die entsprechenden Formeln lauten:

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\vartheta(x) = \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{\vartheta_1'^2(0)}{\vartheta^2(0)}\frac{\vartheta_1{}^2(x)}{\vartheta^2(x)},$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\log\vartheta_1(x) = \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{\vartheta_1'^2(0)}{\vartheta^2(0)}\frac{\vartheta^2(x)}{\vartheta_1{}^2(x)},$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\log\vartheta_2(x) = \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{\vartheta_1'^2(0)}{\vartheta^2(0)}\frac{\vartheta_3{}^2(x)}{\vartheta_2{}^2(x)},$$
$$\frac{d^2}{dx^2}\log\vartheta_3(x) = \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{\vartheta_1'^2(0)}{\vartheta^2(0)}\frac{\vartheta_2{}^2(x)}{\vartheta_3{}^2(x)}.$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\log\vartheta(x) = -2\vartheta_1'^2(0)\frac{\vartheta_1(x)\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)}{\vartheta^3(x)},$$
$$\frac{d^3}{dx^3}\log\vartheta_1(x) = +2\vartheta_1'^2(0)\frac{\vartheta(x)\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)}{\vartheta_1{}^3(x)},$$
$$\frac{d^3}{dx^3}\log\vartheta_2(x) = -2\vartheta_1'^2(0)\frac{\vartheta_1(x)\vartheta(x)\vartheta_3(x)}{\vartheta_2{}^3(x)},$$
$$\frac{d^3}{dx^3}\log\vartheta_3(x) = +2\vartheta_1'^2(0)\frac{\vartheta(x)\vartheta_1(x)\vartheta_2(x)}{\vartheta_3{}^3(x)}.$$

Die ϑ sind ganze Functionen, d. h. sie werden für keinen endlichen Werth von x unendlich gross. Ihre *Nullpunkte,* d. h. die Punkte der Ebene, in welchen die ϑ Null werden, sind die folgenden:

für die Function $\vartheta_1(x)$ die Punkte $x = m\pi - ni\log q$,
" " " $\vartheta(x)$ " " $x = \frac{1}{2}i\log q + m\pi - ni\log q$,
" " " $\vartheta_2(x)$ " " $x = -\frac{1}{2}\pi + m\pi - ni\log q$,
" " " $\vartheta_3(x)$ " " $x = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}i\log q + m\pi - ni\log q$,

worin den m und n alle positiven und negativen *ganzen* Werthe beizulegen sind.

Schliesslich geben wir die Entwickelungen der ϑ in unendliche Producte an:

$$\vartheta(x) = \prod_{r=1}^{\infty}(1 - q^{2r})\prod_{r=1}^{\infty}(1 - 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}),$$

$$\vartheta_1(x) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin x\prod_{r=1}^{\infty}(1 - q^{2r})\prod_{r=1}^{\infty}(1 - 2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}),$$

$$\vartheta_2(x) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos x\prod_{r=1}^{\infty}(1 - q^{2r})\prod_{r=1}^{\infty}(1 + 2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}),$$

$$\vartheta_3(x) = \prod_{r=1}^{\infty}(1 - q^{2r})\prod_{r=1}^{\infty}(1 + 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}).$$

Diese Entwickelungen findet man in den *Fundamenta nova* von Jacobi, § 52, 61, 64, 65.

§ 2. Die elliptischen Functionen Jacobi's.

Wir setzen:

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}, \qquad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)},$$

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

$$\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{k}\sin\varphi,$$

$$\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\varphi,$$

$$\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \frac{1}{\sqrt{k'}}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\varphi,$$

$$v = \vartheta_3^2(0)\cdot x.$$

Mittelst dieser Formeln wird φ als eine gewisse Function von v definirt; sie heisst *die Amplitudenfunction* (Legendre, *Fonct. ellipt.*) und wird mit am bezeichnet, man schreibt also:

$$\varphi = \operatorname{am} v.$$

Die Functionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ und $\Delta\varphi$ bezeichnet man kurz nach Gudermann, *Crelle,* 18 mit

$$\operatorname{sn} v, \quad \operatorname{cn} v, \quad \operatorname{dn} v.$$

Sie werden nach Jacobi sinus amplitudinis, cosinus amplitudinis, delta amplitudinis von v genannt und meistens mit $\sin \operatorname{am} v$, $\cos \operatorname{am} v$, $\Delta \operatorname{am} v$ bezeichnet; sie sind die drei elliptischen Functionen Jacobi's und zwischen ihnen bestehen die beiden algebraischen Beziehungen:

$$\sin^2 \operatorname{am} v + \cos^2 \operatorname{am} v = 1,$$
$$\Delta^2 \operatorname{am} v + k^2 \sin^2 \operatorname{am} v = 1.$$

Diese elliptischen Functionen wurden von Abel, *Crelle,* 1—5 und Jacobi, *Fundam. nov.* etc., 1829 eingeführt und studirt. Es ist bemerkenswerth, dass Legendre *elliptische Functionen* nannte, was wir mit *elliptischen Integralen* bezeichnen.

Die inverse Funktion der Amplitudenfunction wird durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt

$$v = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta \varphi},$$

welches ein elliptisches Integral erster Gattung ist. Siehe Kap. 7, § 4.

Die drei elliptischen Functionen besitzen ein algebraisches Additionstheorem, d. h. der Werth einer von ihnen für das zusammengesetzte Argument $v_1 + v_2$ lässt sich algebraisch durch die Werthe derselben Functionen für die einfachen Argumente v_1 und v_2 ausdrücken.

Die entsprechenden Formeln lauten:

$$\sin \operatorname{am}(v_1 \pm v_2) = \frac{\sin \operatorname{am} v_1 \cos \operatorname{am} v_2 \,\Delta \operatorname{am} v_2 \pm \sin \operatorname{am} v_2 \cos \operatorname{am} v_1 \,\Delta \operatorname{am} v_1}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} v_1 \sin^2 \operatorname{am} v_2},$$

$$\cos \operatorname{am}(v_1 \pm v_2) = \frac{\cos \operatorname{am} v_1 \cos \operatorname{am} v_2 \mp \sin \operatorname{am} v_1 \sin \operatorname{am} v_2 \,\Delta \operatorname{am} v_1 \,\Delta \operatorname{am} v_2}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} v_1 \sin^2 \operatorname{am} v_2},$$

$$\Delta \operatorname{am}(v_1 \pm v_2) = \frac{\Delta \operatorname{am} v_1 \,\Delta \operatorname{am} v_2 \mp k^2 \sin \operatorname{am} v_1 \sin \operatorname{am} v_2 \cos \operatorname{am} v_1 \cos \operatorname{am} v_2}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} v_1 \sin^2 \operatorname{am} v_2}.$$

Eine andere Eigenschaft der elliptischen Functionen Jacobi's besteht darin, *dass sich ihre Derivirten algebraisch durch die Functionen selbst ausdrücken lassen:*

$$\frac{d}{dv} \sin \operatorname{am} v = \cos \operatorname{am} v \,\Delta \operatorname{am} v,$$

$$\frac{d}{dv} \cos \operatorname{am} v = - \sin \operatorname{am} v \,\Delta \operatorname{am} v,$$

$$\frac{d}{dv} \Delta \operatorname{am} v = - k^2 \sin \operatorname{am} v \,\Delta \operatorname{am} v.$$

Wir wollen die Grössen

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}$$

(die vollständigen Integrale Legendre's, siehe Kap. 7, § 4, S. 155) einführen, bei welchen das Symbol

$$\int$$

angibt, dass man die Integration zwischen den bezeichneten Grenzen auf *geradlinigem* Weg ausführen soll. Man erhält alsdann die Formeln:

$$\vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

$$\vartheta_2(0) = \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}},$$

$$\vartheta(0) = \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}},$$

$$x = \frac{\pi v}{2K}, \quad q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}.$$

Da der Modul von q kleiner als 1 sein muss, *so ist der reelle Theil des Verhältnisses* $\frac{K'}{K}$ *nothwendiger Weise positiv und von Null verschieden.*

Die drei Functionen Jacobi's sind doppelt periodisch; sie bleiben unverändert, wenn das Argument v *um ganze Vielfache der folgenden Grössen wächst:*

1. Für sin am v um die Vielfachen von $4K$, $2iK'$,
2. „ cos am v „ „ „ „ $4K$, $4iK'$,
3. „ Δ am v „ „ „ „ $2K$, $4iK'$.

Die dem Zuwachs des Arguments um halbe oder Viertelperioden entsprechenden Formeln sind:

$$\sin \operatorname{am}(v + 2K) = -\sin \operatorname{am} v,$$

$$\cos \operatorname{am}(v + 2K) = -\cos \operatorname{am} v,$$

$$\Delta \operatorname{am}(v + 2K) = \Delta \operatorname{am} v.$$

$$\sin \text{am} (v + 2iK') = \sin \text{am}\, v,$$
$$\cos \text{am} (v + 2iK') = - \cos \text{am}\, v,$$
$$\Delta \text{am} (v + 2iK') = - \Delta \text{am}\, v.$$

$$\sin \text{am} (v + K) = \frac{\cos \text{am}\, v}{\Delta \text{am}\, v},$$
$$\cos \text{am} (v + K) = - k' \frac{\sin \text{am}\, v}{\Delta \text{am}\, v},$$
$$\Delta \text{am} (v + K) = \frac{k'}{\Delta \text{am}\, v}.$$

$$\sin \text{am} (v + iK') = \frac{1}{k \sin \text{am}\, v},$$
$$\cos \text{am} (v + iK') = \frac{\Delta \text{am}\, v}{ik \sin \text{am}\, v},$$
$$\Delta \text{am} (v + iK') = \frac{\cos \text{am}\, v}{i \sin \text{am}\, v}.$$

Die sämmtlichen drei Functionen Jacobi's werden in allen Punkten

$$v = 2mK + (2n + 1)iK'$$

unendlich gross; ferner wird

sin am *in den Punkten* $v = 2mK + 2niK'$,
cos am „ „ „ $v = (2m + 1)K + 2niK'$,
Δ am „ „ „ $v = (2m + 1)K + (2n + 1)iK'$

gleich Null.

In den durch halbe oder Viertelperioden dargestellten Punkten haben die Jacobi'schen Functionen die in der folgenden Tabelle angegebenen Werthe:

Argument	sin am =
$\frac{1}{2}K$	$\frac{1}{\sqrt{1 + k'}}$
$\frac{3}{2}K$	$\frac{1}{\sqrt{1 + k'}}$
$\frac{1}{2}K + iK'$	$\frac{1}{\sqrt{1 - k'}}$
$\frac{3}{2}K + iK'$	$\frac{1}{\sqrt{1 - k'}}$

Argument	sin am =
$\frac{1}{2} iK'$	$\frac{i}{\sqrt{k}}$
$K + \frac{1}{2} iK'$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$
$\frac{3}{2} iK'$	$-\frac{i}{\sqrt{k}}$
$K + \frac{3}{2} iK'$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$
$\frac{1}{2} K + \frac{1}{2} iK'$	$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k}} (\sqrt{1+k} + i\sqrt{1-k})$
$\frac{3}{2} K + \frac{1}{2} iK'$	$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k}} (\sqrt{1+k} - i\sqrt{1-k})$
$\frac{1}{2} K + \frac{3}{2} iK'$	$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k}} (\sqrt{1+k} - i\sqrt{1-k})$
$\frac{3}{2} K + \frac{3}{2} iK'$	$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{k}} (\sqrt{1+k} + i\sqrt{1-k})$

Argument	cos am =
$\frac{1}{2} K$	$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}$
$\frac{3}{2} K$	$-\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{1+k'}}$
$\frac{1}{2} K + iK'$	$-\frac{i\sqrt{k'}}{\sqrt{1-k'}}$
$\frac{3}{2} K + iK'$	$-\frac{i\sqrt{k'}}{\sqrt{1-k'}}$
$\frac{1}{2} iK'$	$\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}$
$K + \frac{1}{2} iK'$	$-\frac{i\sqrt{1-k}}{\sqrt{k}}$
$\frac{3}{2} iK'$	$-\frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}}$
$K + \frac{3}{2} iK'$	$-\frac{i\sqrt{1-k}}{\sqrt{k}}$

Argument	cos am =
$\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}iK'$	$-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}$
$\frac{3}{2}K + \frac{1}{2}iK'$	$-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}$
$\frac{1}{2}K + \frac{3}{2}iK'$	$-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}$
$\frac{3}{2}K + \frac{3}{2}iK'$	$\frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}$

Argument	Δ am =
$\frac{1}{2}K$	$\sqrt{k'}$
$\frac{3}{2}K$	$\sqrt{k'}$
$\frac{1}{2}K + iK'$	$-i\sqrt{k'}$
$\frac{3}{2}K + iK'$	$i\sqrt{k'}$
$\frac{1}{2}iK'$	$\sqrt{1+k}$
$K + \frac{1}{2}iK'$	$\sqrt{1-k}$
$\frac{3}{2}iK'$	$-\sqrt{1+k}$
$K + \frac{3}{2}iK'$	$-\sqrt{1-k}$
$\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}iK'$	$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+k'} - i\sqrt{1-k'})$
$\frac{3}{2}K + \frac{1}{2}iK'$	$\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+k'} + i\sqrt{1-k'})$
$\frac{1}{2}K + \frac{3}{2}iK'$	$-\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+k'} + i\sqrt{1-k'})$
$\frac{3}{2}K + \frac{3}{2}iK'$	$-\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+k'} - i\sqrt{1-k'})$

Degenerationsfälle. Für $k = 0$ wird

$$\varphi = \text{am}\, v = v,$$

$$K = \frac{\pi}{2}, \quad K' = \infty, \quad q = 0, \quad k' = 1;$$

$$\sin \operatorname{am} v = \sin v,$$
$$\cos \operatorname{am} v = \cos v,$$
$$\Delta \operatorname{am} v = 1,$$
$$\vartheta(x) = 1, \quad \vartheta_1(x) = 0, \quad \vartheta_2(x) = 0, \quad \vartheta_3(x) = 1.$$

Für $k' = 0$ erhält man

$$v = \log \frac{1 + \tan \frac{\varphi}{2}}{1 - \tan \frac{\varphi}{2}}, \quad \tan \frac{\varphi}{2} = \frac{e^v - 1}{e^v + 1},$$

$$K = \infty, \quad K' = \frac{\pi}{2}, \quad q = 1, \quad k = 1,$$

$$\sin \operatorname{am} v = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}},$$
$$\cos \operatorname{am} v = \frac{2}{e^v + e^{-v}},$$
$$\Delta \operatorname{am} v = \frac{2}{e^v + e^{-v}}.$$

In diesem Fall werden die ϑ-Functionen divergirende Reihen.

§ 3. Die vier Weierstrass'schen σ-Functionen.

Setzt man

$$x = \frac{\pi u}{2\omega},$$
$$\eta = -\frac{1}{12} \frac{\pi^2}{\omega} \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)},$$

so ist

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_1'(0)},$$
$$\sigma_1(u) = e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_2(0)},$$
$$\sigma_2(u) = e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_3(0)},$$
$$\sigma_3(u) = e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \frac{\vartheta(x)}{\vartheta(0)}.$$

Diese σ sind ganze Functionen von u und lassen sich in Reihen entwickeln, die nach ganzen wachsenden Potenzen von u

geordnet sind; die erste Function ist ungerade, die übrigen drei sind gerade Functionen.

Der Term mit u in der Entwickelung von $\sigma(u)$ hat den Coefficienten 1 *und der zweite Term (mit u^3) fehlt.*

Der erste Term der Entwickelung der übrigen σ ist 1 *und in der Entwickelung des Products $\sigma_1(u)\sigma_2(u)\sigma_3(u)$ fehlt der Term mit u^2.*

Periodicitätsformeln. Wir setzen

$$\log q = i\pi\tau = i\pi\frac{\omega'}{\omega}, \quad \omega'' = \omega + \omega'.$$

Aus dieser Annahme und aus dem Früheren ergibt sich, *dass der imaginäre Theil von $\frac{\omega'}{\omega}$ positiv und von Null verschieden sein muss.* Wir setzen ferner

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{i\pi}{2}, \quad \eta'' = \eta + \eta'.$$

Die Grössen ω, ω' heissen Moduln 1[ter] Gattung, η, η' Moduln 2[ter] Gattung.

Man erhält alsdann die Formeln:

$$\begin{aligned}
\sigma(u+2\omega) &= -\sigma(u)e^{2\eta(u+\omega)},\\
\sigma(u+2\omega') &= -\sigma(u)e^{2\eta'(u+\omega')},\\
\sigma(u+2\omega'') &= -\sigma(u)e^{2\eta''(u+\omega'')},\\
\sigma_1(u+2\omega) &= -\sigma_1(u)e^{2\eta(u+\omega)},\\
\sigma_1(u+2\omega') &= +\sigma_1(u)e^{2\eta'(u+\omega')},\\
\sigma_2(u+2\omega) &= +\sigma_2(u)e^{2\eta(u+\omega)},\\
\sigma_2(u+2\omega') &= +\sigma_2(u)e^{2\eta'(u+\omega')},\\
\sigma_3(u+2\omega) &= +\sigma_3(u)e^{2\eta(u+\omega)},\\
\sigma_3(u+2\omega') &= -\sigma_3(u)e^{2\eta'(u+\omega')}.
\end{aligned}$$

Ferner:

$$\eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}, \quad \eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}, \quad \eta'' = \frac{\sigma'(\omega'')}{\sigma(\omega'')},$$

$$\begin{aligned}
\sigma(u+\omega) &= \sigma(\omega)e^{\eta u}\sigma_1(u),\\
\sigma(u+\omega') &= \sigma(\omega')e^{\eta' u}\sigma_3(u),\\
\sigma(u+\omega'') &= \sigma(\omega'')e^{\eta'' u}\sigma_2(u).
\end{aligned}$$

Die Function σ genügt den folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned}
&\sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2)\,\sigma(u_3+u_4)\,\sigma(u_3-u_4)+\\
&+\sigma(u_1+u_3)\,\sigma(u_1-u_3)\,\sigma(u_4+u_2)\,\sigma(u_4-u_2)+\\
&+\sigma(u_1+u_4)\,\sigma(u_1-u_4)\,\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3)=0,
\end{aligned}$$

die dreigliedrige Gleichung (équation à trois termes),

$$\frac{\sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2)}{\sigma^2(u_1)\,\sigma^2(u_2)} = \frac{d^2}{du_1^2}\log\sigma(u_1) - \frac{d^2}{du_2^2}\log\sigma(u_2),$$

die Additionsformel.

$$\frac{\sigma_i(u_1-u_2)}{\sigma(u_1-u_2)} = \frac{\sigma_i(u_1)\,\sigma(u_1)\,\sigma_j(u_2)\,\sigma_k(u_2) - \sigma_i(u_2)\,\sigma(u_2)\,\sigma_j(u_1)\,\sigma_k(u_1)}{\sigma^2(u_1)\,\sigma_i^2(u_2) - \sigma^2(u_2)\,\sigma_i^2(u_1)},$$

worin i, j, k eine beliebige Permutation der Indices 1, 2, 3 darstellen.

Wir wollen die folgenden Grössen einführen:

$$e_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2(\vartheta^4 + \vartheta_3^4),$$

$$e_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2(\vartheta_2^4 - \vartheta^4),$$

$$e_3 = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2(\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4);$$

es ist dann

$$k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}, \quad k'^2 = \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3},$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

$$v = \sqrt{e_1-e_3}\cdot u,$$

$$K = \sqrt{e_1-e_3}\cdot\omega,$$

$$iK' = \sqrt{e_1-e_3}\cdot\omega'.$$

Wir setzen ferner:

$$\Delta = 16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_1-e_3)^2, \quad \text{Discriminante},$$

$$\left.\begin{aligned} g_2 &= -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1),\\ g_3 &= 4e_1e_2e_3, \end{aligned}\right\}\ \text{Invarianten}.$$

Man erhält dann:

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = \left[\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^3}\,\vartheta_1'(0)\right]^8,$$

$$g_2 = \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^4(\vartheta_3^8 - \vartheta^4\vartheta_2^4) = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^4(\vartheta^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8),$$

$$g_3 = -\frac{4}{27}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^6(3\vartheta^4\vartheta_2^8 - 3\vartheta^8\vartheta_2^4 - 2\vartheta_2^{12} - 2\vartheta^{12}).$$

Der Ausdruck $\frac{g_2^3}{\Delta}$ heisst *absolute Invariante*; durch den *Legendre'schen Modul* k dargestellt, ist

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{4}{27}\frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2}.$$

Zwischen den vier σ bestehen zwei unabhängige algebraische Beziehungen; insbesondere gelten die vier folgenden Formeln, von denen je zwei sich aus den übrigen ergeben:

$$\sigma_1^2(u) - \sigma_3^2(u) + (e_1 - e_3)\sigma^2(u) = 0,$$
$$\sigma_2^2(u) - \sigma_1^2(u) + (e_2 - e_1)\sigma^2(u) = 0,$$
$$\sigma_3^2(u) - \sigma_2^2(u) + (e_3 - e_2)\sigma^2(u) = 0,$$
$$(e_3 - e_2)\sigma_1^2(u) + (e_1 - e_3)\sigma_2^2(u) + (e_2 - e_1)\sigma_3^2(u) = 0.$$

Die Jacobi'schen Functionen sind mit den σ-Functionen durch die folgenden Relationen verbunden:

$$\sin \operatorname{am} v = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}, \qquad \frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)} = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\cos \operatorname{am} v}{\sin \operatorname{am} v},$$

$$\cos \operatorname{am} v = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}, \qquad \frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)} = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\varDelta \operatorname{am} v}{\sin \operatorname{am} v},$$

$$\varDelta \operatorname{am} v = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}, \qquad \frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)} = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{1}{\sin \operatorname{am} v},$$

Die Nullpunkte der σ sind

für die σ die Punkte $2m\omega + 2n\omega' = w$,
" " σ_1 " " $(2m + 1)\omega + 2n\omega' = w_1$,
" " σ_2 " " $(2m + 1)\omega + (2n + 1)\omega' = w_2$,
" " σ_3 " " $2m\omega + (2n + 1)\omega' = w_3$,

worin m und n zwei beliebige ganze positive oder negative Zahlen bedeuten.

Die Entwickelung in unendliche Producte liefert:

$$\sigma(u) = u \prod_{m,n} \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}},$$

$$\sigma_i(u) = e^{-\frac{1}{2}e_i u^2} \prod_{m,n} \left(1 - \frac{u}{w_i}\right) e^{\frac{u}{w_i} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w_i^2}}.$$

Setzt man

$$D = -2\eta\frac{\partial}{\partial\omega} - 2\eta'\frac{\partial}{\partial\omega'} = 12 g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3},$$

so wird

$$De_i = 4e_i^2 - \tfrac{2}{3}g_2,$$
$$D\varDelta = 0,$$
$$D\eta = \tfrac{1}{6}g_2\omega, \quad D\eta' = \tfrac{1}{6}g_2\omega', \quad D\eta'' = \tfrac{1}{6}g_2\omega'',$$
$$D\omega = -2\eta, \quad D\omega' = -2\eta', \quad D\omega'' = -2\eta'',$$
$$\left.\begin{array}{l}\sigma''(u) - D\sigma(u) + \frac{1}{12}g_2u^2\sigma(u) = 0,\\ \sigma_i''(u) - D\sigma_i(u) + (e_i + \frac{1}{12}g_2u^2)\sigma_i(u) = 0,\end{array}\right\}\text{die Differentialgleichungen der } \sigma\text{-Functionen.}$$

Die Derivirten der Moduln nach diesen Moduln selbst sind:

$$\frac{\partial\omega}{\partial g_2} = \frac{1}{\varDelta}\left(-\frac{1}{4}g_2^2\omega + \frac{9}{2}g_3\eta\right),$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial g_3} = \frac{1}{\varDelta}\left(\frac{9}{2}g_3\omega - 3g_2\eta\right),$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial g_2} = \frac{1}{\varDelta}\left(-\frac{3}{8}g_2g_3\omega + \frac{1}{4}g_2^2\eta\right),$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial g_3} = \frac{1}{\varDelta}\left(\frac{1}{4}g_2^2\omega - \frac{9}{2}g_3\eta\right),$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial\omega} = \frac{2i}{\pi}\left(\frac{1}{12}g_2\omega\omega' - \eta\eta'\right),$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial\omega'} = -\frac{2i}{\pi}\left(\frac{1}{12}g_2\omega^2 - \eta^2\right),$$
$$\eta = \frac{i\pi}{24}\frac{\partial\log\varDelta}{\partial\omega'},$$
$$\eta' = -\frac{i\pi}{24}\frac{\partial\log\varDelta}{\partial\omega}.$$

Entwickelung der σ in Reihen.

Setzt man

$$\sigma(u) = \sum b_{2n+1}\frac{u^{2n+1}}{(2n+1!)},$$
$$\sigma_i(u) = \sum c_{2n}^{(i)}\frac{u^{2n}}{2n!},$$

so erhält man die Recursionsformeln

$$b_{2n+1} = Db_{2n-1} - \frac{(2n-1)(n-1)}{6}g_2b_{2n-3},$$
$$c_{2n}^{(i)} = Dc_{2n-2}^{(i)} + \left(4e_i^2 - \frac{2}{3}g_2\right)\frac{\partial c_{2n-2}^{(i)}}{\partial e_i} -$$
$$- e_ic_{2n-2}^{(i)} - \frac{(n-1)(2n-3)}{6}g_2c_{2n-4}^{(i)}.$$

Die Reihenentwickelungen lauten daher

$$\sigma(u) = u - \frac{1}{2} g_2 \frac{u^5}{5!} - 6 g_3 \frac{u^7}{7!} - \frac{9}{4} g_2^2 \frac{u^9}{9!} - 18 g_2 g_3 \frac{u^{11}}{11!} +$$
$$+ \left(\frac{3 \cdot 23}{8} g_2^3 - 3^3 2^3 g_3^2\right) \frac{u^{13}}{13!} + \cdots,$$

$$\sigma_i(u) = 1 - e_i \frac{u^2}{2!} + \left(\frac{1}{2} g_2 - 3 e_i^2\right) \frac{u^4}{4!} + \left(\frac{3}{4} g_3 - \frac{3}{4} g_2 e_i\right) \frac{u^6}{6!} +$$
$$+ \left(\frac{21}{4} g_2 e_i^2 - \frac{39}{4} g_3 e_i - \frac{1}{4} g_2^2\right) \frac{u^8}{8!} +$$
$$+ \left(\frac{135}{4} g_3 e_i^2 - \frac{9}{16} g_2^2 e_i + \frac{99}{16} g_2 g_3\right) \frac{u^{10}}{10!} + \cdots.$$

Wünscht man auch einen Theil der noch folgenden Terme zu erfahren, so sehe man die auf S. 7 des Buches: *Formeln und Lehrsätze* von Schwarz, Göttingen 1885 angegebene Tabelle nach.

Die σ-Functionen wurden von Weierstrass bei Gelegenheit seiner Berliner Vorlesungen eingeführt. Näheres findet man in den citirten *Formeln* etc. von Schwarz.

Degenerationsfälle. Wenn die Discriminante Δ verschwindet und daher zwei der Grössen e einander gleich werden, z. B.

$$e_2 = e_3 = a,$$

so erhält man

$$e_1 = -2a,$$
$$\omega = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{-3a}},$$
$$\eta\omega = \frac{\pi^2}{12},$$
$$\frac{\eta}{\omega} = -a.$$

Die σ-Functionen werden alsdann

$$\sigma(u) = \frac{1}{\sqrt{-3a}} e^{-\frac{1}{2} a u^2} \sin\left(u \sqrt{-3a}\right),$$
$$\sigma_1(u) = e^{-\frac{1}{2} a u^2} \cos\left(u \sqrt{-3a}\right),$$
$$\sigma_2(u) = e^{-\frac{1}{2} a u^2},$$
$$\sigma_3(u) = e^{-\frac{1}{2} a u^2}.$$

§ 4. Die Weierstrass'sche $\wp$-Function.

Die Function $p(u)$ wird durch eine der folgenden Formeln definirt

$$p(u) = -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma(u),$$

$$p(u) = -\frac{\eta}{\omega} - \frac{\pi^2}{4\omega^2}\frac{d^2}{dx^2}\log\vartheta_1(x),$$

$$p(u) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\sqrt{e_1 - e_3}\cdot u\right)}.$$

Sie kann auch als das Integral der Differentialgleichung

$$s'^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

mit der Bedingung $p(0) = \infty$ definirt werden. Diese letztere Definition kommt der anderen gleich, dass die Function p die inverse Function des Integrals

$$\int_{\infty}^{p(u)} \frac{ds}{2\sqrt{(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}} = u \quad \text{sei.}$$

Die Function p ist doppelt periodisch mit den Perioden 2ω, $2\omega'$.

Sehr wichtig ist das Theorem von Weierstrass: *Jede eindeutige doppelt periodische Function* $\varphi(u)$, *die für endliche Werthe von u den Charakter einer rationalen Function besitzt, und welche die Perioden* 2ω, $2\omega'$ *hat, lässt sich rational durch die Function* $p(u)$ *und deren Ableitung* $p'(u)$ *ausdrücken.* — Siehe auch Kap. 14, § 4. Ueber die rationalen Functionen von p und p' vergl. den folgenden Paragraphen.

Den Beweis dieses Theorems, welches zuerst von Weierstrass in seinen Vorlesungen bekannt gegeben wurde, hat Kiepert, *Crelle*, 76, S. 21, 1873 veröffentlicht. — Mit einem ähnlichen Gegenstand beschäftigte sich Hermite, *Crelle*, 82, S. 343. Siehe auch Frobenius und Stickelberger, *Crelle*, 83, S. 175, 1877.

Es gelten die Formeln

$$p(\omega) = e_1, \quad p(\omega') = e_2, \quad p(\omega'') = e_3.$$

$$p(u) - p(\omega) = \left[\frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)}\right]^2,$$

$$p(u) - p(\omega') = \left[\frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}\right]^2,$$

$$p(u) - p(\omega'') = \left[\frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)}\right]^2.$$

$$\sin \operatorname{am} v = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{p(u) - e_3}},$$
$$\cos \operatorname{am} v = \sqrt{\frac{p(u) - e_1}{p(u) - e_3}},$$
$$\Delta \operatorname{am} v = \sqrt{\frac{p(u) - e_2}{p(u) - e_3}},$$
$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3;$$

dabei ist $v = \sqrt{e_1 - e_3} \cdot u$, vergl. § 3.

$$p''(u) = 6p^2(u) - \tfrac{1}{2} g_2,$$
$$p'''(u) = 12 p(u) p'(u),$$
$$p^{IV}(u) = 120 p^3(u) - 18 g_2 p(u) - 12 g_3,$$
$$p^{V}(u) = 360 p^2(u) p'(u) - 18 g_2 p'(u),$$
$$p^{VI}(u) = 36 [140 p^4(u) - 28 g_2 p^2(u) - - 20 g_3 p(u) + \tfrac{1}{4} g_2^2].$$

Verschiedene Formen des Additionstheorems für $p(u)$.

$$p(u_1 + u_2) + p(u_1) + p(u_2) = \frac{1}{4}\left[\frac{p'(u_2) - p'(u_1)}{p(u_2) - p(u_1)}\right]^2,$$
$$p(u_1 + u_2) - p(u_1) = -\frac{1}{2}\frac{d}{du_1}\left\{\frac{p'(u_1) - p'(u_2)}{p(u_1) - p(u_2)}\right\}.$$

Wenn

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

ist, so hat man

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p(u_1) & p(u_2) & p(u_3) \\ p'(u_1) & p'(u_2) & p'(u_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Ist

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 0,$$

so wird

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ p(u_1) & p(u_2) & \cdots & p(u_n) \\ p'(u_1) & p'(u_2) & \cdots & p'(u_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p^{n-2}(u_1) & p^{n-2}(u_2) & \cdots & p^{n-2}(u_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Fügt man zu dem Argument die halben Perioden ω, ω' **hinzu**, so erhält man die Formeln:

$$p(u+\omega) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{p(u) - e_1},$$

$$p(u+\omega') = e_3 + \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{p(u) - e_3},$$

$$p(u+\omega'') = e_2 + \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{p(u) - e_2}.$$

Die Punkte von der Form

$$2m\omega + 2n\omega',$$

worin m, n ganze Zahlen bedeuten, sind die sämmtlichen und die einzigen Unendlichkeitspunkte der p-Function. Sie sind solche von der zweiten Ordnung.

Die Werthe der p und p' für Argumente, die Viertelperioden gleich sind, lauten:

$$p\left(\frac{\omega}{2}\right) = e_1 + \sqrt{e_1 - e_2}\,\sqrt{e_1 - e_3},$$

$$p\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right) = e_1 + \sqrt{e_1 - e_2}\,\sqrt{e_1 - e_3},$$

$$p\left(\frac{\omega'}{2}\right) = e_3 - \sqrt{e_2 - e_3}\,\sqrt{e_1 - e_3},$$

$$p\left(\frac{\omega'}{2} + \omega\right) = e_3 + \sqrt{e_2 - e_3}\,\sqrt{e_1 - e_3},$$

$$p\left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{\omega'}{2}\right) = e_2 \mp i\sqrt{e_2 - e_3}\,\sqrt{e_1 - e_2}.$$

$$p'\left(\frac{\omega}{2}\right) = -2(e_1 - e_3)\sqrt{e_1 - e_2} - 2(e_1 - e_2)\sqrt{e_1 - e_3},$$

$$p'\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right) = 2i(e_1 - e_3)\sqrt{e_1 - e_2} - 2(e_1 - e_2)\sqrt{e_1 - e_3},$$

$$p'\left(\frac{\omega'}{2}\right) = -2i(e_1 - e_3)\sqrt{e_2 - e_3} - 2i(e_2 - e_3)\sqrt{e_1 - e_3},$$

$$p'\left(\frac{\omega'}{2} + \omega\right) = 2i(e_1 - e_3)\sqrt{e_2 - e_3} - 2i(e_2 - e_3)\sqrt{e_1 - e_3},$$

$$p'\left(\frac{\omega}{2} \pm \frac{\omega'}{2}\right) = 2(e_1 - e_2)\sqrt{e_2 - e_3} \pm 2i(e_2 - e_3)\sqrt{e_1 - e_2}.$$

In der Umgebung des Punktes $u = 0$ lässt sich p in Reihen entwickeln, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2, g_3 sind.

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + a_2 u^2 + a_4 u^4 + \cdots.$$

Darin ist

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \tfrac{1}{20} g_2, \\
a_4 &= \tfrac{1}{28} g_3, \\
a_6 &= \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5}, \\
a_8 &= \frac{3 g_2 g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}, \\
a_{10} &= \frac{1}{2^4 \cdot 13}\left(\frac{g_3^2}{7} + \frac{g_2^3}{2 \cdot 3 \cdot 5^3}\right), \\
a_{12} &= \frac{g_2^2 g_3}{2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}, \\
a_{14} &= \frac{1}{17}\left(\frac{3 g_2 g_3^2}{2^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{g_2^4}{2^8 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 13}\right), \\
a_{16} &= \frac{1}{19}\left(\frac{29 g_2^2 g_3}{2^8 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} + \frac{g_3^3}{2^6 \cdot 7^3 \cdot 13}\right), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Ferner lässt sich p in eine Doppelreihe mittelst der Formel entwickeln:

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + 3u^2 \sum \frac{1}{w^4} + 5u^4 \sum \frac{1}{w^6} + \cdots,$$

in welcher $w = 2m\omega + 2n\omega'$ ist und sich die Summirung über alle Combinationen von m und n (ganzen, positiven und negativen Zahlen) erstreckt mit Ausschluss der Combination 0, 0.

Specielle Fälle und Degeneration von p. Wenn $g_3 = 0$ ist, so erhält man den sogenannten *harmonischen* Fall; das elliptische Integral lässt sich in

$$u = -\frac{1}{\sqrt{e_1}} \int_0^q \frac{dq}{\sqrt{1 - q^4}}$$

umformen und die p-Function wird

$$p = e_1 q^{-2}.$$

Die Function p hat in diesem Fall die Eigenschaft:

$$p(iu) = -p(u).$$

Ist 2ω eine Periode, so ist auch $2i\omega$ eine Periode.

Für $g_2 = 0$ erhält man den *äquianharmonischen Fall. Die p-Function hat alsdann die Eigenschaft*

$$p(\alpha u) = \alpha p(u);$$

darin ist α eine Cubikwurzel aus der Einheit. Ist 2ω eine Periode, so ist auch $2\alpha\omega$ eine Periode.

Wenn die Discriminante Δ verschwindet, so degenerirt die Function p und wird eine einfach periodische Function, insbesondere entweder eine trigonometrische oder eine aus Exponentialgrössen zusammengesetzte Function.

Ist

$$e_2 = e_3 = a,$$

so wird

$$p(u) = a - \frac{3a}{\sin^2(u\sqrt{-3a})},$$

$$\omega = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{-3a}}, \quad \omega' = \infty;$$

und wenn $a = 0$ ist, so hat man einfach

$$p(u) = \frac{1}{u^2}.$$

Ist ferner

$$e_1 = e_2 = a,$$

so wird

$$p(u) = e_3 + 3a\left(\frac{e^{u\sqrt{3a}} + e^{-u\sqrt{3a}}}{e^{u\sqrt{3a}} - e^{-u\sqrt{3a}}}\right)^2,$$

$$\omega = \infty, \quad \omega' = \frac{i\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{3a}}.$$

§ 5. Die rationalen Functionen von p und p'.

Jede rationale Function von p und p' lässt sich als eine lineare Combination vom Typus

$$c + \sum_\nu c_\nu \zeta(u - u_\nu) + \sum_\mu c'_\mu p(u - u'_\mu) + \\ + \sum_\varrho c''_\varrho p'(u - u''_\varrho) + \cdots$$

ausdrücken, die in Bezug auf

$$\zeta(u) = \frac{d}{du}\log\sigma(u),$$

auf $p(u)$ und die successiven Derivirten von p linear ist. Ferner ist die Summe aller c_ν Null:

$$\sum c_\nu = 0.$$

Die Punkte u_ν sind die Unendlichkeitspunkte 1ter *Ordnung* der gegebenen Function, die Punkte u'_μ die 2ter *Ordnung*, die u''_ϱ die 3ter *Ordnung* u. s. w.

Jeder rationalen Function von p und p' lässt sich immer die Gestalt geben:

$$A\frac{\sigma(u-u_1')\,\sigma(u-u_2')\dots\sigma(u-u_\nu')}{\sigma(u-u_1'')\,\sigma(u-u_2'')\dots\sigma(u-u_\nu'')},$$

worin A eine Constante ist, die u' die Nullpunkte der Function, die u'' die Unendlichkeitspunkte bedeuten und die Summe aller u' der Summe aller u'' gleich kommt.

Diese beiden Ausdrücke für die rationalen Functionen von p und p' entsprechen den beiden bekannten Darstellungen der rationalen Functionen einer Variabelen durch Elementarbrüche und durch die Zerlegung des Zählers und Nenners in Factoren.

§ 6. Die Transformation der elliptischen Functionen.

Es mögen die beiden elliptischen Functionen gegeben sein:

$$p_1 = p(au+b,\ \omega_1,\ \omega_1')$$
$$p\ = p(u,\ \omega,\ \omega').$$

Die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, damit sich die erste Function p_1 durch die zweite rational ausdrücken lasse, bestehen darin, dass zwischen den halben Perioden ω_1, ω_1', ω, ω' und den Zahlen a, b Relationen von der Form

$$a\omega = \alpha\omega_1 + \beta\omega_1',$$
$$a\omega' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_1',$$
$$b = (m-\alpha-\gamma)\omega_1 + (n-\beta-\delta)\omega_1'$$

bestehen, worin α, β, γ, δ, m, n beliebige ganze Zahlen sind. Die Ermittelung eines solchen rationalen Ausdrucks von p_1 mittelst p bildet das Problem der *rationalen Transformation der Function p.* Die Zahl a heisst *Multiplicator;* es lässt sich zeigen, dass man bei der rationalen Transformation von p den Multiplicator immer gleich 1 und die Zahl b gleich Null setzen kann. Die Formeln für beliebige a und b lassen sich leicht aus denen für $a = 1$, $b = 0$ ableiten.

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = n$$

ist immer eine ganze positive Zahl und heisst die Ordnung der Transformation.

Die Fundamentaleigenschaft der Zahl n lautet: *Es sei p_1 rational durch p ausgedrückt:*

$$p_1 = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)},$$

worin φ, ψ zwei Polynome sind, welche keinen gemeinschaftlichen Factor haben; alsdann stellt die Zahl n den Grad der Gleichung

$$\varphi(p) - p_1 \psi(p) = 0$$

in p dar, d. h. den höheren der beiden Grade der Polynome φ und ψ; mit anderen Worten: sie gibt an, wie viele Werthe von p demselben Werth von p_1 entsprechen.

Wenn man, anstatt von der elliptischen Function p, von der elliptischen Function sin am ausgeht, so lässt sich das Problem der rationalen Transformation für sin am auf analoge Art aufstellen; man beachte jedoch, dass das eine Problem dem anderen nur in gewissen Fällen entspricht.

Die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, damit

$$\sin \mathrm{am}_1 = \sin \mathrm{am}\left(a'v + b', K_1, K_1'\right)$$

sich rational durch

$$\sin \mathrm{am} = \sin \mathrm{am}\left(v, K, K'\right)$$

ausdrücken lasse, bestehen darin, dass die Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} a' \cdot 2K &= \alpha' 2K_1 + \beta' i K_1', \\ a' \cdot iK' &= \gamma' 2K_1 + \delta' i K_1', \\ b &= (2m' + 1 - \alpha') K_1 + \tfrac{1}{2}(2n' - \beta') i K_1', \end{aligned}$$

worin α', β', γ', δ' ganze Zahlen bezeichnen.

Hierbei kann man nicht mehr, wie im vorhergehenden Fall, den Multiplicator ohne Weiteres gleich 1 nehmen; a' hat vielmehr hier einen von der Transformation selbst abhängigen Werth; ebensowenig kann man die Zahl b' in jedem Fall gleich Null setzen.

Das Problem der Transformation lässt sich auch so fassen: *Wenn die Differentialgleichung*

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = a' \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

gegeben ist, zu ermitteln, welche Beziehungen zwischen den Constanten l, a', k bestehen müssen, damit das Integral dieser Gleichung

$$y = \varphi(x)$$

sei, worin φ das Symbol einer rationalen Function von einem bestimmten Grad in x ist.

Oder auch:

Wenn das elliptische Differential

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

gegeben ist, es in ein anderes von derselben Form, d. h. in

$$\frac{1}{a'}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}$$

mittelst einer Transformation $y=\varphi(x)$ *von gegebenem Grad umzuformen und die Relationen zwischen den Grössen* l, a', k *aufzusuchen.*

Man sieht, dass das Problem der Transformation der elliptischen Functionen in dieser letzteren Form sich mit dem Problem deckt, ein elliptisches Integral in ein anderes umzuformen; diese Umformung kann, wenn sie auf geeignete Art angewendet wird, zur angenäherten numerischen Berechnung der Integrale selbst dienen. Vergl. Kap. 7, § 4, S. 157.

Die Transformationen werden durch die ganzen Zahlen α, β, γ, δ individualisirt; man stellt sie daher durch das Symbol

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

dar, das gewöhnliche Symbol einer linearen auf zwei homogene Variabele, die hier durch ω, ω' vertreten sind, ausgeübten Substitution. Siehe Kap. 14. Es lässt sich beweisen, dass die Zusammensetzung zweier Transformationen nach der bekannten Regel für das Product zweier linearer Substitutionen geschieht.

Jede Substitution

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

von der Ordnung $n=\alpha\delta-\beta\gamma$ *lässt sich immer durch eine geeignete Multiplication mit einer Substitution 1ter Ordnung auf eine solche vom Typus*

$$\begin{pmatrix}d & 0\\ \nu & \frac{n}{d}\end{pmatrix}$$

zurückführen, in welcher d *einen Theiler von* n *bedeutet und* ν *eine ganze positive Zahl bezeichnet, die kleiner als* $\frac{n}{d}$ *ist.*

Solche Substitutionen heissen *elementar;* ihre Anzahl beträgt

$$\sum\frac{n}{d},$$

worin die Summirung über alle Theiler d von n zu erstrecken ist. *Ist n eine Primzahl, so gibt es $n+1$ elementare Substitutionen.*

Das Product zweier elementarer Substitutionen ist ebenfalls eine elementare Substitution.

Jede Substitution von nicht primer Ordnung lässt sich abgesehen von Substitutionen 1[ter] *Ordnung aus anderen von primer Ordnung zusammensetzen.*

Alle Substitutionen 1[ter] *Ordnung kann man aus nur zwei (Erzeugungssubstitutionen) bilden:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die auf die halben Perioden ω, ω' ausgeübte *lineare Transformation* gelten die folgenden Resultate:

1. Die Function p bleibt unverändert, d. h. die Transformationsformel lautet einfach $p_1 = p$.

2. Die Invarianten g_2, g_3 ändern sich nicht.

3. Ebenso bleibt die ungerade σ-Function die nämliche.

4. Die geraden σ und die irrationalen Invarianten e dagegen werden nach den Formeln vertauscht:

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_1' = \sigma_1, & e_1' = e_1, \\ \sigma_2' = \sigma_3, & e_2' = e_3, \\ \sigma_3' = \sigma_2, & e_3' = e_2 \end{array}\right\} \text{bei der Erzeugungssubstitution A;}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_1' = \sigma_3, & e_1' = e_3, \\ \sigma_2' = \sigma_2, & e_2' = e_2, \\ \sigma_3' = \sigma_1, & e_3' = e_1 \end{array}\right\} \text{bei der Erzeugungssubstitution B.}$$

5. Die transcendenten halben Moduln 2[ter] Gattung η, η' werden bei der linearen Substitution mittelst derselben Formeln transformirt, wie die ω, ω'.

6. Bei der auf die ω ausgeübten Substitution A ändern sich die Grössen x und $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ nach den Gleichungen

$$x_1 = x, \qquad \tau_1 = \tau + 1$$

um und werden die ϑ nach den Formeln:

$$\vartheta\,(x, \tau + 1) = \vartheta_3\,(x, \tau),$$

$$\vartheta_1(x, \tau + 1) = e^{\frac{i\pi}{4}}\,\vartheta_1\,(x, \tau),$$

$$\vartheta_2(x, \tau + 1) = e^{\frac{i\pi}{4}}\,\vartheta_2\,(x, \tau),$$

$$\vartheta_3(x, \tau + 1) = \vartheta\,(x, \tau) \quad \text{transformirt.}$$

7. Bei der auf die ω ausgeübten Substitution B werden die Grössen x und τ bez.

$$x_1 = \frac{x}{\tau}, \quad \tau_1 = -\frac{1}{\tau}$$

und ändern sich die ϑ nach den Formeln um:

$$\vartheta\left(\frac{x}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = i\sqrt{i\tau}\, e^{\frac{ix^2}{\pi\tau}}\, \vartheta_2(x, \tau),$$

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{i\tau}\, e^{\frac{ix^2}{\pi\tau}}\, \vartheta_1(x, \tau),$$

$$\vartheta_2\left(\frac{x}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = i\sqrt{i\tau}\, e^{\frac{ix^2}{\pi\tau}}\, \vartheta(x, \tau),$$

$$\vartheta_3\left(\frac{x}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = i\sqrt{i\tau}\, e^{\frac{ix^2}{\pi\tau}}\, \vartheta_3(x, \tau).$$

8. Während p bei jeder beliebigen linearen Transformation unverändert bleibt, verhält sich sin am nicht so einfach. Wir nehmen an, die linearen Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ würden nicht mehr auf ω, ω' sondern auf $2K$, iK' ausgeführt. Alle möglichen Formen der Relation

$$\sin \operatorname{am}(av + b, l^2) = \frac{C + D \sin \operatorname{am}(v, k^2)}{C' + D' \sin \operatorname{am}(v, k^2)}$$

sind dann in den folgenden 24 Formeln enthalten:

$$\begin{cases} \sin \operatorname{am}(\pm v, k^2) = \pm \sin \operatorname{am}(v, k^2), \\ \sin \operatorname{am}(\pm v + iK_1', k^2) = \pm \dfrac{1}{k \sin \operatorname{am}(v, k^2)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \operatorname{am}\left(\pm kv, \dfrac{1}{k^2}\right) = \pm k \sin \operatorname{am}(v, k^2), \\ \sin \operatorname{am}\left(\pm kv + iK_1', \dfrac{1}{k^2}\right) = \pm \dfrac{1}{\sin \operatorname{am}(v, k^2)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \operatorname{am}\left\{\pm \left[\dfrac{(1+\sqrt{k})^2}{2i} v + \dfrac{iK_1'}{2} + K_1\right], \left[\dfrac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right]^4\right\} = \\ \qquad = \pm \dfrac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\, \dfrac{1-\sqrt{k} \sin \operatorname{am}(v, k^2)}{1+\sqrt{k} \sin \operatorname{am}(v, k^2)}, \\ \sin \operatorname{am}\left\{\pm \left[\dfrac{(1+\sqrt{k})^2}{2i} v - \dfrac{iK_1'}{2} - K_1\right], \left[\dfrac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right]^4\right\} = \\ \qquad = \mp \dfrac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\, \dfrac{1-\sqrt{k} \sin \operatorname{am}(v, k^2)}{1+\sqrt{k} \sin \operatorname{am}(v, k^2)}, \end{cases}$$

$$\begin{cases}
\sin\operatorname{am}\left\{\pm\left[\frac{(1-\sqrt{k})^2}{2i}v+\frac{iK_1'}{2}+K_1\right],\left[\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right]^4\right\}= \\
\qquad =\pm\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\,\frac{1+\sqrt{k}\sin\operatorname{am}(v,k^2)}{1-\sqrt{k}\sin\operatorname{am}(v,k^2)}, \\
\sin\operatorname{am}\left\{\pm\left[\frac{(1-\sqrt{k})^2}{2i}v-\frac{iK_1'}{2}-K_1\right],\left[\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right]^4\right\}= \\
\qquad =\mp\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\,\frac{1+\sqrt{k}\sin\operatorname{am}(v,k^2)}{1-\sqrt{k}\sin\operatorname{am}(v,k^2)},
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\sin\operatorname{am}\left\{\pm\left[\frac{(1+i\sqrt{k})^2}{2i}v+\frac{iK_1'}{2}+K_1\right],\left[\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right]^4\right\}= \\
\qquad =\pm\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\,\frac{1-i\sqrt{k}\sin\operatorname{am}(v,k^2)}{1+i\sqrt{k}\sin\operatorname{am}(v,k^2)}, \\
\sin\operatorname{am}\left\{\pm\left[\frac{(1+i\sqrt{k})^2}{2i}v-\frac{iK_1'}{2}-K_1\right],\left[\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\right]^4\right\}= \\
\qquad =\mp\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\,\frac{1-i\sqrt{k}\sin\operatorname{am}(v,k^2)}{1+i\sqrt{k}\sin\operatorname{am}(v,k^2)},
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\sin\operatorname{am}\left\{\pm\left[\frac{(1-i\sqrt{k})^2}{2i}v+\frac{iK_1'}{2}+K_1\right],\left[\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right]^4\right\}= \\
\qquad =\pm\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\,\frac{1+i\sqrt{k}\sin\operatorname{am}(v,k^2)}{1-i\sqrt{k}\sin\operatorname{am}(v,k^2)}, \\
\sin\operatorname{am}\left\{\pm\left[\frac{(1-i\sqrt{k})^2}{2i}v-\frac{iK_1'}{2}-K_1\right],\left[\frac{1+i\sqrt{k}}{1-i\sqrt{k}}\right]^4\right\}= \\
\qquad =\mp\frac{1-i\sqrt{k}}{1+i\sqrt{k}}\,\frac{1+i\sqrt{k}\sin\operatorname{am}(v,k^2)}{1-i\sqrt{k}\sin\operatorname{am}(v,k^2)}.
\end{cases}$$

Wir haben im Vorstehenden alle diejenigen Formeln durch ein Klammerzeichen zusammengefasst, welche demselben Werth des transformirten Moduls l^2 entsprechen, der nur sechs verschiedene Werthe haben kann.

Dabei sind $2K_1$, iK_1' die halben Perioden der transformirten Function sin am.

Transformation zweiter Ordnung. Die auf die ω, ω' ausgeführten drei elementaren Transformationen 2ter Ordnung sind:

$$(a)=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \text{d. h.}\quad \begin{aligned}\omega&=2\omega_1,\\ \omega'&=\omega_1',\end{aligned}$$

$$(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{d. h.} \quad \begin{array}{l} \omega = \omega_1, \\ \omega' = 2\omega_1', \end{array}$$

$$(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{d. h.} \quad \begin{array}{l} \omega = \omega_1, \\ \omega' = \omega_1 + 2\omega_1'. \end{array}$$

1. Für solche Substitutionen sind die entsprechenden Transformationen von p, wenn man annimmt, die p-Function auf der rechten Seite habe die halben Moduln ω, ω':

$$\text{a)} \quad p\left(u;\ \frac{\omega}{2},\ \omega'\right) = \frac{p^2(u) - e_1 p(u) + (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{p(u) - e_1},$$

$$\text{b)} \quad p\left(u;\ \omega,\ \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{p^2(u) - e_3 p(u) + (e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{p(u) - e_3},$$

$$\text{c)} \quad p\left(u;\ \omega,\ \frac{\omega' - \omega}{2}\right) = \frac{p^2(u) - e_2 p(u) + (e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}{p(u) - e_2}.$$

2. Die Transformationen der ungeraden σ-Functionen sind:

$$\text{a)} \quad \sigma\left(u;\ \frac{\omega}{2},\ \omega'\right) = e^{\frac{1}{2} e_1 u^2} \sigma(u)\, \sigma_1(u),$$

$$\text{b)} \quad \sigma\left(u;\ \omega,\ \frac{\omega'}{2}\right) = e^{\frac{1}{2} e_3 u^2} \sigma(u)\, \sigma_3(u),$$

$$\text{c)} \quad \sigma\left(u;\ \omega,\ \frac{\omega' - \omega}{2}\right) = e^{\frac{1}{2} e_2 u^2} \sigma(u)\, \sigma_2(u).$$

3. Die den transcendenten Moduln 2ter Gattung η, η' entsprechenden Transformationen lauten:

$$\text{a)} \quad \eta_1 = \tfrac{1}{2} e_1 \omega + \eta, \quad \eta_1' = e_1 \omega' + 2\eta',$$

$$\text{b)} \quad \eta_1 = e_3 \omega + 2\eta, \quad \eta_1' = \tfrac{1}{2} e_3 \omega' + \eta',$$

$$\text{c)} \quad \eta_1 = e_2 \omega + 2\eta, \quad \eta_1' = \tfrac{1}{2} e_2 (\omega' - \omega) + (\eta' - \eta).$$

4) Die den geraden σ entsprechenden Transformationen sind:

$$\text{a)} \quad \sigma_1\left(u;\ \frac{\omega}{2},\ \omega'\right) = \sigma^2(u) \left[p(u) - p\left(\frac{\omega}{2}\right)\right] e^{\frac{1}{2} e_1 u^2},$$

$$\sigma_2\left(u;\ \frac{\omega}{2},\ \omega'\right) = \sigma_3{}^2(u)\, \frac{p\left(\frac{\omega}{2}\right) - p(\omega + \omega')}{p\left(\frac{\omega}{2}\right) - p(\omega')}\, e^{\frac{1}{2} e_1 u^2},$$

$$\sigma_3\left(u;\ \frac{\omega}{2},\ \omega'\right) = \sigma_3(u)\, \sigma_2(u)\, e^{\frac{1}{2} e_1 u^2},$$

b) $$\sigma_1\left(u;\,\omega,\,\frac{\omega'}{2}\right)=\sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\,e^{\frac{1}{2}e_3u^2},$$

$$\sigma_2\left(u;\,\omega,\,\frac{\omega'}{2}\right)=\sigma_1{}^2(u)\,\frac{p(u+\omega)-p\left(\frac{\omega'}{2}\right)}{p(\omega)-p\left(\frac{\omega'}{2}\right)}\,e^{\frac{1}{2}e_3u^2},$$

$$\sigma_3\left(u;\,\omega,\,\frac{\omega'}{2}\right)=\sigma(u)\left[p(u)-p\left(\frac{\omega'}{2}\right)\right]e^{\frac{1}{2}e_3u^2},$$

c) $$\sigma_1\left(u;\,\omega,\,\frac{\omega'-\omega}{2}\right)=\sigma_1(u)\,\sigma_3(u)\,e^{\frac{1}{2}e_2u^2},$$

$$\sigma_2\left(u;\,\omega,\,\frac{\omega'-\omega}{2}\right)=\sigma(u)\left[p(u)-p\left(\frac{\omega''}{2}\right)\right]e^{\frac{1}{2}e_2u^2},$$

$$\sigma_3\left(u;\,\omega,\,\frac{\omega'-\omega}{2}\right)=\sigma_1{}^2(u)\,\frac{p\left(\frac{\omega''}{2}\right)-p(u+\omega)}{p\left(\frac{\omega''}{2}\right)-p(\omega)}\,e^{\frac{1}{2}e_2u^2}.$$

5. Die irrationalen Invarianten $e_1,\ e_2,\ e_3$ werden nach den folgenden Formeln transformirt:

a) $$e_1'=e_1+2\sqrt{e_1-e_2}\,\sqrt{e_1-e_3},$$
$$e_2'=e_1-2\sqrt{e_1-e_2}\,\sqrt{e_1-e_3},$$
$$e_3'=-\,2e_1,$$

b) $$e_1'=-\,2e_3,$$
$$e_2'=e_3+2\sqrt{e_1-e_3}\,\sqrt{e_2-e_3},$$
$$e_3'=e_3-2\sqrt{e_1-e_3}\,\sqrt{e_2-e_3},$$

c) $$e_1'=-\,2e_2,$$
$$e_2'=e_2-2i\sqrt{e_2-e_3}\,\sqrt{e_1-e_2},$$
$$e_3'=e_2+2i\sqrt{e_2-e_3}\,\sqrt{e_1-e_2}.$$

6. Mittelst der gefundenen Werthe der e' lassen sich die Werthe des transformirten Moduls l^2 in jedem der drei Fälle ermitteln. Man erhält:

a) $$l^2=\frac{(1-k')^2}{(1+k')^2},$$

b) $$l^2=\frac{4k}{(1+k)^2},$$

c) $$l^2=-\,\frac{4ikk'}{(k'-ik)^2}.$$

7. Die ϑ-Functionen ändern sich auf die folgende Art:

a) $$q_1 = q^2, \qquad x_1 = 2x,$$

$$\vartheta(2x, q^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2K\sqrt{k'}}}\,\vartheta(x,q)\,\vartheta_3(x,q),$$

$$\vartheta_1(2x, q^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2K\sqrt{k'}}}\,\vartheta_1(x,q)\,\vartheta_2(x,q),$$

$$\vartheta_2(2x, q^2) = \frac{1}{2k'}\sqrt{\frac{\pi}{K}}\left\{\sqrt{1-k'}\,\vartheta^2(x,q) - \sqrt{1+k'}\,\vartheta_1^2(x,q)\right\},$$

$$\vartheta_3(2x, q^2) = \frac{1}{2k'}\sqrt{\frac{\pi}{K}}\left\{\sqrt{1+k'}\,\vartheta^2(x,q) - \sqrt{1-k'}\,\vartheta_1^2(x,q)\right\},$$

b) $$q_1 = q^{\frac{1}{2}}, \qquad x_1 = x,$$

$$\vartheta(x, \sqrt{q}) = \frac{1}{k'}\sqrt{\frac{\pi(1-k)}{2K}}\left\{\vartheta^2(x,q) + \vartheta_1^2(x,q)\right\},$$

$$\vartheta_1(x, \sqrt{q}) = \sqrt{\frac{\pi}{K\sqrt{k}}}\,\vartheta(x,q)\,\vartheta_1(x,q),$$

$$\vartheta_2(x, \sqrt{q}) = \sqrt{\frac{\pi}{K\sqrt{k}}}\,\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_2(x,q),$$

$$\vartheta_3(x, \sqrt{q}) = \frac{1}{k'}\sqrt{\frac{\pi(1+k)}{2K}}\left\{\vartheta^2(x,q) - \vartheta_1^2(x,q)\right\},$$

c) $$q_1 = e^{-\frac{i\pi}{2}} q^{\frac{1}{2}}, \qquad x_1 = x,$$

$$\vartheta_1\left(x, e^{-\frac{i\pi}{2}} q^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi i\sqrt{i}}{K\sqrt{kk'}}}\,\vartheta_3(x,q)\,\vartheta_1(x,q),$$

$$\vartheta_2\left(x, e^{-\frac{i\pi}{2}} q^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi i\sqrt{i}}{K\sqrt{kk'}}}\,\vartheta(x,q)\,\vartheta_2(x,q),$$

$$\vartheta_3\left(x, e^{-\frac{i\pi}{2}} q^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2K(k'+ik)}}\left\{\vartheta_3^2(x,q) + i\vartheta_1^2(x,q)\right\},$$

$$\vartheta\left(x, e^{-\frac{i\pi}{2}} q^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2K(k'-ik)}}\left\{\vartheta_3^2(x,q) - i\vartheta_1^2(x,q)\right\}.$$

8. Wir geben jetzt die Transformationsformeln für sin am an. Wenn ω, ω' den drei obigen Transformationen unterworfen werden, so transformirt sich p *rational,* sin am dagegen rational *nur bei den zwei ersten* dieser Substitutionen; bei der dritten ergibt sich eine irrationale Transformation von sin am.

Die den drei angegebenen *rationalen* Transformationen von p entsprechenden Umformungen von sin am sind:

a) $\sin\operatorname{am}\left\{(1+k')v+K_1,\ \left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2\right\}=\frac{1-(1+k')\sin^2\operatorname{am}(v,k)}{1-(1-k')\sin^2\operatorname{am}(v,k)}$,

die Landen'sche Transformation, siehe Kap. 7, § 4,

b) $\sin\operatorname{am}\left\{(1+k)v,\ \frac{4k}{(1+k)^2}\right\}=\frac{(1+k)\sin\operatorname{am}(v,k)}{1+k\sin^2\operatorname{am}(v,k)}$,

die Gauss'sche Transformation, siehe ebenda,

c) $\sin\operatorname{am}\left\{(k'-ik)v,\ -\frac{4ikk'}{(k'-ik)^2}\right\}=$

$$=\frac{(k'-ik)\sin\operatorname{am}(v,k)\sqrt{1-k^2\sin^2\operatorname{am}(v,k)}}{1-k(k+ik')\sin^2\operatorname{am}(v,k)},$$

die irrationale Transformation.

Mit der Transformation der elliptischen Functionen haben sich zuerst Jacobi, *Fundam. nova* etc.; *Astron. Nachr.*, 6, Nr. 123, 127 und Abel beschäftigt, *Crelle*, 3, S. 169; ib., 4; *Précis d'une théorie des fonctions ellipt.*, Kap. 4, 5; *Astron. Nachr.*, 6, Nr. 138; 7, Nr. 147. Auf Jacobi und Abel folgten zunächst Sohncke, *Crelle*, 7; Plana, *Mem. di Torino*, 1829 und dann nach vielen Jahren eine andere Arbeit des letzteren Autors, *Mem. di Torino*, 1863; Guetzlaff, *Crelle*, 12; Gudermann, *Crelle*, 19, 25; Hermite, *Journ. d. Liouv.*, 3, 1858; 9, 1844; *Compt. Rend.*, 1862; *Crelle*, 32, 40; Cayley, *Phil. Mag.*, (4), 15; Richelot, *Compt. Rend.*, 1859; Gordan, *Ueber die Transformation der θ-Functionen, Dissert.*, Giessen 1863; Brioschi, *Compt. Rend.*, 1874 und sehr viele Andere, von welchen man ein Verzeichniss in dem unten citirten Werk von Enneper, S. 427 u. ff. findet. Die Theorie der Transformation mittelst der Weierstrass'schen p-Function entwickelte Felix Müller in der *Dissertation, De transf. funct. ellipticarum*, Berlin 1867; eine andere Arbeit desselben Autors führt den Titel: *Ueber die Transformation* 4ten *Grads der ellipt. Funct.*, Berlin 1872; wir verweisen auch auf: Kiepert, *Crelle*, 76, 87, 88, 95; *Math. Ann.*, 26, etc.

§ 7. Ueber die Multiplication des Arguments in den elliptischen Functionen. Complexe Multiplication.

Das Problem der Multiplication des Arguments in den elliptischen Functionen lautet:

Die Formel zu finden, mittelst welcher eine elliptische Function (z. B. sin am oder p), deren Argument mit einer ganzen Zahl n multiplicirt ist, sich durch dieselbe elliptische Function mit einfachem Argument ausdrücken lässt.

Das Problem der Multiplication mit n ist ein specielles Transformationsproblem von der Ordnung n^2; bei einer solchen Transformation bleibt der Modul ungeändert.

Handelt es sich um die Multiplication des Arguments in der Function sin am, *so lässt sich, wenn n eine ungerade Zahl ist, die Function* $\sin \operatorname{am} (nv)$ *immer rational durch* $\sin \operatorname{am} v$ *ausdrücken, ist dagegen n gerade, so ist* $\sin \operatorname{am} (nv + K)$, *worin* $2K$ *die erste halbe Periode der Function sin am bedeutet, rational durch* $\sin \operatorname{am} v$ *ausdrückbar und* $\sin \operatorname{am} (nv)$ *durch eine mit*

$$\sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am} v}\,\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} v}$$

multiplicirte rationale Function von $\sin \operatorname{am} v$.

Handelt es sich dagegen um die elliptische Function $p(u)$, so gilt der Satz, *dass sich* $p(nu)$ *immer rational durch* $p(u)$ *ausdrücken lasse.*

Zerlegt man n in seine Primfactoren, so kann man die Multiplication mit n stets auf successive Multiplicationen mit 2 *und mit ungeraden Primfactoren zurückführen.*

Die Formeln für die Multiplication mit 2, 3 sind für die Function sin am:

$$\sin \operatorname{am} 2v = \frac{2 \sin \operatorname{am} v \sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am} v}\,\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} v}}{1 - k^2 \sin^4 \operatorname{am} v},$$

$$\sin \operatorname{am} 3v =$$

$$= \frac{\sin \operatorname{am} v \{3 - 4(1 + k^2)\sin^2 \operatorname{am} v + 6k^2 \sin^4 \operatorname{am} v - k^4 \sin^8 \operatorname{am} v\}}{1 - 6k^2 \sin^4 \operatorname{am} v + 4k^2(1 + k^2)\sin^6 \operatorname{am} v - 3k^4 \sin^8 \operatorname{am} v}.$$

Die Multiplicationsformeln für 4, 5, ⋯ sind bei weitem complicirter. Man findet sie z. B. bei Cayley, *An elementary treatise on elliptic functions,* Cambridge 1876.

Die folgende allgemeine Formel ist bemerkenswerth, vergl. Enneper, *Elliptische Functionen, Theorie und Geschichte,* Halle 1890, S. 374, jedoch sind die Coefficienten in ihr nicht explicite in Functionen von k ausgedrückt. Die Zahl n wird als *ungerade Primzahl* vorausgesetzt.

$$\sin\operatorname{am}(nv) = n\sin\operatorname{am} v \prod_{m,m'} \frac{1 - \dfrac{\sin^2\operatorname{am} v}{\sin^2\operatorname{am}\dfrac{2mK + 2m'iK'}{n}}}{1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\dfrac{2mK + 2m'iK'}{n}\sin^2\operatorname{am} v},$$

worin das Product über alle Combinationen

$$\begin{cases} m = 1, 2, \cdots, \frac{n-1}{2}, \\ m' = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm \frac{n-1}{2} \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} m = 0, \\ m' = +1, +2, +3, \cdots, +\frac{n-1}{2} \end{cases}$$

zu erstrecken ist.

Die Multiplicationsformeln für die Function p lauten:

$$p(nu) = p(u) - \frac{\psi_{n+1}\psi_{n-1}}{\psi_n^2},$$

worin

$$\psi_1 = 1,$$
$$\psi_2 = -p'(u),$$
$$\psi_3 = 3p^4(u) - \tfrac{3}{2}g_2 p^2(u) - 3g_3 p(u) - \tfrac{1}{16}g_2^2,$$
$$\psi_4 = p'(u)\{-2p^6 + \tfrac{5}{2}g_2 p^4 + 10 g_3 p^3 + \tfrac{5}{8}g_2^2 p^2 + + \tfrac{1}{2}g_2 g_3 p + g_3^2 + \tfrac{1}{32}g_2^3\}$$

. . . .

ist.

Die ψ sind durch die Recursionsformel bestimmt:

$$\psi_{2n+1} = \psi_{n+2}\psi_n^3 - \psi_{n-1}\psi_{n+1}^3,$$

$$\psi_{2n} = -\frac{\psi_n}{p'}\left(\psi_{n+2}\psi_{n-1}^2 - \psi_{n-2}\psi_{n+1}^2\right).$$

Ueber diese Formeln siehe **Halphén**, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, 3 Bde., Paris **1886, 88, 91, 1**, S. 102.

Die Multiplication der elliptischen Functionen hat **Abel** zuerst in seinen *Recherches sur les fonctions ellipt.*, **Crelle, 2,** S. 114 u. 146 behandelt, dann hat **Abel** in Kap. **1, § 4 und**

Kap. 4, §§ 9 und 10 des *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, Crelle,* 4 sowohl die Multiplication wie die Division in etwas anderer Art als in dem ersten Aufsatz ausgeführt.

Das Problem *der complexen Multiplication* des Arguments in den elliptischen Functionen kann man auf die nachstehenden verschiedenen Arten aussprechen:

Wenn ein Polynom 4ten *oder* 3ten *Grads* $f(x)$ *gegeben ist, welchen Bedingungen muss dieses und die complex vorausgesetzte Zahl* m *genügen, damit die Differentialgleichung*

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{m}\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$$

ein rationales Integral von der Form

$$y = R(x)$$

zulasse?

Wenn m *eine reelle ganze Zahl ist, so hat diese Gleichung in jedem Fall ein Integral von der angegebenen Form und kommt man auf das Problem der gewöhnlichen Multiplication zurück.*

Gibt man dem Polynom $f(x)$ die specielle Legendre'sche oder Weierstrass'sche Form, so kann man das Problem auch so fassen: *Welche besonderen Bedingungen müssen die Jacobi'schen oder Weierstrass'schen elliptischen Functionen und die Zahl* m *erfüllen, damit sich* $\sin \operatorname{am} (mv)$ *rational durch* $\sin \operatorname{am} v$ *ausdrücken lasse? oder damit* $\wp(mu)$ *rational mittelst* $\wp(u)$ *ausdrückbar sei?*

Die Zahl m *muss die Form* $a + i\sqrt{b}$ *haben, worin* a *und* b *rationale Zahlen bedeuten.*

Das Verhältniss $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ *der Perioden jener elliptischen Functionen, welche complexe Multiplicationen gestatten, muss die Wurzel einer Gleichung zweiten Grads mit ganzzahligen Coefficienten sein.*

Die Moduln der elliptischen Functionen, welche complexe Multiplication zulassen, heissen nach Kronecker *singuläre Moduln* und haben auch sehr interessante algebraische Eigenschaften.

Die Grundeigenschaften der elliptischen Functionen bez. der complexen Multiplication wurden von Abel entdeckt und

theils mit, theils ohne Beweis mitgetheilt. Die wichtigsten Arbeiten darüber verdankt man Kronecker, *Berl. Akad. Monatsber.*, 1857, 62, 63, 70, 75, 77, 80, 82 und Hermite, *Compt. Rend.*, 1859. Alsdann citiren wir: Greenhill, *Complex multiplication of elliptic functions, Cambr. Phil. Soc. Proc.*, Bd. 4, 1883; Weber, *Acta math.*, 6; Pick, *Math. Ann.*, 25, 26; Sylow, *Journ. de Liouville*, 3, 1887; Kiepert, *Math. Ann.*, 39; etc.

Ueber die Anwendung dieser Theorie auf die Theilung des Lemniscatenbogens siehe Abel, *Oeuvres complètes de N. H. Abel par Holmboë*, Christiania 1839; Hoffmann, *Crelle*, 48; Kiepert, *Crelle*, 75; Schwering, *Crelle*, 107; etc.

Eine Darstellung der Theorie der complexen Multiplication der elliptischen Functionen findet man bei H. Weber, *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen*, Braunschweig 1897.

Vergl. auch die Betrachtungen von F. Klein, *Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie*, Vorlesungen geh. im W. S. 1895/96, und S. S. 1896, autographirt.

Die Theorie der elliptischen Functionen ist hervorgegangen aus den Versuchen, das Problem der Rectification der Ellipse, Hyperbel, Lemniscate etc. aufzulösen. Die ersten, die sich mit ihr beschäftigten, waren Fagnano, Landen, D'Alembert, Maclaurin; der erste aber, der die zerstreuten Resultate sammelte und allgemeine Principien aufstellte, war Euler, *Novi Comm. Petrop.*, 10, 1764. Auf Euler folgte Legendre; er behandelte den Gegenstand in verschiedenen Memoiren, *Mém. de l'Ac. de Par.*, 1786, 1793 etc. und veröffentlichte schliesslich 1825 sein berühmtes Werk: *Traité des fonctions elliptiques et des intégrals eulériennes*, Paris 1825, 1828, 2 Bde. mit 3 Supplem. Legendre nannte die elliptischen Integrale *elliptische Functionen;* Abel und Jacobi haben zuerst die inversen Functionen der Integrale betrachtet, d. h. die Function sin am, später cos am und Δ am und gaben diesen den Namen *elliptische Functionen.* Wir haben diese letzteren daher *die Jacobi'schen Functionen* genannt.

Die Zeit von 1825 bis 1829 ist wohl die wichtigste für die Theorie der elliptischen Functionen; denn ausser dem classischen Werk Legendre's folgten sich in diesen Jahren kurz aufeinander die genialen Arbeiten Abel's und Jacobi's. Des letzteren in Königsberg erschienene *Fundamenta nova theoriae*

functionum ellipticarum sind gerade aus dem Jahr 1829. In diesem hervorragenden Werk begann Jacobi die Theorie der ϑ-Functionen zu studiren, welche er dann später in anderen Aufsätzen weiter entwickelt hat. Die Geschichte der Lehre von den elliptischen Functionen, wie diese zu jener Zeit 1826—1829 sich ausgebildet hat, findet man in dem kleinen Werk Königsberger's, *Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten* 1826—1829, Leipzig 1879, auf sehr interessante Art dargestellt. Vergl. auch Casorati, *Teorica d. funzioni di variabili complesse,* Pavia 1868. Nach Jacobi machte die Entwicklung der Theorie den bedeutendsten Schritt vorwärts, als Weierstrass seine σ-Functionen einführte.

Fast Alle, die sich in diesem Jahrhundert mit Analysis beschäftigt haben, zogen auch die elliptischen Functionen mehr oder weniger in den Bereich ihrer Betrachtungen: Cayley, Hermite, Weierstrass, Brioschi, Klein und viele Andere.

In Bezug auf eingehende historische Angaben über jeden einzelnen Punkt der Theorie verweisen wir auf das werthvolle Werk Enneper's *Ellipt. Funct.*, Halle 1890. Ausserdem sind zu nennen Briot und Bouquet, *Théorie d. fonctions elliptiques,* Paris 1875; Cayley, l. c.; Königsberger, *Vorlesungen über die Theorie der ellipt. Funct.*, Leipzig 1874; Greenhill, *The applications of elliptic functions,* London 1892; Halphén, Paris 1886, siehe oben. In dem letzteren Buch sucht der Verfasser die elliptischen Functionen auf elementarem Weg einzuführen, ähnlich wie es mit den trigonometrischen Functionen geschieht. Uns scheint aber, als ob diese Methode sich nicht besonders dazu eigne, eine umfassende und allgemeine Vorstellung von dem Gegenstand zu gewinnen.

Eine Sammlung von Formeln in Bezug auf die Weierstrass'sche Theorie findet man in einem kleinen unvollendeten Werk von Schwarz, *Formeln und Lehrsätze* etc., Göttingen 1889. Neuer sind die Werke von Tannery und Molk, *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques,* Paris 1893; Appell-Lacour, *Principes sur la théorie des fonctions elliptiques et applications,* Paris 1897; Krause, *Theorie der doppeltperiodischen Funct.*, Leipzig 1895 und Pascal, *Funzioni ellittiche,* Mailand 1896.

Die elliptischen Functionen pflegt man auf verschiedene Art darzustellen; entweder geht man von der Inversion der elliptischen Integrale aus oder von der allgemeinen Theorie der Functionen und wendet die letztere auf die doppelt periodischen

Functionen an, oder man legt schliesslich die ϑ-Functionen Jacobi's zu Grunde und die vielfachen Relationen, die zwischen ihnen bestehen. Das letztere hat der Verfasser in seinem Buche über die elliptischen Functionen gethan und sich dabei auf eine Abhandlung Jacobi's, *Theorie der ellipt. Funct. aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet, Werke,* 1, S. 497 gestützt, die denselben Zweck verfolgte, so weit es zur damaligen Zeit möglich war. Es ist übrigens zweifellos, dass die anderen Methoden die Grundprincipien der Lehre von den elliptischen Functionen, welche eine der wichtigsten in der Mathematik ist, vollständiger und allgemeiner darstellen.

Ueber die Theorie der doppelt periodischen Functionen, welche die *allgemeinen* elliptischen Functionen sind, siehe Kap. 14.

Kapitel XVII.

Die hyperelliptischen und die Abel'schen Functionen.

§ 1. Das Umkehrungstheorem Jacobi's.

Wir wollen ein Abel'sches Integral vom Geschlecht p betrachten (vergl. Kap. 15):

$$V = \int_a^{(w,z)} F(w, z)\, dz.$$

Es hat $2p$ Periodicitätsmoduln, wenn es von keiner anderen als der 1ten und 2ten Gattung ist; der Punkt (w, z) ist daher, als Function von V angesehen, eine $2p$-fach periodische Function. Aus einem berühmten Theorem Jacobi's (siehe die periodischen Functionen Kap. 14, § 4) weiss man nun, dass eine solche Function für $p > 1$ nicht monodrom sein kann; insbesondere hat z, als Function von V betrachtet, *nicht etwa einen einzigen Werth, sondern unendlich viele Werthe.*

Die Inversion (Umkehrung) des Abel'schen Integrals lässt sich daher auf die oben angegebene Art nicht ausführen, weil man keine monodromen Functionen erhalten würde. Jacobi überwand die Schwierigkeit auf die folgende Art (*De theoremate Abeliano observatio* oder *Considerationes generales de transcendentibus Abelianis, Crelle,* 9, 1832):

Man setze

$$U_1 = \left\{\int_{a_1}^{z_1} + \int_{a_2}^{z_2} + \cdots + \int_{a_p}^{z_p}\right\} du_1,$$

$$U_2 = \left\{\int_{a_1}^{z_1} + \int_{a_2}^{z_2} + \cdots + \int_{a_p}^{z_p}\right\} du_2,$$

. . . .

$$U_p = \left\{\int_{a_1}^{z_1} + \int_{a_2}^{z_2} + \cdots + \int_{a_p}^{z_p}\right\} du_p,$$

indem man der Einfachheit wegen mit z_i einen Punkt der Riemann'schen Fläche bezeichnet, der jedoch von den Werthen von w und z und nicht nur von den Werthen von z allein abhängt. Darin sind $du_1, \cdots, du_p$ die Differentiale von p linear von einander unabhängigen Integralen 1ter Gattung und $a_1, \cdots, a_p$ feste aber willkürlich gewählte Punkte. Die Functionen $U_1, \cdots, U_p$, die aus der Summe von p ähnlichen Integralen bestehen, haben dieselben Periodicitätsmoduln, wie jedes einzelne der p Integrale. Werden die Integrale solche, die wir *normal* genannt haben (vergl. Kap. 15, § 5), mit den Moduln τ auf den Schnitten B, so erhalten die linken Seiten dieselben Moduln; wir wollen sie $V_1, V_2, \cdots, V_p$ nennen.

Sind die oberen Grenzen $z_1, \cdots, z_p$ festgesetzt, so ist der Werth der U bis auf die Periodicitätsmoduln bestimmt. Man zerlege nun jedes U in seinen reellen und imaginären Theil und betrachte einen Raum von $2p$ Dimensionen, in welchem die Coordinaten eines Punktes die $2p$ Werthe der reellen und der imaginären Theile von $U_1, \cdots, U_p$ sind.

Nennt man im Allgemeinen $\omega_{ij} \begin{pmatrix} i = 1, \cdots, p \\ j = 1, \cdots, 2p \end{pmatrix}$ die Periodicitätsmoduln von U_i, setzt

$$\omega_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \sqrt{-1}$$

und zeichnet in dem genannten Raum alle Punkte

$$(U) = (\omega_{1j}, \omega_{2j}, \cdots, \omega_{pj})$$

auf, welche mit dem Punkt $(U) = (0)$ die Ecken eines Parallelepipedons in diesem Raum bilden, so werden die diesen congruenten Parallelepipeda eine Theilung des ganzen Raums von $2p$ Dimensionen derart bewirken, dass für jeden Punkt des Raums ein ihm äquivalenter Punkt in dem ursprünglichen Parallelepipedon existirt, von dessen Coordinaten die seinigen sich um ganze Vielfache der Periodicitätsmoduln unterscheiden.

Jedem System von Punkten $z_1, \cdots, z_p$ entspricht ein Punkt des Anfangsparallelepipedons in dem Raum der U; ein System von p Punkten kann sich im Allgemeinen nicht so ändern, dass es *corresidual* mit sich selbst bleibt, weil es ein allgemeines und kein *specielles* System ist (siehe das Riemann-Roch'sche Theorem, Kap. 15, § 3). Liegt dagegen ein *specielles* System von p Punkten vor, so entspricht allen anderen ihm corresidualen derselbe Punkt im Raum (U).

Jeder Punkt des Anfangsparallelepipedons in dem Raum der U entspricht bis auf einen gewissen Ort singulärer Punkte

nur einem einzigen der Systeme von p Punkten, und jedes System von p Punkten entspricht einem einzigen Punkt des Anfangsparallelepipedons; die allen möglichen Systemen von p Punkten entsprechenden Punkte U füllen das ganze Anfangsparallelepipedon aus.

Das System von p Punkten kann man mithin im Allgemeinen als eine Function der p Argumente U auffassen; insbesondere ist eine rationale symmetrische Function von p beliebig auf der Riemann'schen Fläche gewählten Punkten als eine monodrome Function der U anzusehen; eine solche Function ist das, was man eine *Abel'sche Function* nennt *und ist eine 2p-fach periodische Function von p Argumenten.* Darin besteht *das Umkehrungstheorem Jacobi's,* das er selbst zuerst für den hyperelliptischen Fall und Weierstrass für den Abel'schen Fall bewiesen hat (*Theorie der Abel'schen Functionen, Crelle,* 52).

Um die *Abel'sche Function* zu definiren, kann man sich auch eine beliebige rationale Function $\frac{\varphi}{\psi}$ von w und z denken und die p Werthe betrachten, welche sie für p beliebige Punkte annimmt; diese Werthe sind die Wurzeln einer Gleichung, deren Coefficienten monodrome Functionen der Argumente U und rationale symmetrische Functionen der Coordinaten der p Punkte sind; eine symmetrische Function der p Wurzeln einer solchen Gleichung ist ebenfalls eine *Abel'sche Function,* Clebsch-Gordan, *Abel'sche Funct.,* Leipzig 1866, S. 138, 139.

Die Abel'sche Function ist nach dem Vorstehenden für alle Punkte des Raums der U von $2p$ Dimensionen als monodrom definirt *mit Ausnahme eines gewissen Orts singulärer Punkte von $p-2$ Dimensionen,* in welchem sie unendlich viele Werthe haben kann. Für $p=2$ reducirt sich dieser Ort auf einen Punkt im Fundamentalparallelepipedon, z. B. den Punkt (0), und alle ihm äquivalenten. Für $p=3$ bildet dieser Ort in dem Grundparallelepipedon eine Varietät von *einer* Dimension. In solchen Orten nimmt die Abel'sche Function die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an; vergl. Clebsch-Gordan, a. a. O., S. 184—187.

Die Ermittelung der Ausdrücke für die Abel'schen Functionen mittelst der Integrale U bildet das sogenannte *Umkehrungsproblem. Es wird mit Hülfe der ϑ-Functionen gelöst,* wie in dem elliptischen Fall.

Wenn die zu Grunde liegende Riemann'sche Fläche hyperelliptisch ist, so heissen die entsprechenden Functionen *hyperelliptische* oder auch *ultraelliptische* (Prym).

In den Weierstrass'schen Abhandlungen werden die Abel'schen Functionen mit $\mathrm{Al}(U_1, \cdots, U_p)$ bezeichnet.

Grundlegend für die Theorie der Abel'schen Functionen sind die Arbeiten von Weierstrass, *Crelle,* 47, 52; Riemann, *Crelle,* 54, 65; ferner die Werke von Clebsch-Gordan, Leipzig 1866; Neumann, Leipzig 1865, 1884; Weber, *Die Abel'schen Funct. vom Geschlecht,* 3, Berlin 1876; Thomae, *Eine spec. Classe Abel'scher Funct.,* Halle 1877, 1879; Schottky, *Abr. einer Theorie d. Abel'schen Funct.,* Leipzig 1880; Stahl, Leipzig 1896. Weitere Literaturangaben findet man am Ende des § 3.

§ 2. Die Haupteigenschaften der Abel'schen Functionen.

Die Derivirte einer Abel'schen Function ist ebenfalls eine Abel'sche Function.

Zwischen $p+1$ Abel'schen Functionen, speciell zwischen einer Abel'schen Function und ihren p Derivirten 1ter Ordnung besteht eine algebraische Relation.

Jede Abel'sche Function lässt sich rational durch $p+1$ geeignete Abel'sche Functionen ausdrücken, speciell durch eine Abel'sche Function und ihre p ersten Derivirten.

Jede Abel'sche Function besitzt ein algebraisches Additionstheorem, d. h. ihr Werth für die Argumente $U_i + U_i'$ lässt sich rational durch die Werthe von $p+1$ Abel'schen Functionen für die Argumente U_i und U_i' ausdrücken.

Man beachte die Analogie dieser Theoreme mit den Sätzen über die doppelt periodischen (elliptischen) Functionen. Siehe Kap. 14, § 4. Näheres findet man z. B. bei Stahl, *Theorie d. Abel'schen Funct.,* Leipzig 1896, S. 305 u. ff.

§ 3. Die ϑ-Reihen mit p Argumenten und ihre Eigenschaften.

Wir wollen die schon bei der Theorie der elliptischen Functionen eingeführten ϑ-Reihen (Kap. 16, § 1) verallgemeinern. Wir setzen

$$\vartheta(v_1 \cdots v_p) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\Omega},$$

worin

$$\Omega = (\tau_{11} n_1^2 + 2\tau_{12} n_1 n_2 + \cdots + \tau_{pp} n_p^2) + 2(n_1 v_1 + \cdots + n_p v_p)$$

ist und die Summirung sich über alle möglichen Combinationen der ganzen positiven und negativen Zahlen $n_1, n_2, \cdots, n_p$ zu erstrecken hat.

Die Grössen $v_1, \cdots, v_p$ heissen die Argumente der ϑ-Function und $\tau_{11}, \tau_{12}, \cdots, \tau_{pp}$ ihre Moduln, *welche den Relationen* $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ *genügen.*

Soll eine solche Reihe convergent sein, so ist es nothwendig und ausreichend, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \tau'_{11} & \cdots & \tau'_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau'_{p1} & \cdots & \tau'_{pp} \end{vmatrix},$$

in welcher τ' *den reellen Theil von* τ *bezeichnet, von Null verschieden sei und dass die Form zweiten Grads*

$$\sum_{i,k=1\cdots p} \tau'_{ik} n_i n_k$$

definit sei und das negative Vorzeichen habe.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so stellt ϑ *eine für alle endlichen Werthe der Argumente stets endliche und stetige Function dar; ferner genügt sie den folgenden Functionalbeziehungen:*

1. *Wächst* v_k *um* πi, *so bleibt die Function unverändert.*

2. *Wenn die Argumente* $v_1, \cdots, v_p$ *bez. um* $\tau_{k1}, \tau_{k2}, \cdots, \tau_{kp}$ *vermehrt werden, so wird dadurch die Function mit*

$$e^{-(2v_k + \tau_{kk})}$$

multiplicirt.

Durch Combination dieser beiden Beziehungen ergibt sich allgemeiner:

3. *Bezeichnet man mit* $g_1, g_2, \cdots, g_p$; $h_1, h_2, \cdots, h_p$ *ganze Zahlen und setzt*

$$G_k = h_k \pi i + \sum_j g_j \tau_{kj},$$

$$G = 2\sum_j g_j v_j + \sum_{jk} \tau_{jk} g_j g_k + 2 i\pi \sum_k g_k h_k,$$

so ist

$$\vartheta(v_1 + G_1, \cdots; v_p + G_p) = \vartheta(v_1, \cdots, v_p)\, e^{-G}.$$

4. ϑ *ist eine gerade Function.*

5. *Sie und alle ihre Derivirten genügen den Differentialgleichungen:*

$$4\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{ii}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_i^2}, \qquad 2\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{ij}} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_i \partial v_j}.$$

Diese Eigenschaften sind charakteristisch für ϑ; d. h. eine Function, welche sie besitzt, muss bis auf einen Factor gleich ϑ sein.

Wir wollen nun mit $g_1, \cdots, g_p; h_1, \cdots, h_p$ eine Reihe *nicht ganzer, sondern gebrochener Zahlen* bezeichnen, *welche alle denselben Nenner* 2 *besitzen,* und können uns darauf beschränken nur die beiden Fälle zu betrachten, in denen der Zähler entweder Null oder 1 ist.

Wir bilden mittelst dieser Zahlen g, h die oben angegebenen Ausdrücke $G_1, \cdots, G_p$ und führen hierauf die Function $\vartheta(v_1 + G_1, \cdots, v_p + G_p)$ ein, die wir durch das Symbol

$$\vartheta\begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_p \\ h_1 & \cdots & h_p \end{pmatrix}(v_1 \cdots v_p)$$

oder auch durch

$$\vartheta\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}(v) \quad \text{darstellen.}$$

Diese Function ist eine neue von dem früheren ϑ verschiedene Function, während ϑ seinerseits in diesem allgemeinen Symbol enthalten ist, wenn alle Zahlen g und h gleich Null gesetzt werden. Das Symbol

$$\begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_p \\ h_1 & \cdots & h_p \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$

heisst *die Charakteristik* der Function ϑ und jeder Charakteristik entspricht ein ϑ; zwei Charakteristiken aber, deren entsprechende Zahlen um ganze Zahlen differiren, ergeben dasselbe ϑ bis auf einen Factor; es gibt daher so viele ϑ, als sich Charakteristiken derart bilden lassen, dass die entsprechenden Zahlen zweier von ihnen sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden. Es genügt daher, wie gesagt, sich auf die Charakteristiken zu beschränken, bei denen die Zähler der Brüche g, h nur die beiden Werthe 0 und 1 haben.

Aus einem Grund, der seine Erklärung in den Betrachtungen des folgenden Paragraphen 4 findet, pflegt man die Anzahl p der Argumente der ϑ auch *das Geschlecht* der ϑ oder der entsprechenden Charakteristiken zu nennen.

Es gibt 2^{2p} *Charakteristiken vom Geschlecht* p, *die man als verschieden anzusehen hat und mithin ebensoviele Functionen* ϑ; *das im Anfang construirte* ϑ *hat die Charakteristik* $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Diese Functionen ϑ *sind gerade oder ungerade, je nachdem die Summe*

$$4(g_1h_1 + g_2h_2 + \cdots + g_ph_p)$$

gerade oder ungerade ist. Dabei sind unter g, h die Brüche mit dem Nenner 2 verstanden.

Wir könnten aber auch mit $g_1 \cdots g_p$, $h_1 \cdots h_p$ nicht die Brüche mit dem Nenner 2, sondern die Zähler dieser Brüche bezeichnen; *alsdann sind die Zahlen, welche die Charakteristik bilden, keine Brüche mehr, sondern ganze Zahlen;* man erhält so eine Vereinfachung der Symbole. Man nennt die Charakteristik *gerade* oder *ungerade,* je nachdem die entsprechende ϑ-Function gerade oder ungerade ist.

Legt man den Symbolen die soeben angegebene Bedeutung bei, so erhält man den Satz: *Die Charakteristik* $\binom{g}{h}$ *ist gerade oder ungerade, je nachdem die Summe*

$$\sum g_i h_i$$

gerade oder ungerade ist.

Unter *Summe* zweier oder mehrerer Charakteristiken versteht man diejenige Charakteristik, deren Elemente den Summen der homologen Elemente in jeder der gegebenen Charakteristiken *congruent* (mod. 2) sind.

Die Anzahl der geraden ϑ *beträgt* $2^{p-1}(2^p + 1)$ *und die der ungeraden* $2^{p-1}(2^p - 1)$; *für* $p = 1$ *gibt es* 3 *gerade und* 1 *ungerades* ϑ (Kap. 16, § 1); *für* $p = 2$ *dagegen* 10 *gerade und* 6 *ungerade und für* $p = 3$ *schliesslich* 36 *gerade und* 28 *ungerade* ϑ.

Die so gebildeten ϑ *genügen sämmtlich denselben oben angegebenen Differentialgleichungen.*

Ausserdem erfüllen sie die Functionalbeziehungen

$$\vartheta\binom{g}{h}(v_1, \cdots, v_k + \pi i, \cdots, v_p) = (-1)^{g_k}\, \vartheta\binom{g}{h}(v_1, \cdots, v_p),$$

$$\vartheta\binom{g}{h}(v_1 + \tau_{k1}, \cdots, v_p + \tau_{kp}) = (-1)^{h_k}\, e^{-(2v_k + \tau_{kk})}\, \vartheta\binom{g}{h}(v_1, \cdots, v_p).$$

Man kann diese Relationen als Verallgemeinerungen derjenigen ansehen, denen die Fundamentalfunction ϑ *genügt.*

Wie zwischen den elliptischen ϑ-Functionen, so bestehen auch zwischen den allgemeinen homogene algebraische Relationen. Zwei verschiedene Arten solcher Relationen für $p = 2$ wurden von Göpel und von Rosenhain aufgefunden (siehe die Literaturangaben weiter unten) und später von Anderen (siehe unten) auf den allgemeinen Fall ausgedehnt.

Wir lassen hier einige Angaben über sie folgen.

Man sagt, vier ϑ vom Geschlecht 2 bilden eine *Göpel'sche Quadrupel,* wenn sie entweder *alle gerade* sind, oder *zwei gerade und zwei ungerade* und überdies derart, dass ihre Charakteristiken zur Summe die Charakteristik $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ haben; man sagt ferner, vier ϑ bilden eine *Rosenhain'sche Quadrupel,* wenn die Summe ihrer Charakteristiken wieder Null $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ist, und wenn *eine ungerade und drei gerade* oder *drei ungerade und eine gerade* sind.

So ist z. B. die Quadrupel

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

eine *Göpel'sche* und die Quadrupel

$$\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

eine *Rosenhain'sche Quadrupel.*

Es gibt 60 *Göpel'sche und* 80 *Rosenhain'sche Quadrupel.*

Zwischen den Quadraten von vier einer Göpel'schen oder Rosenhain'schen Quadrupel entsprechenden ϑ besteht immer eine homogene rationale Relation 4[ten] *Grads. (Göpel'sche oder Rosenhain'sche Relation.)*

Dieses Theorem steht in enger Beziehung zu der Theorie der Kummer'schen Flächen, siehe Bd. 2, Kap. 12, § 3.

Nimmt man als Zahlen, welche die Charakteristiken zusammensetzen, nicht solche mit dem Nenner 2, sondern mit den Nennern 3, 4, $\cdots$, so erhält man andere Functionen, die complicirter sind, als die hier betrachteten.

Die ϑ-Functionen für ein beliebiges p hat Riemann in seiner berühmten Abhandlung über die Abel'schen Functionen, *Crelle,* 54 und in anderen Schriften studirt (*Crelle,* 65). Für $p = 2$ wurden sie in ihren vielfachen Beziehungen untersucht von: Göpel, *Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis, Crelle,* Bd. 35, 1847, deutsche Ausgabe von H. Weber in Ostwald's Klassikern der exacten Wissensch.; Rosenhain, *Sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe, Mém. sav. étrang.,* Bd. 11, 1851, ebenfalls von H. Weber herausgeg., siehe Ostwald's Klass. und Hermite, *Sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes, Compt. Rend.,*

Bd. 40, 1855; andere wichtige Arbeiten über die Theorie der ϑ-Functionen, ihre Relationen und die Theorie der Charakteristiken sind von Brioschi, *Ann. di mat.*, 1881, welcher die Göpel'schen Relationen auf den allgemeinen hyperelliptischen Fall ausdehnte; Prym, *Untersuchungen über Riemann's Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie*, Leipzig 1882; Krazer, *Theorie der zweifach unendl. Thetareihen*, Leipzig 1882; H. Weber, *Anwendung der θ-Functionen v. 2 Var. auf d. Theorie der Bewegung e. festen Körp. in einer Flüssigkeit, Math. Ann.*, 14, 1879; *Kummer's Fläche 4. Ordnung mit 16 Knotenpunkten u. θ-Funct. mit 2 Var., Crelle*, 84; Prym und Krazer, *Neuer Beweis für Riemann's Thetaformel; Ableit. einer allg. Thetaformel; Verallgemeinerung, Acta math.*, 3, 1883; Stahl, *Das Additionstheorem d. ϑ-Funct. mit p Argumenten; Bew. eines Satzes v. Riemann über die Charakteristiken, Crelle*, 88, 1879; Frobenius, *Crelle*, 89; Krause, *Hyp. Funct.*, Leipzig 1886; Schottky, *Abriss einer Theorie d. Abel'schen Funct. v. 3 Var.*, Leipzig 1880 und Wirtinger, *Untersuchungen über Thetafunct.*, Leipzig 1895.

Ein vollständigeres Literaturverzeichniss über die ϑ-Functionen findet man bei Forsyth, *Phil. Trans.*, 1882, S. 785.

Ueber die höheren Charakteristiken, d. h. mit einem Nenner, der grösser als 2 ist, verweisen wir auf die Arbeiten von Krazer, *Thetafunctionen, Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen, Math. Ann.*, 22, 1883; von Braunmühl, *Math. Ann.*, 32. Für $p = 1$ siehe auch Thomae, *Darstellung des Quotienten zweier ϑ-Funct. der alg. Funct., Math. Ann.*, 6, 1873; Klein, ib., 17, S. 133, 565; Bianchi, ib., id., S. 234.

Untersuchungen über die sogenannte Configuration der Charakteristiken für $p = 3$ und $p = 4$ und über die geometrischen Anwendungen dieser Theorie findet man bei Pascal, *Ann. di mat.*, (2), 20, 21 und *Rend. Lincei*, 1892, 1893.

§ 4. Die ϑ-Functionen, welche zu Argumenten die Abel'schen Integrale erster Gattung haben.

Man kann annehmen, die Moduln τ der ϑ-Functionen seien die Periodicitätsmoduln eines Systems normaler Integrale 1ter *Gattung*, weil die Bedingungen, welche die letzteren zu erfüllen haben, identisch sind mit denen, welchen die τ genügen müssen, wenn die entsprechende ϑ-Function convergiren soll.

Wir geben jetzt in den ϑ-Functionen den Argumenten v_i die Werthe

$$\int_a^z dv_i - e_i, \quad i = 1, 2, \cdots, p,$$

wobei e_i willkürliche Constante und $\int_a^z dv_i$, p Normalintegrale 1ter Gattung bedeuten; für $\int_a^z dv_i$ wollen wir den Buchstaben v_i verwenden; *die ϑ werden auf diese Art Functionen der Punkte der Riemann'schen Fläche.*

Die so gebildete Function ϑ ist für jeden Punkt z der Riemann'schen Fläche stets endlich und stetig; bei dem Durchgang durch die Schnitte A und die Schnitte C behält sie denselben Werth; geht sie dagegen auf der Riemann'schen Fläche durch den Schnitt B_i, so wird sie mit

$$e^{-2(v_i - e_i) - \tau_{ii}}$$

multiplicirt.

Jede derartige ϑ-Function besitzt auf der Riemann'schen Fläche genau p Nullpunkte $z_1, \cdots, z_p$, welche den Relationen

$$\int_a^{z_1} + \cdots + \int_a^{z_p} \equiv k_i - e_i \quad (\text{mod. } \tau \text{ und } \pi i)$$

genügen; d. h. die auf den linken Seiten stehenden Summen sind bis auf eine lineare Combination mit ganzen Coefficienten der Moduln τ und πi (welche die Periodicitätsmoduln der Integrale 1ter Gattung sind) gleich $k_i - e_i$, worin die k von den Punkten z und den Constanten e_i unabhängige, dagegen von den Schnitten der Riemann'schen Fläche abhängige Constante bedeuten. Theorem von Riemann, Crelle, 65.

Wenn die Constanten e_i so beschaffen sind, dass ϑ identisch d. h. für jeden Werth von z Null wird, so sind die p Punkte $z_1, \cdots, z_p$ Nullpunkte einer adjungirten Curve der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung, und wenn die Punkte z derartige Punkte nicht sind, so kann ϑ nicht identisch Null sein.

Die Punkte $a_1, a_2, \cdots, a_p$ lassen sich so bestimmen, dass die Function ϑ

$$\left(\int_a^z dv - \sum_1^p \int_{a_i}^{z_i} dv\right)$$

genau in den p Punkten $z = z_i$ Null wird; die p Punkte a_i sind

algebraisch als die Berührungspunkte einer bestimmten Curve mit der Fundamentalcurve, deren Gleichung $f(w, z) = 0$ *lautet, definirt; auf transcendente Art sind die* p *Punkte* a_i *als die* p *Nullpunkte der Function* $\vartheta\left(\int_a^z dv\right)$ *bestimmt. Derselbe Satz gilt für ein* ϑ *mit beliebiger Charakteristik; es ändert sich dann die Berührungscurve.*

Zieht man auch die ϑ mit beliebiger Charakteristik $\binom{g}{h}$ in Betracht, so lässt sich allgemein behaupten:

Die Nullpunkte von $\vartheta\binom{g}{h}\left(\int_a^z dv\right)$ *sind die Berührungspunkte einer adjungirten Berührungscurve der* $(n-2)^{\text{ten}}$ *Ordnung, wenn die Charakteristik von* ϑ *gerade ist; wenn die Charakteristik von* ϑ *dagegen ungerade ist, so sind die Nullpunkte:* 1) *der Punkt* a *und* 2) $p-1$ *Berührungspunkte einer adjungirten Curve von der Ordnung* $n-3$. *Jeder Charakteristik entspricht ein besonderes System von Berührungscurven.*

Der Logarithmus des Quotienten zweier ϑ*-Functionen, deren Argumente Integrale* 1ter *Gattung sind, lässt sich durch ein Integral* 3ter *Gattung ausdrücken.*

Die erste Derivirte des Logarithmus (logarithmische Derivirte) einer ϑ*-Function lässt sich durch Integrale* 2ter *Gattung und algebraische Functionen ausdrücken.*

Die zweite Derivirte des Logarithmus einer ϑ*-Function kann mittelst algebraischer Functionen dargestellt werden; diese Derivirten sind die eigentlichen Abel'schen Functionen im Sinn des* § 1.

Die Quotienten der ϑ*-Functionen sind ebenfalls Abel'sche Functionen.*

Die letzten Angaben bedürfen noch einer näheren Präcisirung; vergl. bez. derselben Stahl, § 36 u. § 37.

Mit Hülfe dieser und ähnlicher Theoreme lassen sich die ϑ-Functionen zur Lösung des *Umkehrungsproblems* benutzen. Siehe § 1.

Ausführlicheres findet man in den schon citirten Werken von Clebsch-Gordan, Neumann, Stahl und den Arbeiten von Prym, *Wien. Ak. Denkschr.*, 1864; *Schweiz. Gesellsch. Denkschr.*, 1866; Weber, *Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht drei*, Berlin, 1876; Thomä, *Eine specielle Klasse Abel'scher Functionen*, Halle 1877; *dtto. vom Geschlecht drei*, ib., 1879 etc.

In der letzten Zeit machte die Theorie dadurch grosse Fortschritte, dass man die ϑ- durch die σ-Functionen ersetzte, wie früher schon Weierstrass in dem elliptischen Fall gethan hatte.

Die von Klein eingeführten σ-Functionen unterscheiden sich von den ϑ-Functionen um einen Factor; sie haben den Vortheil, *dass sie bei der linearen Transformation der Perioden einfach vertauscht werden, während die ϑ-Functionen zwar ebenfalls vertauscht, dabei aber mit einem Exponentialfactor multiplicirt werden.*

Indem wir auf die Werke von Klein und Anderen verweisen, die wir in den folgenden Paragraphen citiren werden, beschränken wir uns darauf, nur die wichtigsten Formeln der Theorie von diesem neuen Gesichtspunkt aus und auch diese nur für den hyperelliptischen Fall anzugeben.

§ 5. Die Klein'schen σ-Functionen in dem hyperelliptischen Fall.

Wir wollen homogene Coordinaten einführen, d. h. $z = \frac{z_1}{z_2}$ setzen, und die hyperelliptische Grundform vom Geschlecht p habe den Typus:

$$w^2 z_2^{2p} = f_{2p+2}(z_1, z_2) = a_z^{2p+2} = b_z^{2p+2} = \cdots,$$

worin die rechte Seite eine binäre in symbolischer Gestalt ausgedrückte Form vom $(2p+2)^{\text{ten}}$ Grad ist. Siehe Kap. 12, § 1.

Die Normalintegrale 1ter Gattung seien:

$$w_1 = \int_y^x \frac{z_1^{p-1}(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)}{\sqrt{f(z_1 z_2)}},$$

$$w_2 = \int_y^x \frac{z_1^{p-2} z_2 (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)}{\sqrt{f(z_1 z_2)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w_p = \int_y^x \frac{z_2^{p-1}(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)}{\sqrt{f(z_1 z_2)}}.$$

Das Fundamentalintegral 2ter Gattung mit dem einfachen Unendlichkeitspunkt t sei, indem man der Kürze wegen $(z\,dz)$ für $z_1 dz_2 - z_2 dz_1$ setzt,

$$Z^{(t)} = \int_y^x \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} \, \frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(t)} + a_z^{p+1} a_t^{p+1}}{2(zt)^2},$$

aus welchem sich durch $(p-1)$maliges Differenziren nach t_1 und t_2 und Division mit $(n-1)!$ die p Normalintegrale $Z_1, \cdots, Z_p$ ergeben; das Normalintegral 3ter Gattung sei das von Klein mit dem Buchstaben Q bezeichnete Integral (vergl. Kap. 15, § 7), welches die Eigenschaft hat, dass sein Integrand ein *covarianter* Ausdruck in Bezug auf die binäre Grundform

$$Q_{xy}^{x'y'} = Q_{x'y'}^{xy} = \int_y^x \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} \int_{y'}^{x'} \frac{(z'\,dz')}{\sqrt{f(z')}} \frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')} + a_z^{p+1} a_{z'}^{p+1}}{2(zz')^2} \text{ ist.}$$

Die logarithmischen Unendlichkeitspunkte dieses Integrals 3ter *Gattung sind die Punkte x', y'.*

Mittelst des Integrals Q construiren wir den Ausdruck

$$\Omega(xy) = \frac{(xy)}{\sqrt[4]{f(x)f(y)}} e^{\frac{1}{2} Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}},$$

worin unter $Q_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}$ der Werth von Q zu verstehen ist, der sich ergibt, wenn die Unendlichkeitspunkte $\bar{x}$, $\bar{y}$ die *conjugirten* Punkte zu den Punkten x bez. y auf der hyperelliptischen zweiblättrigen Fläche werden. Dabei nennen wir zwei Punkte auf einer *zweiblättrigen* Fläche *conjugirt,* wenn der eine dem anderen in jedem der Blätter superponirt ist.

Dieser Ausdruck ist für die Klein'schen Untersuchungen sehr wichtig; er wird *Primform* genannt und hat die Eigenschaft, *auf der Riemann'schen Fläche sich nicht zu verzweigen, den einzigen Nullpunkt $x = y$ zu haben und niemals unendlich gross zu werden.*

Die σ-Function der Argumente

$$u_i = \left\{\int_{y'}^{x'} + \int_{y''}^{x''} + \cdots + \int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}}\right\} dw_i \quad (i = 1, 2, \cdots, p)$$

lässt sich unabhängig von den ϑ definiren.

Man bilde den Ausdruck

$$M = \frac{\prod_{i,k} \Omega(x^{(i)} y^{(k)})}{\prod_{i,k} (x^{(i)} y^{(k)}) \prod_{i,k}' \Omega(x^{(i)} x^{(k)}) \prod_{i,k}' \Omega(y^{(i)} y^{(k)})},$$

in welchem unter dem Symbol $\prod_{i,k}$ das über alle Combinationen $i, k = 1, 2, \cdots, \nu$ und unter $\prod_{i,k}'$ das über dieselben Combinationen mit Ausschluss von $i = k$ erstreckte Product zu ver-

setzen ist. *Alle σ haben M zum Factor, der andere Factor variirt, je nachdem σ variirt; seine Bildung hängt von der Zerlegung der binären Grundform f in zwei Factoren ab, für welche die Differenz der Grade ein Vielfaches von 4 ist.* D. h. man setze

$$f_{2p+2} = \varphi_{p+1-2\mu}\,\psi_{p+1+2\mu}, \qquad \left(\mu = 0,\ 1,\ \cdots,\ \frac{p+1}{2}\right)$$

und bilde die Determinante $D_{\varphi\psi}$ von der $2\nu^{\text{ten}}$ Ordnung, deren Zeilen sich ergeben, wenn man für z bez.

$$x',\ x'',\ \cdots,\ x^{(\nu)};\quad y',\ y'',\ \cdots,\ y^{(\nu)}$$

in die Elemente

$$z_1^{\nu-1+\mu}\sqrt{\varphi(z)},\quad \cdots,\quad z_2^{\nu-1+\mu}\sqrt{\varphi(z)},$$
$$z_1^{\nu-1-\mu}\sqrt{\psi(z)},\quad \cdots,\quad z_2^{\nu-1-\mu}\sqrt{\psi(z)}$$

substituirt.

Jedes σ wird dann durch

$$\sigma_{\varphi\psi} = M \cdot D_{\varphi\psi}$$

ausgedrückt.

Da man 2^{2p} Zerlegungen von f in dem Product von φ und ψ ausführen kann, so gibt es 2^{2p} Functionen σ; eine jede ist einer dieser Zerlegungen zugeordnet.

Die σ-Functionen sind den ϑ-Functionen gleich, wenn man die letzteren mit einem Exponentialfactor 2ten Grads in Bezug auf die Argumente u und mit einem Factor multiplicirt, der nur von den Moduln und den Coefficienten abhängt.

Multiplicirt man die σ mit $s = \sqrt[8]{\Delta_\varphi \Delta_\psi}$, worin Δ_φ, Δ_ψ die Discriminanten der Formen φ und ψ bezeichnen, und worin, wenn eine der Formen φ oder ψ von dem 0ten oder 1ten Grad wird, der entsprechenden Discriminante der Werth 1 beizulegen ist, so erhält man die Function, die von einigen Autoren durch das Symbol *Th* dargestellt wird; vergl. z. B. Wiltheiss, *Math. Ann.*, 33, etc.

Die so gebildeten σ-Functionen werden auf der ganzen Riemann'schen Fläche niemals unendlich gross.

Je nachdem die Zahl μ gerade oder ungerade ist, wird das entsprechende σ gerade oder ungerade.

Das einem speciellen Werth von μ entsprechende σ wird 0^μ *in dem Punkt* $u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0$.

Für $p = 2$ *gibt es* 10 *gerade und* 6 *ungerade σ.*

Für $p = 3$ *gibt es:* 28 *ungerade σ, die den Zerlegungen einer Form* 8ter *Ordnung in eine quadratische und eine solche* 6ter *Ordnung entsprechen;* 35 *gerade σ, die für das Argument Null nicht verschwinden und den Zerlegungen von f in zwei Formen*

4ter *Ordnung entsprechen und schliesslich ein gerades* σ, *welches für das Argument Null verschwindet und der Zerlegung der gegebenen Form in eine solche* 8ter *und eine nullter Ordnung entspricht.*

Die Functionen σ *genügen gewissen partiellen Differentialgleichungen* 2ter *Ordnung, die bei passenden Aenderungen aus den viel einfacheren Gleichungen hervorgehen, welche durch die* ϑ *erfüllt werden.* In Bezug auf die Function *Th* hat Wiltheiss diese Gleichungen untersucht.

Die σ*-Functionen lassen sich in Reihen entwickeln, deren Terme nach Potenzen der Argumente fortschreiten; sie sind rationale ganze Functionen der Coefficienten in den Formen* φ *und* ψ *und besitzen die Invarianteneigenschaft. Setzt man*

$$\chi(z) = u_1 z_2^{p-1} - (p-1) u_2 z_2^{p-2} z_1 + \cdots,$$

so ist jeder Term eine Invariante der drei binären Formen φ, ψ, χ *zu gleicher Zeit; insbesondere hat jeder Term den Typus*

$$\begin{pmatrix} \mu+2\varrho & \mu+\varrho & \varrho \\ \chi, & \varphi, & \psi \end{pmatrix},$$

worin die über den Buchstaben χ, φ, ψ *stehenden Indices die Grade des Terms in Bezug auf die Coefficienten dieser drei binären Formen angeben.*

Die wichtigsten Arbeiten über die hyperelliptischen σ-Functionen, ihre Entwickelung in Reihen, die Differentialgleichungen, denen sie genügen, etc. sind von Klein, *Math. Ann.*, 27, 32; Burkhardt, *Math. Ann.*, 32, 35; Brioschi, *Lincei*, 1888; Wiltheiss, *Crelle*, 90; *Math. Ann.*, 29, 31, 33; Pascal, *Ann. di mat.*, (2), 17, 18, 19.

Klein hat die Construction der σ auch auf den Abel'schen Fall für ein beliebiges p ausgedehnt und später den Fall $p = 3$ eingehender untersucht; wir können uns auf solche Einzelheiten hier nicht einlassen, uns genügt, eine allgemeine Vorstellung von dem Gegenstand gegeben zu haben; doch wollen wir die bezüglichen Arbeiten citiren: sie sind von Klein, *Math. Ann.*, 36; Wiltheiss, *Gött. Nachr.*, 1889; Pascal, *Gött. Nachr.*, 1889; *Ann. di mat.*, (2), 17, 23; Wirtinger, *Math. Ann.*, 40; *Monatshefte* etc., 2.

Die Vorlesungen Klein's, welche die Veranlassung zu diesen Untersuchungen der hyperelliptischen und Abel'schen Functionen gaben, wurden vom Sommer 1887 bis zum Sommer 1889 in Göttingen gehalten.

Kapitel XVIII.

Specielle Functionen.

§ 1. Die Exponential- und die logarithmische Function. Die Zahl *e*.

Die *Exponentialfunction* wird durch die Reihe

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

dargestellt; sie convergirt für jeden beliebigen reellen und complexen Werth von z und wird mit dem Symbol e^z bezeichnet. Der Werth dieser Function für $z = 1$ wird mit dem Buchstaben e bezeichnet und heisst die *Basis der natürlichen Logarithmen;* ihr Werth für ein beliebiges z ist die z^{te} Potenz von e; daher kommt die obige Bezeichnung.

Die Zahl e ist nicht nur eine irrationale, sondern auch eine transcendente Zahl, vergl. Kap. 21.

Der Werth von e ist

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71353 \cdots.$$

Ferner ist

$$\log_{10} e = 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289\ 19 \cdots,$$

$$\sqrt[e]{e} = 1{,}444\ 667 \cdots.$$

Die Exponentialfunction genügt der Fundamentalgleichung

$$f(z) \cdot f(z') = f(z + z'),$$

d. h. sie besitzt, wie man zu sagen pflegt, ein Additionstheorem.

Die Function e^z *ist periodisch; ihre Periode ist* $2\pi i$. *Die Gleichung* $e^z = 0$ *hat keine endliche Wurzel.*

Jede Wurzel z der Gleichung

$$e^z = w$$

heisst ein *natürlicher Logarithmus von w; es gibt unendlich viele Logarithmen von w; je zwei von ihnen unterscheiden sich stets*

durch ein Vielfaches von $2\pi i$; als Function von w betrachtet, ist daher z eine vieldeutige Function mit unendlich vielen Werthen. Wir wollen von diesen Werthen immer denjenigen wählen, für welchen der Coefficient des imaginären Theils zwischen $-\pi$ und $+\pi$ (mit Einschluss von $+\pi$) liegt. Auf diese Art wird eine *eindeutige Function* von w bestimmt, welche die *natürliche logarithmische Function* heisst und mit $\log_e w$ bezeichnet wird.

Für jeden Werth von w, *dessen Modul kleiner als* 1 *oder gleich* 1 *ist, mit Ausnahme jedoch von* $w = -1$, *convergirt die Reihe*

$$w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \cdots$$

und hat in dem eben angegebenen beschränkten Sinn den Logarithmus von $(1 + w)$ *d. h.* $\log_e (1 + w)$ *zum Werth und speciell einen Werth, dessen imaginärer Theil zwischen* $-\frac{\pi i}{2}$ *und* $+\frac{\pi i}{2}$ *liegt.*

Man kann nach Riemann die allgemeine logarithmische Function als diejenige definiren, welche der Functionalbeziehung

$$f(w \cdot w_1) = f(w) + f(w_1)$$

genügt; eine so definirte Function ist bis auf *einen constanten Factor* bestimmt.

Aus der obigen Relation ergibt sich

$$f(1) = 0, \quad f(0) = \infty.$$

Differenzirt man nach w_1 und setzt $w_1 = 1$, so erhält man

$$w f'(w) = f'(1).$$

Daraus findet man, wenn $f'(1) = M$ (Modul) gesetzt wird:

$$f(w) = M \int_1^w \frac{dw}{w}.$$

Die so definirte Function ist die Umkehrung einer Function vom Typus $w = A^z$; die Zahl A heisst *Basis*.

Wenn der Modul gleich 1 ist ($M = 1$), so wird die logarithmische Function die sogenannte *natürliche*, ihre *Basis* ist alsdann die Zahl e.

Die nicht natürliche logarithmische Function ist immer der natürlichen gleich, wenn die letztere mit einer Constanten (dem Modul) multiplicirt wird.

Lässt man die Variable w sich um den Nullpunkt drehen und zu dem Ausgangspunkt zurückkehren, so ergibt sich ein verschiedener Werth der logarithmischen Function; sie hat mithin unendlich viele Werthe. Sie wird eindeutig, wenn man auf der Ebene w einen Schnitt ausführt, der vom Nullpunkt in das Unendlichgrosse geht. Vergl. auch Kap. 13, § 3.

Für reelle positive Argumente gibt es immer einen und nur einen reellen Werth der natürlichen logarithmischen Function; dieser ist also die *reelle* Zahl, welche der Gleichung $e^z = w$ genügt, wenn dem w ein reeller positiver Werth beigelegt wird.

Man pflegt diese Zahl kürzer *den natürlichen oder den hyperbolischen Logarithmus* zu nennen, weil sie zur Quadratur der gleichseitigen Hyperbel benutzt werden kann (vergl. Bd. 2, Kap. 17, § 8), oder auch den *Neperschen* nach Napier, der im Jahre 1614 Logarithmentafeln entworfen hat.

Dividirt man die Zahl z durch

$$\log_e 10 = 2{,}3025851\ldots$$

oder multiplicirt sie mit

$$M = \frac{1}{\log_e 10} = 0{,}4342944\ldots,$$

so erhält man die sogenannten *gemeinen oder Briggischen Logarithmen,* die von Briggs ihren Namen haben, der im Jahr 1617 zuerst solche Tafeln veröffentlichte. Die Zahl M ist der *Modul* des Briggischen Logarithmensystems. Sie wurde von Adams, *Value of Napierian logarithms, Proc. of the R. Soc.,* Bd. 27, 1878, S. 93 bis auf 282 Decimalstellen berechnet. Die gemeinen Logarithmen lassen sich als die reellen Lösungen z der Exponentialgleichung $10^z = w$ für reelle positive w definiren. Die Basis der natürlichen Logarithmen ist e, ihr Modul 1; die Basis der gemeinen dagegen 10 und ihr Modul $\frac{1}{\log_e 10} = 0{,}4342944\cdots$.

Die natürlichen Logarithmen negativer Zahlen sind imaginär.

Die zuerst von Napier eingeführten Logarithmen waren nicht eigentlich die sogenannten natürlichen; diese letzteren wurden erst 1619 veröffentlicht, *New logarithms,* London 1619. Die Napier'schen (*Mirifici logarithmorum canonis Descriptio,* Edinburg 1614 und *Mirifici logarithmorum canonis Constructio,* Edinburg 1619) hatten variabele Basis. Bezeichnet man die im

engeren Sinne Napier'schen oder Neperschen Logarithmen mit La und die natürlichen mit $\log_e a$, so besteht die Beziehung:

$$\frac{La}{10^7} + \log_e \frac{a}{10^7} = 0;$$

die Basis der Neperschen Logarithmen änderte sich daher mit a.

Später hat man die ursprünglichen Neperschen Logarithmen aufgegeben und die natürlichen nach Napier benannt.

Besondere Erwähnung verdienen die sogenannten Gauss'schen Logarithmentafeln (*Werke*, 2 und 3; die 6 ersten Bände sind von der Gött. Ges. der Wiss. 1863—74 herausgegeben), *mittelst welcher sich, wenn die Logarithmen zweier Zahlen a und b gegeben sind, der Logarithmus ihrer Summe oder Differenz finden lässt.*

Diese Tafeln bestehen aus drei Columnen, in der ersten sind die $\log m$ eingetragen, in der zweiten $\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)$ und in der dritten $\log(1 + m)$. Man sucht in der ersten Columne $\log a - \log b = \log \frac{a}{b}$, wobei $\log a > \log b$ angenommen ist, findet in der zweiten

$$\log\left(1 + \frac{b}{a}\right) = \log \frac{a+b}{a} = \log(a + b) - \log a$$

und erhält so $\log(a + b)$. Analog benutzt man die dritte Columne. Die Gauss'schen Tabellen sind in vielen Logarithmentafeln wieder abgedruckt worden, wie z. B. in der Köhler'schen. Die Gauss'schen Logarithmen heissen auch die *Additions- und Subtractionslogarithmen;* sie wurden zuerst von Leonelli, Bordeaux 1802, aufgefunden.

§ 2. Die Kreis- und Hyperbel-Functionen.

Für ein beliebiges reelles oder complexes Argument werden die Kreisfunctionen Sinus und Cosinus analytisch durch die Formeln

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$
$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

definirt, wobei die beiden Reihen auf der rechten Seite für jedes z convergiren.

Durch diese Functionen sind auch definirt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z} \\
\operatorname{cotg} z &= \frac{\cos z}{\sin z} \\
\sec z &= \frac{1}{\cos z} \\
\operatorname{cosec} z &= \frac{1}{\sin z}.
\end{aligned}$$

Zwischen den beiden ersten Functionen besteht die Grundbeziehung

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

Bei reellem Argument sind die Kreisfunctionen reell.

Bekannt ist die geometrische Interpretation dieser Functionen, wenn z reell ist und durch einen Kreisbogen dargestellt wird. Wir brauchen uns mithin dabei nicht aufzuhalten.

Die Kreisfunctionen sind periodisch und haben den Periodicitätsmodul 2π.

Die Hauptformeln sind:

$$\begin{aligned}
\sin(z \pm z_1) &= \sin z \cos z_1 \pm \cos z \sin z_1, \\
\cos(z \pm z_1) &= \cos z \cos z_1 \mp \sin z \sin z_1, \\
\sin(z + z_1 + z_2) &= \sin z \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \cos z \cos z_2 + \\
&\quad + \sin z_2 \cos z \cos z_1 - \sin z \sin z_1 \sin z_2, \\
\cos(z + z_1 + z_2) &= \cos z \cos z_1 \cos z_2 - \cos z \sin z_1 \sin z_2 - \\
&\quad - \cos z_1 \sin z \sin z_2 - \cos z_2 \sin z \sin z_1, \\
\operatorname{tg}(z \pm z_1) &= \frac{\operatorname{tg} z \pm \operatorname{tg} z_1}{1 \mp \operatorname{tg} z \operatorname{tg} z_1}, \\
\operatorname{tg}(z + z_1 + z_2 + \cdots) &= \frac{S_1 - S_3 + S_5 - \cdots}{1 - S_2 + S_4 - \cdots},
\end{aligned}$$

worin unter S_1 die Summe der Tangenten der einzelnen Argumente, unter S_2 die Summe der Producte dieser Tangenten zu je zweien, unter S_3 die Summe der Producte zu je dreien, etc. verstanden wird.

$$\begin{aligned}
\sin z \pm \sin z_1 &= 2 \sin \tfrac{1}{2}(z \pm z_1) \cos \tfrac{1}{2}(z \mp z_1), \\
\cos z \pm \cos z_1 &= 2 \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \tfrac{1}{2}(z + z_1) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \tfrac{1}{2}(z - z_1), \\
\cos z \pm \sin z_1 &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z \mp z_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z \pm z_1}{2}\right), \\
\operatorname{tg} z \pm \operatorname{tg} z_1 &= \frac{\sin(z \pm z_1)}{\cos z \cos z_1},
\end{aligned}$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z,$$
$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z,$$
$$\operatorname{tg} 2z = \frac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z},$$
$$\sin 3z = 3 \sin z - 4 \sin^3 z,$$
$$\cos 3z = 4 \cos^3 z - 3 \cos z,$$
$$\operatorname{tg} nz = \frac{n \operatorname{tg} z - (n)_3 \operatorname{tg}^3 z + \cdots}{1 - (n)_2 \operatorname{tg}^2 z + (n)_4 \operatorname{tg}^4 z - \cdots},$$
$$\sin \tfrac{1}{2} z = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos z}{2}},$$
$$\cos \tfrac{1}{2} z = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos z}{2}},$$
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} z = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos z}{1 + \cos z}}.$$

Die Umkehrungen der Kreisfunctionen werden mit arc sin, arc cos, arc tg, etc. bezeichnet und heissen *inverse Kreisfunctionen oder cyclometrische Functionen.*

Die Kreisfunctionen sind mit den Exponentialfunctionen durch die bemerkenswerthen (Euler'schen) Formeln verbunden:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$
$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Die Function *Sinus* mit *rein imaginärem* Argument, welches also die Form iz mit reellem z hat, ist eine *rein* imaginäre Function, mithin die Function

$$\frac{\sin (iz)}{i}$$

bei reellem z eine reelle Funktion.

Die Function *Cosinus* mit *rein imaginärem* Argument ist reell und die Function *Tangente* liefert bei *rein imaginärem* Argument, durch i dividirt, ebenfalls eine reelle Function.

Diese reellen Functionen

$$\frac{\sin (iz)}{i}, \quad \cos (iz), \quad \frac{\operatorname{tg} (iz)}{i}$$

heissen *Hyperbelfunctionen* und werden durch die Symbole

$$\sinh z, \quad \cosh z, \quad \operatorname{tgh} z$$

dargestellt, worin h der Anfangsbuchstabe des Wortes *Hyperbola* ist.

Aus dieser Definition geht sofort hervor, dass die Hyperbelfunctionen Eigenschaften besitzen müssen, welche denen der Kreisfunctionen sehr ähnlich sind; insbesondere lassen sich die Formeln für die Hyperbelfunctionen aus denen für die Kreisfunctionen dadurch ableiten, dass man überall i sinh für sin, cosh für cos und i tgh für tg setzt.

Die Exponentialformeln der Hyperbelfunctionen lauten:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Die Fundamentalbeziehung zwischen Sinus hyperbolicus und Cosinus hyperbolicus ist:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

Die *Hyperbel*functionen haben ihren Namen von der folgenden Eigenschaft:

Wenn man eine gleichseitige Hyperbel construirt, deren auf die Axen bezogene Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ lautet, und wenn man mit z den doppelten Flächeninhalt des Hyperbelsectors bezeichnet, der von der x-Axe, dem Radiusvector OA, welcher vom Centrum O der Hyperbel nach einem Punkt A der Hyperbel führt, und von dem Hyperbelzweig begrenzt wird, so sind die Coordinaten x, y von A der hyperbolische Cosinus bez. Sinus von z.

Zieht man eine Tangente an den Scheitelpunkt M der Hyperbel, verlängert sie bis zum Durchschnittspunkt T mit dem Radiusvector OA und führt dann von T aus eine Parallele mit der x-Axe bis zum Durchschnittspunkt L mit dem Kreis vom Centrum O und Radius $OM = 1$, so heisst der Winkel $LOM = \tau$ *der transcendente Winkel Lambert's. Die Hyperbelfunctionen lassen sich durch die Kreisfunctionen des Lambert'schen Winkels mittelst der Formeln ausdrücken:*

$$\sinh z = \operatorname{tg} \tau,$$

$$\cosh z = \frac{1}{\cos \tau}.$$

Sie wurden schon in dem vorigen Jahrhundert von Riccati und Lambert studirt, von denen der erste die jetzt allgemein angenommenen Bezeichnungen vorschlug. Später haben sich Gudermann, der sehr umfangreiche Tafeln zusammenstellte, *Crelle*, 6, 7, 8, 9 und Mossotti mit ihnen beschäftigt.

Neuer sind die Arbeiten von Hoüel, Laisant, *Fonctions hyperboliques,* Bordeaux, *Soc. sc. Mém.,* Bd. 10, 1875; Günther, *Die Lehre von den gewöhnlichen u. verallgemeinerten Hyperbelfunctionen theilw. nach Laisant und Forti,* Halle 1881 und Forti, *Nuove tavole delle funzioni iperboliche,* Roma 1892, der neue Tafeln dieser Functionen veröffentlicht hat.

In den beiden letzten werthvollen Werken findet man Ausführlicheres und eine genaue Geschichte des Gegenstandes.

§ 3. Die Bernoulli'sche Function. Die Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen.

Bernoulli'sche Function oder das Polynom Bernoulli's heisst der Ausdruck

$$\varphi_m(x) = x^m - \frac{m}{2} x^{m-1} + (m)_2 B_2 x^{m-2} - (m)_4 B_4 x^{m-4} + \cdots,$$

worin B_2, $B_4, \cdots$ die sogenannten Bernoulli'schen Zahlen sind, Raabe, *Crelle,* 42.

Es besteht die Formel

$$\varphi_{m+1}(x+1) - \varphi_{m+1}(x) = (m+1)x^m.$$

Für ein ganzes positives $x = n$ erhält man

$$\varphi_m(n) = m[1^{m-1} + 2^{m-1} + \cdots + (n-1)^{m-1}].$$

Die Bernoulli'schen Polynome sind also bis auf einen Zahlenfactor für ganze x die Summe gleicher Potenzen der ersten $x - 1$ ganzen Zahlen.

Die Bernoulli'schen Zahlen sind die Coefficienten in der Reihenentwicklung der Function

$$\frac{xe^x}{e^x - 1}.$$

Gibt man nämlich dieser Reihenentwickelung die Form

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{B_2 x^2}{2!} - \frac{B_4 x^4}{4!} + \cdots,$$

so sind die Zahlen B die Bernoulli'schen Zahlen.

Sie stehen in Beziehung zu den Coefficienten in der Reihenentwickelung für die Tangente. Setzt man

$$\operatorname{tg} x = \sum_1^\infty \beta_{2m} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

so ist

$$\beta_{2m} = \frac{2^{2m}(2^{2m}-1)}{2m} B_{2m}.$$

Die Bernoulli'schen Zahlen lassen sich durch die Differenzen von 0^m (vergl. Kap. 10, S. 226) ***mittelst der Formel***

$$B_{2m} = \\ = (-1)^{m-1}\left[0^{2m} - \frac{1}{2}\varDelta 0^{2m} + \frac{1}{3}\varDelta^2 0^{2m} - \cdots + \frac{1}{2m+1}\varDelta^{2m} 0^{2m}\right]$$

ausdrücken.

In der Form von Determinanten lauten sie:

$$B_{2m} = \frac{2m}{2^{2m}(2^{2m}-1)} \begin{vmatrix} 1, & 0, & \cdots, & 0, & 1 \\ (3)_1, & 1, & \cdots, & 0, & 1 \\ (5)_1, & (5)_3, & \cdots, & 0, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (2m-3)_1, & (2m-3)_3, & \cdots, & 1, & 1 \end{vmatrix},$$

Haussner,

$$B_{2m} = 2m! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!}, & 1, & 0, & \cdots, & 0 \\ \frac{1}{3!}, & \frac{1}{2!}, & 1, & \cdots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2m+1!}, & \frac{1}{2m!}, & \frac{1}{2m-1!}, & \cdots, & \frac{1}{2!} \end{vmatrix},$$

Glaisher.

Bemerkenswerth ist die Formel

$$\lim_{m=\infty} B_{2m}\left(\frac{\pi e}{m}\right)^{2m+\frac{1}{2}} = 4\pi\sqrt{e}.$$

Die Recursionsformeln für die Zahlen B sind sehr zahlreich.

Die älteste ist von Moivre, Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, London 1730:

$$(2m+1)_1 B_{2m} - (2m+1)_3 B_{2m-2} + \cdots + \\ + (-1)^{m-1}(2m+1)_{2m-1} B_2 + (-1)^m\left(m - \tfrac{1}{2}\right) = 0$$

Die folgende ist von Jacobi, Crelle, Bd. 12, 1834, S. 263:

$$(2m+2)_2 B_{2m} - (2m+2)_4 B_{2m-2} + \cdots + \\ + (-1)^{m-1}(2m+2)_{2m} B_2 + (-1)^m m = 0.$$

Die Stern'sche (Bernoulli'sche Zahlen, Crelle, 84) *lautet:*

$$(2m+1)_2 B_{2m} - (2m+1)_4 B_{2m-2} + \cdots +$$
$$+ (-1)^{m-1}(2m+1)_{2m} B_2 + (-1)^m \tfrac{1}{2} = 0 .$$

Andere Recursionsformeln findet man in dem unten citirten Buch von Saalschütz.

Wichtig ist das folgende Theorem über die Bernoulli'schen Zahlen von Staudt, *Beweis eines Lehrsatzes die Bernoulli'schen Zahlen betr., Crelle,* Bd. 21, 1840 und Clausen, *Astron. Nachrichten,* 17, 1840:

Wenn α, β, γ, $\cdots$ *sämmtlich ungerade Primzahlen sind, die, um die Einheit vermindert, Theiler von* $2m$ *liefern, so gilt die Formel:*

$$B_{2m} = (\text{einer ganzen Zahl}) + (-1)^m \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \cdots\right\}.$$

Es lassen sich auch Recursionsformeln angeben, die nur für die ganzzahligen Theile der Bernoulli'schen Zahlen gelten; sie wurden zuerst von Hermite, *Crelle,* 81, 1876 und Stern, *Crelle,* 86 aufgefunden; später gab Lipschitz, *Crelle,* 96 allgemeinere Formeln an.

Die Coefficienten β in der Tangentenreihe (siehe oben) sind ganze Zahlen, die von

$$\beta_4 = 2$$

an, abwechselnd mit den Ziffern 2 und 6 endigen.

Die Bernoulli'schen Zahlen haben ihren Namen zu Ehren Jacob Bernoulli's erhalten, der sie in die Analysis einführte, *Ars conjectandi,* Basel 1713. Moivre und Euler nannten sie zuerst so. Bernoulli selbst berechnete die 5 ersten, Euler dann 15, *Institutiones calculi differentialis,* Berlin 1755; Ohm, *Etwas über die Bernoulli'schen Zahlen, Crelle,* 20, 1840 berechnete 31 und Adams, *Table of the values of the first 62 numbers of Bernoulli, Crelle,* 85, 1878 ihrer 62.

Wer Näheres zu wissen wünscht, wird mit Vortheil das neue Werk von Saalschütz, *Vorl. über die Bern. Zahlen,* Berlin 1893 zu Rath ziehen. Andere neue Arbeiten sind von Glaisher, *Messenger of Math.,* 1876; Seidel, *Entstehungsweise der Bernoulli'schen Zahlen, Münch. Ak. Abh.,* 1877; Radicke, *Recursionsformeln für die Berechnung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen,* Halle 1880; Haussner, *Gött. Nachr.,* 1893; *Zeitschr. für Math.,* 1894; etc.

Wir lassen eine Tabelle der ersten 18 Bernoulli'schen Zahlen hier folgen:

$$
\begin{array}{ll|ll}
B_2 = \frac{1}{6} & & B_{20} = \frac{174611}{330} & \\
B_4 = \frac{1}{30} & & B_{22} = \frac{854513}{138} & \\
B_6 = \frac{1}{42} & & B_{24} = \frac{236\,364\,091}{2730} & \\
B_8 = \frac{1}{30} & & B_{26} = \frac{8\,553\,103}{6} & \\
B_{10} = \frac{5}{66} & & B_{28} = \frac{23\,749\,461\,029}{870} & \\
B_{12} = \frac{691}{2730} & & B_{30} = \frac{8\,615\,841\,276\,005}{14\,322} & \\
B_{14} = \frac{7}{6} & & B_{32} = \frac{7\,709\,321\,041\,217}{510} & \\
B_{16} = \frac{3617}{510} & & B_{34} = \frac{2\,577\,687\,858\,367}{6} & \\
B_{18} = \frac{43\,867}{798} & & B_{36} = \frac{26\,315\,271\,553\,053\,477\,373}{1\,919\,190}. &
\end{array}
$$

Durch die Untersuchung der Entwickelungscoefficienten der lemniscatischen Functionen ist Hurwitz zu bemerkenswerthen Resultaten bezüglich einer Gattung positiver rationaler Zahlen gekommen, die ähnliche Eigenschaften, wie die Bernoulli'schen Zahlen besitzen. *Math. Ann.*, 51.

Verwandt mit den Bernoulli'schen Zahlen sind die Euler'schen, die den Coefficienten in der Secantenreihe, wie die ersteren den Coefficienten in der Tangentenreihe entsprechen.

Setzt man

$$\sec x = \sum_{0}^{\infty} E_{2m} \frac{x^{2m}}{2m!},$$

so heissen die Zahlen E_{2m} *die Euler'schen Zahlen.*

Durch Determinanten ausgedrückt lauten sie

$$E_{2m} = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 0, & \cdots, & 0 \\ 1, & (4)_2, & 1, & \cdots, & 0 \\ 1, & (6)_2, & (6)_4, & \cdots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & (2m-2)_2, & (2m-2)_4, & \cdots, & 1 \\ 1, & (2m)_2, & (2m)_4, & \cdots, & (2m)_{2m-2} \end{vmatrix},$$

Haussner,

$$E_{2m} = 2m! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!}, & 1, & 0, & \cdots, & 0 \\ \frac{1}{4!}, & \frac{1}{2!}, & 1, & \cdots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2m!}, & \frac{1}{2m-2!}, & \frac{1}{2m-4!}, & \cdots, & \frac{1}{2!} \end{vmatrix},$$

Glaisher.

Die Euler'schen Zahlen sind mit den Bernoulli'schen durch die Formel verbunden:

$$(2m+1)E_{2m} = 2^{2m+1}(2^{2m+1}-1)(2m+1)_1 B_{2m} - \\ - 2^{2m-1}(2^{2m-3}-1)(2m+1)_3 B_{2m-2} + \\ + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ + (-1)^{m-1} 2^3 (2-1)(2m+1)_{2m-1} B_2 + (-1)^m .$$

Benutzt man die Coefficienten β (siehe oben) in der Tangentenreihe, so erhält man die Formel von Stern (*Ueber die Coefficienten der Secantenreihe, Crelle,* Bd. 26, 1843):

$$E_{2m} = \beta_{2m} + (2m-1)_2 E_2 \beta_{2m-2} + \cdots + \\ + (2m-1)_{2m-2} E_{2m-2} \beta_2 .$$

Eine Recursionsformel für die Euler'schen Zahlen ist die folgende:

$$E_{2m} - (2m)_2 E_{2m-2} + (2m)_4 E_{2m-4} - \\ - \cdots + (-1)^{m-1}(2m)_{2m-2} E_2 + (-1)^m = 0 .$$

Es gelten ferner die Formeln:

$$E_{2m} > \frac{2m}{2} \beta_{2m} ,$$

$$E_{2m} > \frac{2m(2m-1)}{4} E_{2m-1} .$$

Die Euler'schen Zahlen sind sämmtlich ganze positive ungerade Zahlen.

Die Summe je zweier aufeinander folgender ist durch 3 theilbar. Ist m eine gerade Zahl, so ist $E_{2m}+1$ durch 3 theilbar. Dasselbe gilt für $E_{2m}-1$, wenn m eine ungerade Zahl ist. Die Zahlen E_{2m} mit ungeradem m endigen mit der Ziffer 1, *die mit geraden m dagegen mit der Ziffer* 5.

Die ersten 9 Euler'schen Zahlen hat Euler berechnet, die 9[te] allerdings falsch.

Die Euler'schen Zahlen wurden von Scherk, *Vier mathematische Abhandlungen*, Berlin 1825 studirt, der ihnen den Namen gab. Später haben sich viele Autoren mit ihnen beschäftigt, namentlich auch fast alle, die oben bei den Bernoulli'schen Zahlen aufgeführt wurden. Stern, *Euler'sche Zahlen*, *Crelle,* Bd. 79, 1875 hat viele ihrer Eigenschaften entdeckt.

Wir geben hier eine Tabelle der 14 ersten schon von Scherk berechneten Euler'schen Zahlen:

$$
\begin{aligned}
E_2 &= 1\\
E_4 &= 5\\
E_6 &= 61\\
E_8 &= 1\,385\\
E_{10} &= 50\,521\\
E_{12} &= 2\,702\,765\\
E_{14} &= 199\,360\,981\\
E_{16} &= 19\,391\,512\,145\\
E_{18} &= 2\,404\,879\,675\,441\\
E_{20} &= 370\,371\,188\,237\,525\\
E_{22} &= 69\,348\,874\,393\,137\,901\\
E_{24} &= 15\,514\,534\,163\,557\,086\,905\\
E_{26} &= 4\,087\,072\,509\,293\,123\,892\,361\\
E_{28} &= 1\,252\,259\,641\,403\,629\,865\,468\,285\,.
\end{aligned}
$$

Die Zahlen β (siehe oben, die Coefficienten in der Tangentenreihe) hängen eng mit den Euler'schen Zahlen E zusammen. Vergl. darüber eine neue Arbeit von Studnička, *Sitzungsber. der böhm. Gesellsch. der Wissensch.*, März 1900.

§ 4. Die Euler'sche Constante; die harmonische Constante.

Bekannt ist die Euler'sche Formel, welche dazu dient, ein bestimmtes Differenzenintegral (eine Summe) durch das gewöhnliche bestimmte Integral derselben Function auszudrücken (vergl. S. 235). Die Formel lautet:

$$
\sum_a^b f(x) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}\left[f(x)\right]_a^b + \\
+ \frac{B_2}{2!}\left[f'(x)\right]_a^b - \frac{B_4}{4!}\left[f'''(x)\right]_a^b + \cdots,
$$

worin B_2, B_4, $\cdots$ die Bernoulli'schen Zahlen sind. Setzt man $a = 0$, $b = x$, so lässt sich dieser Formel die Gestalt geben:

$$
\sum_0^x f(x) = \int f(x)\,dx - \frac{1}{2} f(x) + \\
+ \frac{B_2}{2!} f'(x) - \frac{B_4}{4!} f'''(x) + \cdots + \text{Const.};
$$

dabei ist der letzte Term, die Constante, natürlich von x unabhängig und wird unter dem Symbol $\int f(x)\,dx$ das *unbestimmte* Integral von $f(x)$ verstanden. Setzt man ferner

$$f(x) = \frac{1}{a+bx}, \quad \int f(x)\,dx = \frac{1}{b}\log\frac{a+bx}{b},$$

so heisst die Constante *harmonisch,* weil sich alsdann die Summirung auf der linken Seite über die ersten Glieder einer harmonischen Reihe 1ter Ordnung (welche divergirt) erstreckt. *Die harmonische Constante hängt von den Werthen von a und b ab.* Wir bezeichnen sie mit $A(ab)$. Ist $a = 0$, $b = 1$, so erhält man *die Euler'sche Constante,* die durch den Buchstaben A dargestellt wird. Einige Autoren nennen diese Constante auch die *Mascheroni'sche* nach Mascheroni, der zu den ersten gehört, welche ihre Decimalstellen berechnet haben. Siehe unten.

Die Constanten $A(ab)$ und A werden durch die Formeln definirt:

$$A(ab) = -\frac{1}{b}\log\frac{a}{b} + \frac{1}{2a} + \frac{B_2 b}{2a^2} - \frac{B_4 b^3}{4a^4} + \cdots,$$

$$A = \lim_{a=0}\left\{-\log a + \frac{1}{2a} + \frac{B_2}{2a^2} - \frac{B_4}{4a^4} + \cdots\right\}.$$

Es gelten die Relationen:

$$A(ab) - A(b-a, b) = \frac{\pi}{b}\operatorname{cotg}\frac{a\pi}{b},$$

$$A(ab) = \frac{1}{b}A\left(\frac{a}{b}, 1\right).$$

Der Werth von A bis zu 26 Decimalstellen lautet:

$$A = 0{,}57721\ 56649\ 01532\ 86106\ 06512\ 4\cdots.$$

Er lässt sich durch bestimmte Integrale auf die folgende Art ausdrücken:

$$\int_0^1 \log\log x\,dx = -A, \text{ Mascheroni},$$

$$\int_0^\infty \left(e^{-x} + \frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{x} = -A,$$

$$\int_0^\infty \left(e^{-x} - \frac{1}{1+x^2}\right)\frac{dx}{x} = -A,$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx = A,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^x} x e^x dx = -A,$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\log x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = A, \text{ Legendre},$$

$$\int_0^\infty e^{-x} \log x dx = -A.$$

Die Euler'sche Constante hat als Reihe die Gestalt:

$$\sum_1^\infty \left[\frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = A$$

und als unendliches Product:

$$\log \prod_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = A.$$

Die Zahl A wird bei der Theorie der Euler'schen Functionen benutzt.

Euler berechnete sie zuerst auf 6 dann auf 16 Decimal stellen, *De numero memorabili* etc.; *Acta Petropol.*, 5, 1781; er bezeichnete sie mit dem Buchstaben γ. Später beschäftigten sich mit ihr: Mascheroni, *Adnotationes ad calculum integralem Euleri*, Ticini (Pavia) 1790, 1792, der bei der 20ten Decimalstelle einen Fehler machte; Legendre berechnete sie auf 19; Soldner auf 25 Decimalstellen; Lindemann, *Grunert's Archiv* 29 auf 35; Oettinger, *Werthbestimmung der Constanten des Integrallogarithmus, Crelle*, 60, 1862 auf 40; Nicolai (vergl. Gauss, *Werke*, 3, S. 154) ebenfalls auf 40; Shanks, *Numerical value of Euler's constant*, London, *Proc. Roy. Soc.*, 1866, 1867 auf 59 mit einem Fehler in der 50ten Stelle; Glaisher, *Calculation of Euler's constant*, *Proc. Roy. Soc.*, Bd. 19, 1871 auf 100 und Adams schliesslich *Value of Euler's constant, ib.*, 27, 1878 und *Werke*, 1, S. 459 auf 263 Decimalstellen.

Eine andere Arbeit über die Euler'sche Constante ist von Knar, *Harmonische Reihen, Grunert's Math. Archiv*, 41, 43,

1861 u. 1865. Die Function $A(a, 1)$ wurde von Gauss in seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe (*Werke,* 3) studirt und die Werthe der Function wurden von Nicolai in einer Tafel zusammengestellt, die man am Ende der Gauss'schen Abhandlung findet.

§ 5. Die Euler'schen Functionen.

Legendre, *Fonct. ellipt.,* 2, S. 365, Paris 1826, hat zuerst diesen Functionen, die vor ihm von Euler, *Calc. integr.* untersucht worden waren, den Namen *Euler'sche Functionen* 1ter und 2ter Gattung gegeben.

Das Euler'sche Integral 1ter *Gattung,* wie es ursprünglich von Legendre definirt wurde, hat die Gestalt:

$$B(p, q; n) = \int_0^1 x^{p-1}(1 - x^n)^{\frac{q}{n}-1} dx;$$

darin bezeichnet n eine feste Zahl, sind p und q variabel und ist B als eine Function von p und q anzusehen. Legendre hat nach dem Vorgang Euler's für diese Function das Symbol $\left(\frac{p}{q}\right)$ benutzt. In der Folge wurde sie (Binet, *Journ. Éc. polyt.,* Heft 27) mit dem griechischen Buchstaben B bezeichnet und die *Betafunction* genannt. Der Fall $n = 1$ wird gewöhnlich in den Abhandlungen untersucht; man gebraucht für ihn das einfachere Symbol $B(p, q)$ statt $B(p, q; 1)$.

Die Beta-Function ist für $n = 1$ in Bezug auf p und q symmetrisch:

$$B(p, q) = B(q, p).$$

Die Werthe von $B(p, q; n)$ lassen sich, wenn p und q grösser als n sind, durch diejenigen ausdrücken, bei welchen p und q zwischen 1 und n liegen (Legendre).

Es ist

$$B(p, n; n) = \frac{1}{p},$$

$$B(p, n - p; n) = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}},$$

$$B(p, q + 1; 1) = \frac{q}{p} B(p + 1, q; 1),$$

$$B(p, q + 1; 1) = B(p, q; 1) - B(p + 1, q; 1).$$

Die Function B *genügt der Euler'schen Beziehung:*

$$\mathrm{B}(p, q; n)\,\mathrm{B}(p+q, r; n) = \mathrm{B}(p, r; n)\,\mathrm{B}(p+r, q; n).$$

Für $n = 3, 4, 6, 8, 12$ *kann man die* B*-Function durch elliptische Integrale ausdrücken,* vergl. Legendre, a. a. O., Kap. 3.

Der Logarithmus der B*-Function lässt sich durch ein bestimmtes Integral ausdrücken. Setzt man* $n = 1$, *so wird*

$$\log \mathrm{B}(p, q) = \int_0^\infty \left[e^{-qx} \frac{1-e^{-px}}{1-e^{-x}} - \frac{1-e^{-px}}{1-e^{-x}} + 1 - e^{-x} \right] \frac{dx}{x}.$$

Man nennt *Euler'sches Integral* 2[ter] *Gattung* und bezeichnet mit dem Buchstaben Γ die Function

$$\Gamma_m(z) = \int_0^1 x^{m-1} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{z-1} dx.$$

Ohne der allgemeinen Gültigkeit Eintrag zu thun, kann man $m = 1$ setzen, weil für $x^m = t$

$$\Gamma_m(z) = \frac{1}{m^n} \Gamma_1(z) \text{ ist.}$$

Es wird dann ohne Weiteres (Legendre)

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{z-1} dx.$$

Euler und Gauss gebrauchten das Symbol $\Pi(z-1)$.

Wenn z *eine ganze positive Zahl bedeutet, so ist*

$$\Gamma(z) = (z-1)!.$$

Die Function Γ *ist für jedes reelle* $z > 0$ *endlich. Ein anderer Ausdruck für* Γ *lautet:*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx.$$

Noch andere Ausdrücke sind:

$$\Gamma(z) = \lim_{\mu=\infty} \mu^z \frac{(\mu-1)(\mu-2)\cdots 1}{z(z+1)\cdots(z+\mu-1)}, \text{ Euler, Gauss,}$$

$$\Gamma(z) = \prod_{\mu=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{z-1}}{1+\frac{z-1}{\mu}}, \text{ Euler, 1729.}$$

Die Function Γ hat die durch die folgenden Relationen dargestellten Eigenschaften:

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,

$\Gamma(z+k) = (z+k-1)(z+k-2)\cdots z\Gamma(z)$,

$\frac{d\Gamma(z)}{dz} = \Gamma(z)\log z$,

$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$,

$\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z}$,

$\lim\limits_{z=0} \frac{\Gamma(nz)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{n}$,

$\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdots(2z-1)}{2^z}\sqrt{\pi}$, worin z ganzzahlig ist,

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \cdots$,

$\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\cdot\frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)}$ für jedes beliebige z,

$\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{-\frac{1}{2}}$ für ganzzahlige m, Euler,

$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right) =$

$= \Gamma(mz)(2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2}-zm}$ für ganzzahlige m und beliebige z, Gauss, *Werke,* 3, S. 150,

$$\log \Gamma(z) = \int_0^\infty \left\{(z-1)e^{-x} - \frac{e^{-x}-e^{-zx}}{1-e^{-x}}\right\}\frac{dx}{x},$$

$$\log \Gamma(z) = \sum_{r=1}^{\infty}\left\{z\log\left(1+\frac{1}{r}\right) - \log\left(1+\frac{z}{r}\right)\right\}, \text{ Gauss,}$$

$$\frac{d\log\Gamma(z)}{dz} = Z(z) = \lim_{\mu=\infty}\left\{\log\mu - \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} - \cdots - \frac{1}{z+\mu}\right\} =$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-zx}}{1-e^{-x}}\right)dx,$$

$Z(1) = -A =$ der Euler'schen Constante, vergl. § 4,

$\int_z^{z+1} \log\Gamma(x)\,dx = z\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi$, Raabe.

Der Werth von $\Gamma(z)$ von $z = 0$ bis $z = \frac{1}{2}$ variirt von ∞ bis $\sqrt{\pi} = 1{,}77245 \cdots$ und der Werth von $\Gamma(z)$ von $z = \frac{1}{2}$ bis $z = 1$ variirt von $\sqrt{\pi}$ bis 1.

Die Function $\Gamma(z)$ hat den *geringsten* Werth für

$$z = 1{,}46163\ 21451\ 105 \cdots$$

und der Werth von $\log \Gamma(z)$ beträgt in diesem Punkt

$$\log \Gamma(z) = 9{,}94723\ 91743\ 9340 \cdots,$$

der annähernd dem Werth

$$\Gamma(z) = 0{,}885 \cdots \quad \text{entspricht.}$$

Die Strecke von $z = 0$ bis $z = 1$ pflegt man die *erste Periode* der Function Γ, die von $z = 1$ bis $z = 2$ die *zweite Periode,* etc. zu nennen.

Aus den vorstehenden Gleichungen ersieht man, dass Γ, *wenn es für die erste Periode bekannt ist, leicht auch für jeden anderen Werth ermittelt werden kann.*

Allgemeiner lässt sich zeigen: *Ist $\Gamma(z)$ für eine beliebig kleine Strecke der ersten Periode bekannt, so ist es für jeden anderen Werth des Arguments bestimmt, d. h. man kann auf elementare Weise seinen Werth für jedes z ermitteln; vergl. Legendre, a. a. O.*, Kap. 11, S. 446.

Die Γ-Functionen sind wichtiger als die B-Functionen und *die Berechnung der letzteren lässt sich auf die der Γ mittelst der Grundformel zurückführen:*

$$\mathrm{B}(p,\ q;\ n) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{n\,\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)}.$$

Für $n = 1$ wird

$$\mathrm{B}(p,\ q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Auf diese Art reducirt sich die Ermittelung von B mit zwei Argumenten auf die einer Γ-Function, welche eine Function von nur einem Argument ist.

Zur numerischen Berechnung der Functionen $\log \Gamma(z)$ benutzte Legendre Reihen, die zwar divergiren, die jedoch, auf eine gewisse Art behandelt, hinreichend genaue Annäherungswerthe liefern. Die von Legendre angewandte Formel weicht nur wenig von der folgenden ab:

$$\log \Gamma(z) = (z - \tfrac{1}{2}) \log z - z + \tfrac{1}{2} \log 2\pi + J(z),$$

worin

$$J(z) = \frac{B_2}{2z} - \frac{B_4}{3 \cdot 4 \cdot z^3} + \frac{B_6}{5 \cdot 6 \cdot z^5} - \cdots +$$
$$+ (-1)^r \frac{\theta B_{2r+2}}{(2r+1)(2r+2) z^{2r+1}}$$

ist, die B die Bernoulli'schen Zahlen bedeuten, siehe oben § 3, und θ eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl bezeichnet. Setzt man die Reihe auf der rechten Seite von $J(z)$ ins Unendliche fort, so wird sie *divergent.*

Die Glieder dieser Reihe nehmen im Anfang ab und endigen damit, dass sie über jede Grenze hinaus wachsen; es lässt sich jedoch ein solcher Werth von r finden, dass der Rest der kleinste mögliche ist; berechnet man dann die Glieder bis zu diesem Werth von r, so erhält man eine für die Anwendung ausreichende Annäherung. Die Formel liefert um so genauere Resultate, je grösser z ist, da man zeigen kann, dass der kleinste Term mit dem Anwachsen von z schnell abnimmt. Auf diesem Princip fussend, hat Legendre Tafeln der Werthe von $\log \Gamma(z)$ bis auf 12 Decimalen für alle Werthe der z von Tausendstel zu Tausendstel, mit 1 beginnend bis 2 zusammengestellt.

Die Bestimmung des Indexes r des Terms, dessen Werth der kleinste ist, haben Genocchi, *Roma, Soc. Ital. sc. Mem.*, 6 und Limbourg, *Acad. de Belg.*, 30 zum Gegenstand ihrer Untersuchungen gemacht. Siehe auch Hermite, *Cours de M. Hermite, rédigé en* 1882 *par M. Andoyer*, Paris, 1891. Es gibt auch Tafeln für die Werthe der Γ-Function von Gauss, welche bis zu 20 Decimalstellen reichen.

Den Geltungsbereich der für reelle positive Werthe des Arguments definirten Function $\Gamma(z)$ hat schon Legendre auf reelle negative Werthe von z erweitert und sich dazu der Formel $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$ bedient, indem er annahm, z sei in dieser Formel negativ und liege zwischen -1 und 0; damit ist alsdann Γ für alle Werthe zwischen -1 und 0 definirt (*die erste negative Periode* nach Legendre). Fährt man so fort, so lassen sich die Werthe von Γ für jedes negative z bestimmen; es ergibt sich, dass Γ in den Punkten $z = -1, -2, -3, \cdots$ unendlich gross wird, dass es zwischen 0 und -1 negativ, zwischen -1 und -2 positiv ist u. s. w.

Die Ausdehnung der Function Γ auf das ganze complexe Gebiet hat Weierstrass, *Crelle,* 51 zuerst unternommen und zu diesem Zweck die Convergenz des schon vor ihm von Euler und dann von Gauss, *Werke,* 3, S. 145 betrachteten Products

$$\frac{(\mu - 1)!\, \mu^z}{z(z+1)\cdots(z+\mu-1)}$$

untersucht, in welchem z eine beliebige complexe Zahl bedeutet. Man erhält so eine allgemeine Function $\Gamma(z)$, welche den beiden *charakteristischen* Eigenschaften genügt:

$$\lim_{\mu=0} \frac{\Gamma(z+\mu)}{(\mu-1)!\,\mu^z} = 1,$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Die Function $\Gamma(z)$ ist für ein beliebiges complexes z in der ganzen Ebene eindeutig und wird nur in den Punkten

$$z = 0, -1, -2, \cdots$$

unendlichgross von der 1ten Ordnung und im Unendlichkeitspunkt der Ebene eine wesentliche Singularität; *die zu ihr reciproke Function ist in der ganzen Ebene holomorph; d. h. es gilt für sie die wichtige Weierstrass'sche Formel:*

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = e^{Az} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}.$$

Die Function $\Gamma(z)$ lässt sich in die Summe zweier anderer Functionen $\Gamma(z) = Q(z) + P(z)$ zerlegen, welche beide Q wie P eindeutig sind und von denen die erste in der ganzen Ebene synectisch, die zweite dagegen meromorph ist. Für die erste besteht der Ausdruck:

$$Q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots,$$

worin

$$c_r = \frac{1}{r!}\int_1^{\infty} e^{-x} \log^r x \cdot \frac{dx}{x}$$

ist; für die zweite gilt der Ausdruck

$$P(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{1!\,(z+1)} + \frac{1}{2!\,(z+2)} - \cdots,$$

welcher die Unendlichkeitsstellen 1ter *Ordnung von $\Gamma(z)$ klar erkennen lässt. Das Prym'sche Theorem* (*Zur Theorie der Γ-Functionen, Crelle*, 82, 1877).

Bez. des Beweises dieses Resultats kann man ausser dieser Arbeit Prym's auch Pincherle, *Rend.*, Palermo 1888 und Hermite, *Analyse* nachsehen.

Die Function $\Gamma(z)$ kann nicht das Integral einer algebraischen Differentialgleichung sein, Hölder, *Math. Ann.*, 33, 1886.

Wir schliessen diesen Paragraphen, indem wir eine Auswahl von Integralen mittheilen, die sich auf die Γ-Functionen oder die Derivirte Z ihres Logarithmus zurückführen lassen.

$$\int_0^1 (1-x^b)^p x^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma(p+1)}{q\,\Gamma\left(\frac{b}{q}+p+1\right)},$$

Plana, *Crelle,* 17, 1837,

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \tfrac{1}{2}Z\left(\frac{p+1}{2}\right) - \tfrac{1}{2}Z\left(\frac{p}{2}\right),\\
&\int_0^1 \frac{1-x^p}{1-x}\,x^{q-1}\,dx = Z(p+q) - Z(q),\\
&\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{4}Z\left(\frac{p+3}{4}\right) - \tfrac{1}{4}Z\left(\frac{p+1}{4}\right),\\
&\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx = \frac{1}{2b}Z\left(\frac{a+b}{2b}\right) - \frac{1}{2b}Z\left(\frac{a}{2b}\right),\\
&\int_0^1 \frac{x^q - x^p}{1-x}\,\frac{dx}{x} = Z(p) - Z(q),
\end{aligned}\right\}\ \text{Legendre,}$$

$$\int_0^\infty x^{p-1}\sin qx\cdot dx = \frac{\Gamma(p)}{q^p}\sin\frac{p\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty x^{p-1}\cos qx\cdot dx = \frac{\Gamma(q)}{q^p}\cos\frac{p\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty x^{p-1}\begin{vmatrix}\sin\\ \cos\end{vmatrix}(qx^r)\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{r}\right)}{r\sqrt{q^p}}\begin{vmatrix}\sin\\ \cos\end{vmatrix}\frac{p\pi}{2r},\quad \text{Raabe.}$$

Die erste wichtige Arbeit über die Γ-Functionen ist Legendre, a. a. O. zu verdanken. Gauss, *Werke,* 3, S. 145 legte der Theorie der Γ-Functionen die oben citirte Formel zu Grunde:

$$\Gamma(z) = \lim_{\mu=\infty}\frac{(\mu-1)!\;\mu^z}{z(z+1)\cdots(z+\mu-1)}$$

und leitete aus ihr die Eigenschaften der Γ ab. Poisson, *Journ. École Polyt.*, Hft. 19, 1823; Jacobi, *Crelle,* 11, 1834; Dirichlet, *Sur les intégrales Eulériennes, Crelle,* 15, 1836; *Werke,* 1, S. 271 verfolgten diese Richtung weiter. Ausser den oben angeführten Arbeiten von Prym, Weierstrass u. Anderen citiren wir noch Cauchy, *Exerc.;* Crelle in *Crelle's Journal,* 7; Plana, *Crelle,* 17; Piola, *Opusc. mat. e fis.,* Mailand 1832; Schlömilch, *Analyt. Studien,* Leipzig 1848; De Gasparis, *Giorn. de Batt.,* 6; Pringsheim, *Math. Ann.,* 31 und die neuere Monographie von Graf, *Theorie der Gammafunctionen* etc., Bern 1895.

In einem neuen Werk von Blaserna wird die Function $\frac{d\{zZ(z+1)\}}{dz}$ studirt und eine Tabelle ihrer Werthe hinzugefügt, die A. Sella, *Acc. Lincei, Rend.,* 1895 berechnet hat.

§ 6. Die hypergeometrische Function.

Die sogenannte hypergeometrische Function wird durch die Reihe

$$F(a, b, c, z) = 1 + \frac{a \cdot b}{1!\, c} z + \frac{a(a+1)\, b(b+1)}{2!\, c(c+1)} z^2 + \cdots$$

dargestellt, in welcher a, b, c, z beliebige complexe Grössen sind.

Ist eine der Zahlen a, b eine ganze negative Zahl $-n$, so ist die Reihe endlich; man erhält ein Polynom n^{ten} Grads und nur in diesem Fall ergibt sich ein Polynom.

Offenbar ist F in Bezug auf a und b symmetrisch.

Specielle einfache Fälle der hypergeometrischen Reihe sind *die binomische Reihe*

$$F(-m, b, b, -z) = (1+z)^m,$$

die logarithmische Reihe

$$F(1, 1, 2, -z) = z \log(1+z)$$

und

$$F\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right) = \frac{1}{2z} \log \frac{1+z}{1-z},$$

$$\lim_{b=\infty} F\left(1, b, 1, \frac{z}{b}\right) = e^z,$$

$$\lim_{b=\infty} F\left(b, b, c, \frac{x}{b^2}\right) = 1 + \frac{x}{1!\, c} + \frac{x^2}{2!\, c(c+1)} + \cdots,$$

$$\lim_{b=\infty} F\left(b, b, \frac{1}{2}, \frac{z}{b^2}\right) = \cos\left(2i\sqrt{z}\right),$$

$$\lim_{b=\infty} F\left(b,\ b,\ \frac{3}{2},\ \frac{z}{b^2}\right) = \frac{\sin\left(2i\sqrt{z}\right)}{2i\sqrt{z}},$$

$$F(a,\ b,\ c,\ 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)},\quad \text{Gauss.}$$

Die Reihe auf der rechten Seite convergirt für jedes $|z| < 1$ *und divergirt für jedes* $|z| > 1$. *Ihr Convergenzkreis, dessen Mittelpunkt selbstverständlich im Coordinatenanfang liegt, hat daher den Radius* 1, Gauss, *Werke*, 3.

Wird mit $R(a+b-c)$ der reelle Theil von $a+b-c$ bezeichnet, so erhält man das folgende Weierstrass'sche Resultat, *Crelle*, 51 (siehe auch Schwarz, *Crelle*, 75; Abhandl. 2):

Wenn $|z| = 1$ *ist und*

$R(a+b-c) > 1$, *so werden die Coefficienten unendlich gross;*

$R(a+b-c) = 1$, *so bleiben die Coefficienten endlich;*

$0 < R(a+b-c) < 1$, *so werden die Coefficienten unendlich klein und die Reihe ist für alle Punkte des Kreises* $|z| = 1$ *mit Ausnahme des Punkts* $z = 1$ *convergent;*

$R(a+b-c) < 0$, *so convergirt die Reihe für alle Punkte des Kreises* $|z| = 1$, *einschliesslich des Punkts* $z = 1$.

Wenn man die hypergeometrische Reihe, wie sie oben definirt wurde, als *das Element* einer analytischen Function in dem Sinne der Theorie der analytischen Functionen von Weierstrass, vergl. Kap. 13, S. 352, auffasst, *so ergibt sich eine in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Punkte* $z = \infty$ *und* $z = 1$ *synectische Function.*

Die hypergeometrische Function ist ein particuläres Integral der linearen Differentialgleichung 2ter *Ordnung (Euler):*

$$z(1-z)\frac{d^2F}{dz^2} + \{c - (a+b+1)z\}\frac{dF}{dz} - abF = 0.$$

Setzt man allgemeiner

$$y = Cz^{\alpha}(1-z)^{\gamma}F(a,\ b,\ c,\ z),$$

so ist y *ein particuläres Integral von*

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{z} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-1}\right\}\frac{dy}{dz} +$$

$$+ \left\{\frac{-\alpha\alpha'}{z} + \frac{\gamma\gamma'}{z-1} + \beta\beta'\right\}\frac{y}{z(z-1)} = 0,$$

worin der Symmetrie wegen

$$\alpha' = 1 - c + \alpha,$$
$$\beta' = b - \alpha - \gamma, \qquad \beta = a - \alpha - \gamma,$$
$$\gamma' = c - a - b + \gamma,$$
$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$$

gesetzt wurde.

Schreibt man

$$z = \frac{x - a}{x - b} \cdot \frac{c - b}{c - a},$$

so nimmt diese Differentialgleichung die mehr symmetrische Form an:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left\{\frac{1 - \alpha - \alpha'}{x - a} + \frac{1 - \beta - \beta'}{x - b} + \frac{1 - \gamma - \gamma'}{x - c}\right\}\frac{dy}{dx} +$$
$$+ \left\{\frac{\alpha\alpha'(a - b)(a - c)}{x - a} + \frac{\beta\beta'(b - a)(b - c)}{x - b} +\right.$$
$$\left. + \frac{\gamma\gamma'(c - a)(c - b)}{x - c}\right\}\frac{y}{(x - a)(x - b)(x - c)} = 0,$$

Papperitz, *Math. Ann.*, 25.

Die hypergeometrische Function lässt sich auch als ein bestimmtes Integral betrachten. *Es ist nämlich nach Euler:*

$$F(z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c - a)}\int_0^1 u^{b-1}(1 - u)^{c-b-1}(1 - zu)^{-a}du.$$

Als Function von a oder b angesehen, ist die hypergeometrische Function eine in der ganzen Ebene mit Ausnahme des Punktes ∞ synectische Function.

Als Function von c ist sie in der ganzen Ebene meromorph und wird in den Punkten

$$c = 0, \; -1, \; -2, \; \cdots$$

unendlich gross von der 1ten *Ordnung; in beiden Fällen hat sie selbstverständlich einen wesentlich singulären Punkt im Unendlichen.*

Betrachtet man sie als Function von a und nennt $\Delta F, \Delta^2 F, \cdots$ ihre successiven Differenzen für die Werthe a, $a + 1$, $a + 2$, $\cdots$ des Arguments, so genügt die hypergeometrische Function der linearen Differenzengleichung 2ter *Ordnung:*

$$(a + 1)(z - 1)\Delta^2 F + \{(a + b + 1)z - c\}\Delta F + bzF = 0.$$

Zwei Functionen F, deren Parameter a, b, c sich um ganze Zahlen unterscheiden, heissen *verwandt, contiguae,* Gauss.

Zwischen drei verwandten Functionen besteht immer eine lineare homogene Relation mit Coefficienten, die rationale Functionen von z sind. Die lineare Differentialgleichung ist ein specieller Fall solcher Relationen zwischen verwandten Functionen.

Die Derivirten von F nach z sind ebenfalls hypergeometrische mit F verwandte Functionen. Die erste Derivirte lautet:

$$F' = \frac{ab}{c} F(a+1,\ b+1,\ c+1,\ z).$$

Der Quotient zweier verwandter Functionen lässt sich als Kettenbruch entwickeln, Gauss.

Die hypergeometrische Function wurde von drei verschiedenen Gesichtspunkten aus studirt, indem man sie entweder als bestimmtes Integral, als Reihe oder als ein particuläres Integral der linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung ansah.

Die ersten Untersuchungen stellte Euler an, *Nova acta Petrop.*, 1778; *Institutiones Calc. Integr. Petrop.*, 1769; auf ihn folgten Pfaff, der Lehrer von Gauss, *Disquisitiones analyticae maxime ad calculum integralem* etc., Helmstad 1797, 1 und Gauss selbst, *Werke*, 3 in einer berühmten Arbeit. Kummer, *Ueber eine hypergeometrische Reihe, Crelle,* 15, 1836 ging von der Differentialgleichung aus. Die Riemann'sche Arbeit, 1857 bezeichnet einen wichtigen Fortschritt der Theorie; man kann sagen, dass aus dieser Arbeit die moderne von Fuchs begründete Theorie der linearen Differentialgleichungen hervorgegangen ist.

Mit dem Studium des Quotienten zweier particulärer Integrale der Differentialgleichung 2ter Ordnung hat, wie man wohl annehmen kann, Riemann in seinen beiden Abhandlungen über die Minimalflächen den Anfang gemacht; sie wurden unter Nr. 17 und 26 in seinen gesammelten Werken publicirt (*Gesammelte math. Werke u. wissensch. Nachlass,* edirt v. Dedekind u. Weber, Leipzig 1876). Die Anwendung auf den hypergeometrischen Fall bildete dann den Gegenstand eines interessanten Aufsatzes von Schwarz, *Gauss' hypergeom. Reihe als algebr. Funct. ihrer 4 Elem.*, *Crelle*, 75, 1872, der anderen wichtigen Untersuchungen z. B. auch den projectiven Differentialinvarianten, siehe Kap. 9, § 3, zur Grundlage diente.

Schliesslich hat Klein, *Math. Ann.,* 37 wichtige Resultate in Bezug auf die Nullpunkte der hypergeometrischen Function gefunden. Vergl. auch *Math. Ann.,* 40 und Schilling, *Math. Ann.,* 44.

Die Verallgemeinerungen der hypergeometrischen Functionen sind verschiedener Art. Erwähnenswerth ist die von Heine, *Crelle*, 32, 34, 1847 und Thomae, *Die höheren hypergeometr. Reihen, Math. Ann.*, 2, 1870; diese Autoren verallgemeinern die Gauss'sche Reihe, indem sie eine grössere Anzahl von Parametern einführen. Eine andere Erweiterung ist von Heun, *Math. Ann.*, 33, der von den Differentialgleichungen ausgeht und eine letzte schliesslich rührt von Pochhammer her, *Hypergeom. Funct.* n^{ter} *Ordn.*, *Crelle*, 71, 1870; Appell, *Les fonctions hypergéom. à 2 variables, Compt. Rend.*, 91, 1880 u. *Journ. de Liouville*, 8, 1882; Picard, *Ann. Éc. norm.*, 12, 1881; Goursat, *Fonct. hypergéom. d'ordre supér.*, Paris, *Ann. Éc. norm.*, 12, 1883 und von Horn, *Acta math.*, 15; sie betrachten hypergeometrische Functionen nicht von einer, sondern von zweien oder mehreren Variabelen.

In Bezug auf weitere Einzelheiten empfehlen wir ganz besonders *die autographirten Vorlesungshefte* von Felix Klein, 3, *Ueber die hypergeometrische Function* (W. S. 1893/1894). Siehe auch einen Cursus von Vorlesungen, die kürzlich Pincherle gehalten hat, *Giorn. di Batt.*, 32.

§ 7. Die Legendre'schen Kugelfunctionen einer Variabelen.

Entwickelt man den Ausdruck

$$T = (1 - 2\alpha z + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}},$$

in welchem α, z reelle Zahlen und kleiner als 1 sind, nach ganzen positiven wachsenden Potenzen von α, so ist der Werth des Coefficienten von α^n in dieser Entwickelung:

$$P^{(n)}(z) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!}\left\{z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} z^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-2)} z^{n-4} - \cdots\right\}.$$

Das Polynom $P^{(n)}(z)$ heisst für reelle oder complexe z eine *Legendre'sche Kugelfunction erster Art;* man pflegt sie auch mit $X^{(n)}$ oder X_n zu bezeichnen. Der Name *Kugelfunction* rührt von Gauss her.

Diese Functionen sind specielle Fälle der hypergeometrischen Function; *sie stellen nämlich für ganzzahlige positive n endliche hypergeometrische Reihen vor:*

$$P^{(n)}(z) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n!} z^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}-n, \frac{1}{z^2}\right),$$

$$P^{(2n)}(z) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} F\left(-n, n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right),$$

$$P^{(2n+1)}(z) = (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} zF\left(-n, n+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right),$$

worin F das Symbol der hypergeometrischen Function von Gauss ist, vergl. § 6.

Die Grundformeln für $P^{(n)}$ sind:

$$P^{(0)} = 1, \quad P^{(1)} = z, \quad P^{(2)} = \frac{3}{2}\left(z^2 - \frac{1}{3}\right),$$

$$P^{(2n)}(-z) = P^{(2n)}(z), \quad P^{(2n+1)}(-z) = -P^{(2n+1)}(z),$$

$$P^{(n)}(1) = 1, \quad P^{(2n)}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)},$$

$$\lim_{z=0} \frac{P^{(2n+1)}(z)}{z} = (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}.$$

Setzt man $z = \cos\theta$, so wird

$$\frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} P^{(n)}(\cos\theta) = \cos n\theta + \frac{1 \cdot n}{1 \cdot (2n-1)} \cos(n-2)\theta + \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\theta + \cdots.$$

Ist θ reell, so hat $P^{(n)}(\cos\theta)$ den grössten Werth für $\theta = 0$; dieser Werth ist der Einheit gleich.

Die Kugelfunction lässt sich auch durch die Formel ausdrücken:

$$P^{(n)}(z) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n (z^2-1)^n}{dz^n}.$$

Diese Formel heisst die Ivory und Jacobi'sche, sie ist jedoch Rodriguez zuzuschreiben, vergl. Heine, *Theorie der Kugelfunctionen,* Berlin 1878, 2. Ausg., 1881, S. 20; sie ist auch eine wichtige Formel für die Differentialrechnung, da sie die n^{te} Dirivirte der Function $(z^2 - 1)^n$ liefert, Jacobi, *Crelle,* 15. Siehe auch oben S. 114.

Alle Wurzeln von $P^{(n)}(z) = 0$ *sind reell, kleiner als* 1 *und verschieden von einander; wenn ferner* β *eine Wurzel bezeichnet, so ist auch* $-\beta$ *eine solche.* Die Zahlenwerthe dieser Wurzeln von $n = 1$ bis $n = 7$ hat Gauss berechnet, der sie für seine Quadraturformel benutzte; wir haben diese Gauss'sche Tafel in Kap. 10, S. 233 zum Theil reproducirt. Ueber die Wurzeln der Kugelfunctionen existirt auch eine wichtige neuere Arbeit von Markoff, *Math. Ann.*, 27.

Jede Kugelfunction lässt sich durch die bekannte Laplace'sche Formel, *Traité de mécanique céleste,* 5 Bde., Paris 1799—1825, 2. éd., 1829—1839, Bd. 5, Buch 11, Kap. 2 ausdrücken:

$$\pi P^{(n)}(z) = \int_0^\pi \left(z + \cos\varphi \sqrt{z^2 - 1}\right)^n d\varphi.$$

Mittelst dieser Formel lässt sich der Geltungsbereich von $P^{(n)}$ auf den Fall von nicht ganzen, positiven n ausdehnen.

Gibt man dem Argument die Form des Cosinus und nimmt an, θ sei reell und $0 < \theta < \pi$, so erhält man die beiden Dirichlet'schen Formeln, Crelle, 17, 1837,

$$\frac{\pi}{2} P^{(n)}(\cos\theta) = \int_0^\theta \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi \cos n\varphi \, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}} + \int_\theta^\pi \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi \cos n\varphi \, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\varphi)}},$$

$$\frac{\pi}{2} P^{(n)}(\cos\theta) = -\int_0^\theta \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi \sin n\varphi \, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}} + \int_\theta^\pi \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi \sin n\varphi \, d\varphi}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\varphi)}}.$$

Diese Formeln gelten für $n = 0$ nicht.

Die Kugelfunction $P^{(n)}$ genügt der Differentialgleichung:

$$(1 - z^2)\frac{d^2 P^{(n)}(z)}{dz^2} - 2z\frac{dP^{(n)}(z)}{dz} + n(n+1)P^{(n)}(z) = 0.$$

Die Kugelfunctionen 2ter Art werden durch die Formel definirt:

$$Q^{(n)}(z) =$$
$$= \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\left\{z^{-n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}z^{-n-3} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)}z^{-n-5} + \cdots\right\}.$$

Sie sind ähnlich gebildet, wie die Kugelfunctionen erster Art und wurden von Heine studirt, *Crelle,* 42, 1851 und *Kugelf.* etc.

Zwischen den Functionen P und Q besteht für jedes Werthepaar von x und y, für welches

$$\left|x - \sqrt{x^2 - 1}\right| > \left|y - \sqrt{y^2 - 1}\right| \quad \textit{ist,}$$

die einfache Beziehung:

$$\frac{1}{y - x} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P^{(n)}(x)Q^{(n)}(y), \text{ Heine, a. a. O.}$$

Ueber dieses Theorem siehe auch Carl Neumann, *Entwickelung einer Funct. mit imagin. Argument nach den Kugelfunct. 1. u. 2. Art,* Halle 1861; *Theorie der Bessel'schen Funct.,* Leipzig 1867; Thomé, *Ueber die Reihen, welche nach Kugelfunct. fortschreiten, Crelle,* 66, 1866.

$Q^{(n)}$ lässt sich auf die folgende Art als Function der hypergeometrischen Reihe ausdrücken

$$Q^{(n)}(z) = \frac{n!}{3\cdot 5\cdots(2n-1)} z^{-n-1} F\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2}, \frac{3}{2}+n, \frac{1}{z^2}\right).$$

Für $z=1$ wird Q unendlich gross, während

$$\lim_{z=1} (1-z)\, Q^{(n)}(z) = 1 \text{ ist.}$$

Für jedes z, dessen Modul kleiner als 1 ist, wird Q endlich.

$Q^{(n)}$ kann durch ein mehrfaches Integral ausgedrückt werden:

$$Q^{(n)}(z) = 2^n n! \int_z^\infty \cdots \int_z^\infty \frac{dz^{n+1}}{(z^2-1)^{n+1}},$$

worin man auf der rechten Seite $n+1$ mal zu integriren hat.

Die Function $Q^{(n)}$ ist ferner ein particuläres Integral derselben Differentialgleichung, welcher die Function $P^{(n)}$ genügt.

Die Function Q wird auch durch die Formel definirt:

$$Q^{(n)}(z) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} P^{(n)}(y) \frac{dy}{z-y},$$

die von F. E. Neumann herrührt, Crelle, 37, 1848.

Ferner lässt sich, wie $P^{(n)}$, auch $Q^{(n)}$ durch eine n^{te} Derivirte ausdrücken:

$$Q^{(n)}(z) = \frac{(-2)^n n!}{2n!} \frac{d^n}{dz^n}\left[(z^2-1)^n \int_z^\infty \frac{dz}{(z^2-1)^{n+1}}\right].$$

Die Kugelfunctionen 1ter *und* 2ter *Art genügen den Relationen:*

$$\int P^{(m)}(z)\, P^{(n)}(z)\, dz = 0,$$

$$\int Q^{(m)}(z)\, Q^{(n)}(z)\, dz = 0,$$

$$\int P^{(m)}(z)\, Q^{(n)}(z)\, dz = \begin{cases} \dfrac{2\pi i}{2n+1}, & \text{wenn } m = n \text{ ist und} \\ 0, & \text{wenn } m \text{ von } n \text{ verschieden ist,} \end{cases}$$

in welchen die Integrationen in positivem Sinn längs einer Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 oder längs einer beliebigen anderen geschlossenen Curve auszuführen sind, die sich, ohne die Strecke $(-1, +1)$ zu kreuzen, durch stetige Deformation auf eine solche Ellipse zurückführen lässt.

Verwandt mit der ersten dieser Formeln sind die Legendre'schen *für reelle z:*

$$\int_{-1}^{+1} z^m P^{(n)}(z) = 0, \text{ wenn } m < n \text{ ist,}$$

$$\int_{-1}^{+1} P^m(z) P^n(z)\, dz = 0 \text{ für } m \lessgtr n,$$

$$\int_{-1}^{+1} P^n(z) P^n(z)\, dz = \frac{2}{2n+1}.$$

Die Kugelfunctionen 1[ter] *und* 2[ter] *Art genügen den folgenden Recursionsbeziehungen:*

$$(n+1) P^{(n+1)} - (2n+1) z P^{(n)} + n P^{(n-1)} = 0,$$

$$P^{(1)} - z P^{(0)} = 0, \quad \text{Gauss; vergl. Heine, } \textit{Kugelf.}, \text{ 1, S. 91, 92,}$$

$$\frac{d P^{(n+1)}}{dz} - \frac{d P^{(n-1)}}{dz} = (2n+1) P^{(n)},$$

$$(n+1) Q^{(n+1)} - (2n+1) z Q^{(n)} + n Q^{(n-1)} = 0,$$

$$Q^{(1)} + z Q^{(0)} + 1 = 0,$$

$$\frac{d Q^{(n+1)}}{dz} - \frac{d Q^{(n-1)}}{dz} = (2n+1) Q^{(n)}.$$

Ausserdem gilt für $Q^{(n)}$ auch die wichtige Beziehung, die man bei Gauss findet, *Methodus nova, integralium valores per approximationem inveniendi, Comm. recent. Soc. Gott.*, 3, 1814, 1815:

$$Q^{(n)}(z) = \frac{1}{2} P^{(n)} z \log \frac{z+1}{z-1} - Z^{(n)},$$

worin $Z^{(n)}$ eine ganze Function vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad in z ist.

Das Polynom $Z^{(n)}$ lässt sich auch durch die Formel ausdrücken:

$$Z^{(n)} = \frac{2n-1}{1 \cdot n} P^{(n-1)}(z) + \frac{2n-5}{3(n-1)} P^{(n-3)}(z) + \\ + \frac{2n-9}{5(n-2)} P^{(n-5)}(z) + \cdots,$$

in welcher der letzte Term $P^{(0)}$ oder $P^{(1)}$ enthält, je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist.

Historische und Literaturangaben über die Kugelfunctionen im Allgemeinen (die Legendre'schen und Laplace'schen) findet man im folgenden Paragraphen.

§ 8. Die Laplace'schen Kugelfunctionen von zwei Variabelen.

In der Kugelfunction 1ter Art $P^{(n)}(z)$ wollen wir an die Stelle von z die Grösse $\cos\gamma$ setzen und es sei

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi').$$

Man kann diesem Winkel γ eine geometrische Deutung geben, wenn man ihn als den Winkel betrachtet, den die beiden vom Coordinatenanfang nach zwei gegebenen Punkten gezogenen Radienvectoren miteinander machen; denn, wenn $(\varrho, \theta, \varphi)$, $(\varrho', \theta', \varphi')$ die Polarcoordinaten der beiden gegebenen Punkte sind, so ist der Cosinus des Winkels der beiden Radienvectoren eben $\cos\gamma$, während der Abstand r der Punkte

$$r = (\varrho^2 - 2\varrho\varrho'\cos\gamma + \varrho'^2)^{\frac{1}{2}} \text{ ist.}$$

Nennt man x, y, z; x', y', z' die Cartesischen Coordinaten der beiden Punkte, so erhält man:

$$x = \varrho\cos\theta, \qquad x' = \varrho'\cos\theta',$$
$$y = \varrho\sin\theta\cos\varphi, \quad y' = \varrho'\sin\theta'\cos\varphi',$$
$$z = \varrho\sin\theta\sin\varphi, \quad z' = \varrho'\sin\theta'\sin\varphi',$$
$$\cos\gamma = \frac{xx' + yy' + zz'}{\varrho\varrho'},$$
$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Die Function $P^{(n)}$ wird auf diese Art eine Function von θ, θ'; φ, φ'; führt man diese Variabelen ein, so ergibt sich:

$$P^{(n)}(\cos\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\{\cos\theta' + i\sin\theta'\cos(\varphi' - \omega)\}^n}{\{\cos\theta + i\sin\theta\cos(\varphi - \omega)\}^{n+1}}\, d\omega.$$

Wir wollen den zweiten Punkt als *festliegend*, den ersten als *variabel* betrachten; alsdann wird $P^{(n)}$ zu einer *Function*

in u ... auch dreier Variabelen
Elli ... untereinander verbunden sind:
and ...
die ... $) ^2 = 1$.
au ...

L ... der $P^{(n)}$, als Functionen von ... dann, *dass sie mit einem Factor ... Differentialgleichung* 2ter *Ordnung ge-*

$$\ldots + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 .$$

$$\ldots P^{(n)}) = 0 ,$$

$$\ldots \frac{P^{(n)}}{\varrho^2 + 1}) = 0 .$$

... $\Delta^2 U$, *indem man die Variabelen* θ, φ ... *die partielle Differentialgleichung:*

$$\ldots - \cot\theta \frac{\partial P^{(n)}}{\partial \theta} + n(n+1) P^{(n)} = 0 .$$

... *rationale ganze* Function von $\cos\theta$, ... welche an die vorstehende Gleichung

... zur Definition der *Kugelfunctionen zweier* ... lässt sich sagen:
... *rationale ganze Function* n^{ten} *Grads* ... *und mithin zweier unabhängiger Varia-* ... *der vorstehenden Differentialgleichung genügt.* ... *'sche Kugelfunction* und wird mit dem ... bezeichnet; ein specieller Fall von $Y^{(n)}$ ist $P^{(n)}$ ... Legendre'sche Kugelfunction, wenn man in ihr zum

... $\cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \sin(\varphi - \varphi')$ nimmt.

... *Laplace'sche hängt mit der Legendre'schen Func-* ... *die Formel zusammen:*

$$\ldots = \sum_{=0} \{ h_i \cos(i\varphi) + k_i \sin(i\varphi) \} \sin^i\theta \frac{d^i P^{(n)}(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^i} .$$

... h, k_i *willkürliche Constante bedeuten.*

Die Laplace'sche Function lässt sich durch die Legendre'sche auch auf die folgende Art ausdrücken:

$$Y^{(n)} = \sum_{k=1}^{2n+1} m_k P^{(n)} (\cos \gamma_k),$$

worin $m_1, m_2, \cdots m_{2n+1}$, $2n+1$ *Constante bezeichnen,*

$$\cos \gamma_k = \cos \theta \cos \theta_k + \sin \theta \sin \theta_k \cos (\varphi - \varphi_k) \text{ ist}$$

und (θ_k, φ_k) *die Coordinaten der* $2n+1$ *auf der Kugel vom Radius* 1 *liegenden Punkte sind.*

Jede rationale, homogene, ganze Function n^{ten} *Grads* $U(x, y, z)$, *welche die Bedingung* $\Delta^2 U = 0$ *erfüllt, wird, durch* ϱ^n *dividirt, eine Laplace'sche Function. Die allgemeinste Laplace'sche Function enthält* $2n+1$ *willkürliche Constante.*

Die Kugelfunction $Y^{(n)}$ *besitzt, wenn sie als eine Function der Coordinaten* x, y, z *der Punkte einer Kugel vom Radius* 1 *betrachtet wird, für von* n *verschiedene* m *die Eigenschaft*

$$\iint Y^{(n)} Y^{(m)} d\sigma = 0;$$

dabei ist die Integration über die ganze Kugel zu erstrecken.

In demselben Sinn ist dann auch

$$\iint Y^{(n)} P^{(n)} d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} Y^{(n)}_{\substack{\theta=\theta' \\ \varphi=\varphi'}},$$

wenn man mit $Y^{(n)}_{\substack{\theta=\theta' \\ \varphi=\varphi'}}$ *den Werth von* $Y^{(n)}$ *für* $\theta = \theta'$ *und* $\varphi = \varphi'$ *bezeichnet.*

Diese Formeln lassen sich auch schreiben:

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} Y^{(n)}(\theta, \varphi) Y^{(m)}(\theta, \varphi) d\varphi = 0, \quad (m \lesseqgtr n),$$

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} Y^{(n)}(\theta, \varphi) P^{(n)} (\cos \gamma) d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} Y^{(n)}_{\substack{\theta=\theta' \\ \varphi=\varphi'}},$$

worin $\cos \gamma$, wie oben, durch θ, θ', φ, φ' auszudrücken ist.

Die Kugelfunctionen wurden fast gleichzeitig von Legendre, *Sur l'attraction des sphéroïdes homogènes, Mém. Sav. étr.*, 10, 1785, 1787; *Exercises d'Analyse et de Physique Mathématique* und *Fonct. ellipt.* und von Laplace, *Mém. Sav. étr.*, 1785; *Mécanique celeste* bearbeitet. Später haben sich namentlich Gauss,

Werke, 5; Dirichlet, *Crelle*, 17 und Jacobi, *Crelle*, **15**, 1836 mit ihnen beschäftigt. Neuer sind die Arbeiten von Dini, *Serie di funz. sferiche, Ann. di mat.*, 6, 1874; Franz Neumann, *Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen*, Leipzig 1878 und vor Allen Heine, dessen umfangreiches Werk, *Handbuch der Kugelfunctionen*, Berlin 1881, 2te Ausg. alle nur wünschenswerthen Angaben enthält. Man hat auch die sogenannten *Kegelfunctionen* studirt, die grosse Aehnlichkeit mit den Kugel- und Cylinderfunctionen haben. Näheres über sie findet man bei Mehler, *Crelle*, 68, 1868 und *Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function etc.*, Programm, Elbing 1870 und ausserdem bei Heine a. a. O. 1, S. 300; 2, S. 218. Wir wollen dazu bemerken, *dass die Kegelfunctionen nichts Anderes als Kugelfunctionen sind, deren Index n complex ist.*

Eine kurze Uebersicht über die Lehre von den Kugelfunctionen gibt ein neueres Buch von Frischauf, *Vorlesungen über Kreis- und Kugelfunctionenreihen*, Leipzig 1897.

§ 9. Die Bessel'schen Cylinderfunctionen.

Die Cylinderfunction oder die Bessel'sche Function erster Art wird durch die Formel definirt:

$$J^{(n)}(z) = \frac{z^n}{2^n n!}\left(1 - \frac{z^2}{2(2n+2)} + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{0!\,n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{1!\,(n+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{2!\,(n+2)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+4} - \cdots.$$

Die Reihe convergirt für jedes z.

Die Definition, welche Bessel gibt, lautet, *Abh. der Berliner Akad.*, 1824:

$$J^{(n)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\omega - n\omega)\,d\omega.$$

Ueberdies ist:

$$J^{(n)}(z) = \frac{z^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2n}\omega\,d\omega,$$

$$J^{(n)}(z) = \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^\pi e^{iz\cos\omega}\cos n\omega\,d\omega.$$

Die Function $J^{(n)}(z)$ ist ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)F = 0.$$

Für $n = 0$ wird $J^{(n)}$

$$J^{(0)}(z) = 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 4^2} - \cdots,$$

d. h. also die Grenze der Kugelfunction $P^{(n)}\left(\cos\frac{z}{n}\right)$ für $n = \infty$.

Zugleich mit der Function J hat Neumann eine andere Function untersucht, die er mit $O^{(n)}$ bezeichnete und *die Bessel'sche Function zweiter Art* nannte.

Sie wird durch die Formel definirt:

$$\varepsilon_n O^{(n)}(z) = \frac{2^n n!}{z^{n+1}}\left(1 + \frac{z^2}{2\cdot(2n-2)} + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot(2n-2)(2n-4)} + \cdots\right),$$

worin für $n = 0$, $\varepsilon_n = 1$ und für $n > 0$, $\varepsilon_n = 2$ ist und in welcher die Anzahl der in der Klammer stehenden Terme endlich ist. Der letzte Term lautet

$$\frac{z^n}{2\cdot 4\cdots n\cdot(2n-2)(2n-4)\cdots n} \quad \textit{für gerade } n \textit{ und}$$

$$\frac{z^{n-1}}{2\cdot 4\cdots(n-1)(2n-2)(2n-4)\cdots(n+1)} \quad \textit{für ungerade } n.$$

Man kann diesen Ausdruck auch schreiben:

$$\varepsilon_n O^{(n)}(z) = \frac{n}{z}\left\{\frac{(n-1)!}{0!}\left(\frac{2}{z}\right)^n + \frac{(n-2)!}{1!}\left(\frac{2}{z}\right)^{n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-3)!}{2!}\left(\frac{2}{z}\right)^{n-4} + \cdots\right\},$$

worin der letzte Term

$$\frac{\frac{(n-2)!}{2}}{\frac{n}{2}!}\left(\frac{2}{z}\right)^0$$

für gerade n und $\left(\frac{2}{z}\right)^1$ für ungerade n ist.

Die Function $O^{(n)}$ lässt sich auch durch ein Integral ausdrücken:

$$O^{(n)}(z) = \int_0^\infty \frac{(\omega + \sqrt{\omega^2 + z^2})^n + (\omega - \sqrt{\omega^2 + z^2})^n}{2 z^{n+1}} e^{-\omega} d\omega.$$

Sie ist eine rationale ganze Function von $\frac{1}{z}$ *vom* $(n+1)^{\text{ten}}$ *Grad, verschwindet für* $z=\infty$ *und genügt der Differentialgleichung:*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{3}{z}\frac{\partial F}{\partial z} + \left(1 - \frac{n^2-1}{z^2}\right)F = g_n,$$

in welcher

$$\text{für gerade } n, \quad g_n = \frac{1}{z},$$

$$\text{für ungerade } n, \quad g_n = \frac{n}{z^2} \text{ ist.}$$

Durch die Einführung der Function $O^{(n)}$ zweiter Art ist Neumann der Nachweis gelungen, dass sich die Lehre von den Cylinderfunctionen analog wie diejenige von den Kugelfunctionen durchführen lässt. Viele Eigenschaften bleiben unverändert. *Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Kugelfunctionen* 1ter *und* 2ter *Art particuläre Integrale derselben Differentialgleichung sind, während bei den Cylinderfunctionen* $J^{(n)}$ *und* $O^{(n)}$ *Integrale zweier verschiedener Differentialgleichungen vorstellen.*

Die Function $J^{(n)}(z)$ *verschwindet für unendlich viele reelle Werthe von* z *und nur für reelle Werthe. Der Fourier'sche Satz.*

Die Functionen $J^{(n)}$ und $O^{(n)}$ besitzen drei Eigenschaften, welche drei ähnlichen Eigenschaften der Kugelfunctionen entsprechen. *Versteht man nämlich unter dem Symbol* $\int$ *eine in positivem Sinn längs einer geschlossenen Curve ausgeführte Integration, so gelten die drei Relationen:*

$$\int J^{(m)}(z)\, J^{(n)}(z)\, dz = 0,$$

$$\int O^{(m)}(z)\, O^{(n)}(z)\, dz = 0,$$

$$\int J^{(m)}(z)\, O^{(n)}(z)\, dz = k;$$

darin ist $k=0$, *wenn die geschlossene Curve in ihrem Innern den Punkt Null nicht enthält; enthält dagegen die Curve diesen Punkt in ihrem Innern, so ist*

$$k = 0, \quad \text{wenn } m \text{ von } n \text{ verschieden ist, und}$$

$$k = \frac{2\pi i}{\varepsilon_n} \quad \text{für } m = n.$$

Geht die geschlossene Curve durch den Punkt Null, so verliert ein Theil der Formeln seine Gültigkeit (diejenigen nämlich, in welchen $O^{(n)}$ *vorkommt).*

Für jedes n mit Ausnahme von $n = 0$ bestehen die Recursionsbeziehungen:

$$2\frac{dJ^{(n)}(z)}{dz} = J^{(n-1)}(z) - J^{(n+1)}(z),$$

$$2\frac{dO^{(n)}(z)}{dz} = O^{(n-1)}(z) - O^{(n+1)}(z).$$

Für $n = 0$ gelten die Formeln:

$$\frac{dJ^{(0)}(z)}{dz} = -J^{(1)}(z),$$

$$\frac{dO^{(0)}(z)}{dz} = -O^{(1)}(z).$$

Die Function $J^{(n)}$ genügt auch der Recursionsrelation (von Bessel) für $n > 0$:

$$\frac{2n}{z}J^{(n)}(z) = J^{(n-1)}(z) + J^{(n+1)}(z).$$

Ferner ist:

$$J^{(n+1)}(z) = \frac{n}{z}J^{(n)}(z) - \frac{dJ^{(n)}(z)}{dz}.$$

Ist $\mathrm{mod}\, x < \mathrm{mod}\, y$, *so erhält man die Formel*

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J^{(n)}(x)\, O^{(n)}(y),$$

welche für jedes Paar x, y gilt, das die angegebene Bedingung erfüllt.

In Bezug auf die Anwendung der Bessel'schen Functionen ist die folgende Eigenschaft von Interesse:

Bedeutet r den Abstand zweier Punkte, deren Coordinaten x, y; x_1, y_1 sind, so genügt die Function $J^{(0)}(r)$ der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + U = 0;$$

und dasselbe gilt auch von der Function $Y^{(0)}(r)$, welche mit $J^{(0)}(r)$ zusammen das particuläre Integral der linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung darstellt, welcher $J^{(0)}(r)$ genügt.

Bezüglich der Entwickelung einer Function in Reihen von Bessel'schen Functionen siehe Kap. 19.

Als Hauptwerke über die Bessel'schen Functionen citiren wir: Bessel, *Abh. der Berl. Akad.*, 1824; Jacobi, *Crelle*, 15; Schlömilch, *Bessel's Functionen, Zeitschr. f. Math. u. Physik,*

2, 1857; Lipschitz, *Crelle,* 56, 1859; Carl Neumann, *Theorie der Bessel'schen Functionen,* Leipzig 1867; Heine, *Kugelfunct.;* etc. Ueber die Function $J^0(z)$ siehe auch Lerch, *Monatshefte f. Math. u. Phys.,* 1, 1890.

§ 10. Die Lamé'schen Functionen.

Wir wollen die Lamé'schen Functionen in der allgemeineren Form einführen, die ihnen Heine gegeben hat.

Es sei $\psi(z)$ ein Polynom $(p+1)^{\text{ten}}$ Grads in z und es werde

$$du = \frac{1}{2}\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}$$

gesetzt.

Es bestehe ferner die Differentialgleichung

$$\frac{d^2V}{du^2} + \varphi(z)\,V = 0,$$

worin $\varphi(z)$ ein anderes Polynom in z sei, welches so gewählt ist, dass die vorstehende Gleichung eine Lösung V hat, welche einer *ganzen Function* n^{ten} Grads in z gleich ist; tritt dieser Fall ein, so nennen wir ein solches V *eine Lamé'sche Function* p^{ter} *Ordnung und* n^{ten} *Grads.*

Die Lamé'sche Function lässt sich auch als eine ganze Function n^{ten} *Grads, welche ein Integral der Gleichung*

$$4\psi(z)\frac{d^2V}{dz^2} + 2\psi'(z)\frac{dV}{dz} + \varphi(z)\,V = 0$$

ist, definiren; dabei ist ψ *ein gegebenes Polynom* $(p+1)^{\text{ten}}$ *Grads und* φ *bedeutet ein Polynom, welches aus der Bedingung abzuleiten ist, dass diese Differentialgleichung eine derartige Lösung zulasse.*

Es existiren

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+p-2)}{(p-1)!}(2n+p-1)$$

Functionen φ*, aus welchen ebensoviele Lamé'sche Functionen sich bilden lassen, zwischen denen keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten existirt.*

Das Polynom φ *ist vom* $(p-1)^{\text{ten}}$ *Grad.*

Die von Lamé eingeführten und untersuchten Functionen sind specielle Fälle der Functionen φ; sie sind Integrale der Gleichung



$$(z^2 - b^2)(z^2 - c^2)\frac{d^2E}{dz^2} + z(2z^2 - b^2 - c^2)\frac{dE}{dz} +$$
$$+ \{(b^2 + c^2)m - n(n+1)z^2\}E = 0.$$

Benutzt man das durch die Beziehung

$$du = - c\frac{dz}{\sqrt{(z^2 - b^2)(c^2 - z^2)}}$$

definirte elliptische Integral u, so lässt sich der vorstehenden Gleichung eine Form vom Typus

$$\frac{d^2E}{du^2} = \{n(n+1)k^2 \sin^2 \operatorname{am} u + h\} E(z) \text{ geben.}$$

Diese Functionen studirte Lamé, *Leçons sur les fonctions inverses des transcendants et les surfaces isothermes,* Paris 1857; *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur,* Paris 1861; *Journ. de Liouville,* 4, 5, 8; später hat Heine, *Lamé's Functionen, Crelle,* 60, 61, 62, 1862, 1863; *Existenz und Anzahl der Lamé'schen Functionen, Berl. Monatsber.,* 1864; *Kugelfunctionen,* 1, S. 445 den allgemeineren Fall zum Gegenstand seiner Forschungen gemacht.

Kapitel XIX.

Die analytische Darstellung der Functionen.

§ 1. Allgemeine Betrachtungen. Die Wronski'sche und die Lagrange'sche Reihe.

Die Functionen analytisch darzustellen ist ein sehr altes und grundlegendes Problem.

Untersuchungen dieser Art lassen sich in zwei Kategorien theilen; man kann entweder beabsichtigen, die gegebene Function durch andere bestimmte Functionen auszudrücken, oder man kann versuchen, die gegebene Function durch die Werthe darzustellen, welche sie selbst in gewissen Punkten oder welche ihre Derivirten in gewissen Punkten annehmen.

Jeder analytische Ausdruck mit einer endlichen oder unendlich grossen Anzahl von Operationen lässt sich von zwei verschiedenen Standpunkten betrachten, insofern man die constanten Grössen, welche in der Entwickelung auftreten, oder die Form der variabelen Grössen feststellen will.

Die einfachste dieser Art von Betrachtungen entsprechende Entwickelung ist jene berühmte Formel, die den Namen der Taylor-Maclaurin'schen führt. Man kann sie als eine Formel der ersten Kategorie ansehen, wenn man eine Entwickelung verlangt, deren Terme nach ganzen positiven Potenzen von $(z - z_0)$ fortschreiten; sie lässt sich aber auch als zur zweiten Kategorie gehörig auffassen, wenn man sie als eine Formel betrachtet, durch welche sich die Werthe der Function berechnen lassen, wenn die Werthe, welche ihre successiven Derivirten in dem Punkt z_0 haben, bekannt sind.

Hierher gehören auch die Formeln von Cauchy, von Laurent, vergl. S. 360, die verschiedenen Interpolationsformeln, S. 226 und die von Weierstrass und Mittag-Leffler, S. 362. Andere Formeln, die speciell der ersten Kategorie angehören, sind schliesslich die sogenannte Wronski'sche und Lagrange'sche.

Der erste dieser Autoren, Wronski, hatte im Wesentlichen vor, eine Function auch von mehreren Variabelen durch eine Reihe auszudrücken, deren Terme von anderen willkürlich gegebenen Functionen abhängen. Der Formel, zu der er kam, gab er in seinem gewohnten metaphysischen Stil den Namen *Loi suprême.* Man erhält eine sehr allgemeine Formel, die aber vom Standpunkt der modernen Analysis weit davon entfernt ist, für genau gelten zu können; Du Bois-Reymond legt ihr nur eine rein formelle Bedeutung bei. Die Wronski'sche[1]) Arbeit über das *loi suprême* wurde der Pariser Akademie der Wissenschaften im Jahr 1810 überreicht; doch blieben seine Ideen mehr als 60 Jahre vergessen, bis endlich eine Abhandlung Cayley's erschien, *Wronski's theorem, Quart. Journ. Math.*, 12, 1873, der dann andere Arbeiten von Transon, *Loi d. séries de Wronski, sa phoronomie; sur la formule publ. 1812 par Wronski et démontrée 1875 par Cayley, Nouv. ann. de math.*, 13, 1874; Ch. Lagrange, *Compt. Rend.*, 1884; *Ac. de Belgique*, 1884 etc. folgten.

Weitere Angaben über die Wronski'sche Reihe findet man bei Dickstein, *Biblioth. math.*, 1894; in einem Buch „*Ueber Hoëne-Wronski*" von demselben Verfasser in polnischer Sprache, Krakau 1896 und in dem 3ten Band des *Cours d'analyse* von Laurent.

Selbstverständlich gehen aus der Wronski'schen Reihe als specielle Fälle die Taylor'sche und die sogenannte Lagrange'sche hervor.

Die Lagrange'sche Reihe lautet:

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{z-a}{\varphi(z)}\right]^{n+1} \left\{\frac{d^n [f'(z)\varphi(z)^{n+1}]}{dz^n}\right\}_{z=a};$$

darin ist $\varphi(z)$ eine willkürliche Function, welche nur an die Bedingung gebunden ist, dass sie in einem Theil der Ebene um den Punkt a synectisch sein muss.

Für $\varphi(z) = 1$ erhält man die Taylor'sche Entwickelung.

Man wendet die Reihe an, um die Wurzeln einer Gleichung von der Form

$$(z-a) - \alpha\varphi(z) = 0$$

zu ermitteln, deren Auflösung in einem speciellen Fall (dem Fall: $\varphi(z) = \sin z$) ein wichtiges Problem in der Mechanik des Himmels

1) Er selbst nennt sich Hoëne-Wronski.

bildet. Wir citiren bez. der Lagrange'schen Reihe die Arbeiten von Chio, *Sur la série de Lagrange, Sav. étrang.*, 12, 1854; *Atti Acc. di Torino*, 7, 1872; Genocchi, *Compt. Rend.*, 1873; Rouché, *Série de Lagrange, École Polyt.*, Cah. 39, 1862; etc.

Schliesslich sind von Formeln, die zur ersten Kategorie gehören, noch diejenigen zu erwähnen, welche eine Function in Reihen entwickeln, deren Terme entweder Kreisfunctionen (die Fourier'schen Reihen) oder Kugel- oder auch Bessel'sche Functionen etc. sind. Diese Entwickelungen behandeln wir in den folgenden Paragraphen eine jede für sich.

§ 2. Die Entwickelung in Fourier'sche Reihen.

Eine Reihe vom Typus

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{ a_k \sin(kz) + b_k \cos(kz) \}$$

heisst *eine trigonometrische Reihe.*

Sind speciell die Coefficienten durch die Formeln

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\, d\alpha,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos(k\alpha)\, d\alpha,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin(k\alpha)\, d\alpha$$

bestimmt, in denen $f(\alpha)$ die durch die Reihe dargestellte Function bezeichnet, so ergibt sich eine *Fourier'sche Reihe.* Man glaubte Anfangs, alle trigonometrischen Reihen seien Fourier'sche; später erkannte man, dass es nicht der Fall ist, vergl. z. B. Heine, *Trigonometrische Reihen, Crelle,* 71, 1870.

Man pflegt zu sagen, eine Function erfülle *die Dirichlet'schen Bedingungen,* wenn sie in einem Intervall immer endlich ist, keine unendlich grosse Anzahl gewöhnlicher Unstetigkeiten und keine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima hat.

Es gilt dann das (Dirichlet'sche) Theorem:

Jede Function $f(z)$, welche den Dirichlet'schen Bedingungen genügt, lässt sich in eine Fourier'sche Reihe entwickeln, deren Werth in jedem gewöhnlichen Punkt dem Werth der Function gleich kommt, und in jedem Punkt gewöhnlicher Unstetigkeit das Mittel aus jenen beiden Grenzwerthen zur Rechten und zur Linken ist, welche der Function bei ihrer Annäherung an den Unstetigkeitspunkt zukommen. Diese Entwickelung ist nur auf eine Art möglich, Heine, *Crelle,* 71.

Wenn die Function in einem Punkt c unendlich gross wird, so besteht die ausreichende Bedingung, damit die Reihe fortfahre, die Function darzustellen, darin, dass das Integral

$$\int_{c-\omega}^{c+\omega} f(\alpha)\, d\alpha$$

convergire, Dirichlet, Du Bois-Reymond, *Crelle,* 79, 1875.

Wenn die Function eine endliche Anzahl von Singularitätspunkten besitzt, in deren Umgebungen unendlich viele Punkte gewöhnlicher Unstetigkeit existiren, so gilt der Satz auch jetzt noch; jedoch liefert die Reihe den Werth der Function in einem singulären Punkt nicht, Dirichlet, Lipschitz, *Crelle,* 63, 1864.

Hat die Function eine unendlich grosse Anzahl von Maxima und Minima und erfüllt sie für jeden solchen Punkt β die Bedingung

$$\lim_{\delta=0} |f(\beta+\delta) - f(\beta)| \log \delta = 0,$$

so fährt sie fort, in Fourier'sche Reihen entwickelbar zu sein. Dieses Theorem ist von Lipschitz und die vorstehende Bedingung, *welche eine grössere Einschränkung enthält, als die Bedingung, dass die Function stetig sein soll,* heisst *die Lipschitz'sche.*

Es gibt zweifellos Functionen, welche die Lipschitz'sche Bedingung nicht erfüllen und für welche die Fourier'sche Reihe divergirt, Du Bois-Reymond, *München. Akad. Abhandl.,* 12, 1876.

Die Convergenz der Fourier'schen Reihe in einem bestimmten Punkt hängt nur von der Art ab, wie sich die Function in der Nachbarschaft des Punktes verhält, Riemann.

Es gibt integrirbare Functionen mit unendlich vielen Maxima und Minima, welche sich durch Fourier'sche Reihen nicht darstellen lassen, Riemann.

Es existiren nicht-integrirbare Functionen mit einer endlichen Anzahl von Maxima und Minima, welche durch Fourier'sche Reihen nicht ausgedrückt werden können, Riemann.

Die Fourier'sche Reihe ist gleichmässig convergent, wenn sie eine Function darstellt, welche entweder stetig oder nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unstetig ist und nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, Heine, *Crelle,* 71.

Eine endliche Function, welche zwar eine unendlich grosse Anzahl von Unstetigkeiten, aber derart besitzt, dass eine der abgeleiteten Mengen dieser Menge von unendlich vielen Punkten endlich ist, und welche sich in Fourier'sche Reihen entwickeln lässt, ist nur auf eine einzige Art in solche zu entwickeln; das Cantor'sche Theorem (Georg Cantor, *Ueber trigonometrische Reihen, Math. Ann.,* 5, 1872).

Auf welche Art auch eine Function sich durch eine trigonometrische Reihe, in welcher die Coefficienten a_k, b_k *mit dem Wachsen von* k *unendlich klein werden, darstellen lasse, jedenfalls haben die Coefficienten immer die oben für die Fourier'sche Reihe angegebene Form, so lange die Integrale, durch welche diese Coefficienten definirt werden, eine Bedeutung haben; der Du Bois-Reymond'sche Satz, Abh. der Bayrischen Ak.,* 1875.

Das Studium der Darstellung einer Function durch trigonometrische Reihen wurde durch die Integration der partiellen Differentialgleichung der Saitenschwingungen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

veranlasst, da diese Gleichung mit Hülfe einer trigonometrischen Reihe integrirt wird. Euler versuchte die Frage zu beantworten, ob sich jede Function stets durch trigonometrische Reihen darstellen lasse, und Fourier, *Mém. de l'Acad. de Paris.* 1807 glaubte sie bejahen zu können.

Die Betrachtungen Fourier's waren durchaus nicht bindend; auf ihn folgten Poisson und Cauchy; die erste wirklich exacte Arbeit über den Gegenstand verdankt man jedoch Dirichlet, 1829, *Crelle,* 4.

Später erschien dann die hervorragende Schrift Riemann's, *Habilitationsschrift.* Göttingen 1854, welcher den Gegenstand von neuen Gesichtspunkten aus zu behandeln anfing; in dem ersten Theil des Riemann'schen Werks findet man auch eine vortreffliche historische und kritische Uebersicht über alle früheren diesbezüglichen Untersuchungen. Neuer sind die schon citirten Arbeiten von Heine, Du Bois-Reymond, Lipschitz, Dini, *Ann. di mat.,* 6, 1874; Ascoli, *R. Acc. Lincei Mem.,*

1878. Bemerkenswerth ist ferner das Dini'sche Buch: *Sulla serie di Fourier,* Pisa 1880; eine gute kritische und historische Zusammenstellung aller bisherigen Resultate enthält die Abhandlung von Sachse, *Inauguraldissertation,* Göttingen 1879, die in dem *Bulletin* von Darboux, 1880 reproducirt wurde.

Dirichlet und Riemann hatten geglaubt, jede stetige Function lasse sich in jedem Punkt (ohne Ausnahme) durch eine Fourier'sche Reihe darstellen; Du Bois-Reymond hat zuerst nachgewiesen, dass diese Annahme irrig ist. Ein recht einfaches Beispiel dafür von Schwarz findet man in dem letzten Theil der citirten Arbeit von Sachse.

Auch die trigonometrischen Reihen mit zwei Variabelen und die Darstellbarkeit der Functionen mit ihrer Hülfe hat man studirt; siehe z. B. Ascoli, *Serie trigonom. a due variabili, R. Acc. Lincei Atti,* 1879, 1880.

§ 3. Die Entwickelung einer Function in Reihen von Legendre'schen Kugelfunctionen.

Jede eindeutige Function $f(z)$, welche in dem Innern einer Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 endlich und stetig ist, lässt sich in eine Reihe von dem Typus

$$f(z) = \alpha_0 P^{(0)}(z) + \alpha_1 P^{(1)}(z) + \cdots$$

entwickeln, in welcher die α durch die Formel

$$\alpha_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P^{(n)}(x)\, dx \quad \textit{gegeben sind.}$$

Diese Entwickelung ist nur auf eine einzige Art möglich.

Jede eindeutige Function $f(z)$, welche in dem Innern eines elliptischen, von zwei Ellipsen mit denselben Brennpunkten ± 1 begrenzten Rings endlich und stetig ist, lässt sich in eine Reihe von dem Typus

$$f(z) = \alpha_0 P^{(0)}(z) + \alpha_1 P^{(1)}(z) + \cdots + \beta_0 Q^{(0)}(z) + \beta_1 Q^{(1)}(z) + \cdots$$

entwickeln, welche für alle Punkte des Rings gilt. Die Coefficienten α und β sind durch die Formeln

$$\alpha_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(z)\, Q^{(n)}(z)\, dz,$$

$$\beta_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(z)\, P^{(n)}(z)\, dz \quad \textit{bestimmt.}$$

Die Potenz z^n wird durch Kugelfunctionen auf die folgende Art dargestellt:

$$z^n = \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\Big\{(2n+1)P^{(n)} + (2n-3)\frac{2n+1}{2}P^{(n-2)} + $$
$$+ (2n-7)\frac{(2n+1)(2n-1)}{2\cdot 4}P^{(n-4)} + \cdots\Big\}, \text{Legendre, 1784.}$$

Analog ist die Formel:

$$\frac{1}{z^{n+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}\Big\{(2n+1)\,Q^{(n)}(z) -$$
$$- (2n+5)\frac{2n+1}{2}\,Q^{(n+2)}(z) +$$
$$+ (2n+9)\frac{(2n+1)(2n+3)}{2\cdot 4}\,Q^{(n+4)}(z) - \cdots\Big\}.$$

Bemerkenswerth sind die folgenden Entwickelungen, Bauer, *Coefficienten der Reihen v. Kugelfunct. einer Variab., Crelle,* 56, 1859:

$$\frac{2}{\pi\sqrt{1-z^2}} = P^{(0)} + 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 P^{(2)} + 9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 P^{(4)} + \cdots,$$

$$\frac{8}{\pi}\arcsin z = 3P^{(1)} + 7\left(\frac{1}{4}\right)^2 P^{(3)} + 11\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 P^{(5)} + \cdots,$$

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{1-z^2} = \frac{1}{2}P^{(0)} - 5\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 P^{(2)} -$$
$$- 9\cdot\frac{3}{6}\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 P^{(4)} - 13\cdot\frac{5}{8}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 P^{(6)} - \cdots.$$

Die Entwickelungen von $\sin n\theta$ und $\cos n\theta$ mit Hülfe von Kugelfunctionen lauten, wie folgt; vergl. Heine, *Kugelf.,* 1, S. 86 u. ff.; Most, *Die Different.-Quotienten der Kugelfunct., Crelle,* 70, 1869:

$$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{2\cdot 4\cdots(2n-2)}{1\cdot 3\cdots(2n-3)}\sin n\theta = (2n-1)\,P^{(n-1)}(\cos\theta) +$$
$$+ (2n+3)\frac{(n-1)^2-n^2}{(n+2)^2-n^2}P^{(n+1)}(\cos\theta) +$$
$$+ (2n+7)\frac{\{(n-1)^2-n^2\}\,\{(n+1)^2-n^2\}}{\{(n+2)^2-n^2\}\,\{(n+4)^2-n^2\}}P^{(n+3)}(\cos\theta) + \cdots,$$

$$2\cdot\frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\cos n\theta = (2n+1)\,P^{(n)}(\cos\theta) +$$
$$+ (2n-3)\frac{n^2-(n+1)^2}{n^2-(n-2)^2}P^{(n-2)}(\cos\theta) +$$
$$+ (2n-7)\frac{\{n^2-(n+1)^2\}\,\{n^2-(n-1)^2\}}{\{n^2-(n-2)^2\}\,\{n^2-(n-4)^2\}}P^{(n-4)}(\cos\theta) + \cdots.$$

§ 4. Die Entwickelung einer Function der Punkte einer Kugel in Reihen von Laplace'schen Kugelfunctionen.

Es liege eine Kugel vom Radius 1 vor, und einer ihrer Punkte sei durch die beiden Polarcoordinaten θ (von 0 bis π) und φ (von 0 bis 2π) individualisirt.

Eine Function von θ, φ pflegt man *eine Function der Punkte der Kugel oder eine Function zweier Winkel* zu nennen.

Jede Function $f(\theta, \varphi)$, welche für alle Punkte der Kugel endlich und stetig ist oder nur in einer endlichen Anzahl von Punkten oder Linien Unstetigkeiten hat, lässt sich in eine Reihe von Laplace'schen Kugelfunctionen von der Form

$$f(\theta, \varphi) = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)} + \cdots$$

entwickeln, worin

$$Y^{(n)} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} d\theta_1 \sin\theta_1 \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \varphi_1)\, P^{(n)}(\cos\gamma)\, d\varphi_1$$

und

$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta_1 + \sin\theta \sin\theta_1 \cos(\varphi - \varphi_1) \text{ ist.}$$

Diese Reihe gilt für jeden Punkt der Kugel, vorausgesetzt, dass die Function auch in dem diametral gegenüberliegenden Punkt stetig ist und auf den durch den Punkt gehenden grössten Kreisen eine endliche Anzahl von Maxima und Minima hat. Man kann den Geltungsbereich der Reihe auch auf den Fall ausdehnen, in welchem die Anzahl der Maxima und Minima nicht endlich ist; alsdann werden aber andere Bedingungen nöthig, auf deren Einzelheiten wir hier nicht eingehen.

Die Untersuchungen, von denen hier die Rede ist, hat Poisson begonnen, *Journ. Éc. polyt.*, Hft. 19, 1823; *Théorie mathématique de la chaleur,* Paris 1835, S. 212; später beschäftigte sich Dirichlet, *Crelle,* 17, 1837 mit ihnen, der einen Irrthum in dem Beweis Poisson's aufdeckte. Weitere Fortschritte verdankt man Bonnet, *Journ. de Liouville,* 17, 1852. Kronecker, vergl. Heine, *Kugelfunct.,* 1, S. 434 und Dini, *Ann. di mat.,* 6, 1874 hielten auch die Beweise Dirichlet's nicht für völlig zufriedenstellend.

§ 5. Die Entwickelung einer Function in Reihen von Bessel'schen Functionen.

Jede eindeutige Function $f(z)$, welche in dem Innern eines Kreises, der zum Centrum den Punkt Null hat, endlich und stetig ist, lässt sich in eine Reihe

$$f(z) = \alpha_0 J^{(0)}(z) + \alpha_1 J^{(1)}(z) + \alpha_2 J^{(2)}(z) + \cdots$$

entwickeln, die für alle Punkte des Kreises gilt. Die Coefficienten α sind durch

$$\alpha_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i}\int f(z)\, O^{(n)}(z)\, dz$$

bestimmt, worin die Integration in positivem Sinn längs des Kreisumfangs auszuführen ist; eine solche Reihe lässt sich gliedweise differenziren.

Jede eindeutige, in dem von zwei concentrischen Kreisen mit dem Centrum Null eingeschlossenen ringförmigen Raum endliche und stetige Function kann in eine Reihe von der Form

$$f(z) = \alpha_0 J^{(0)}(z) + \alpha_1 J^{(1)}(z) + \cdots + \beta_0 O^{(0)}(z) + \beta_1 O^{(1)}(z) + \cdots$$

entwickelt werden, die für alle Punkte des Rings gültig ist; die Coefficienten α, β sind durch

$$\alpha_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i}\int f(z)\, O^{(n)}(z)\, dz,$$

$$\beta_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i}\int f(z)\, J^{(n)}(z)\, dz$$

gegeben, worin die beiden Integrationen in positivem Sinn über eine geschlossene in dem Ring enthaltene Curve zu erstrecken sind, welche den Nullpunkt umgibt.

Als specielle Fälle dieser Entwickelungen sind die folgenden zu merken:

$$\cos z = J^{(0)}(z) - 2J^{(2)}(z) + 2J^{(4)}(z) - \cdots,$$

$$\sin z = 2J^{(1)}(z) - 2J^{(3)}(z) + 2J^{(5)}(z) - \cdots,$$

$$1 = J^{(0)}(z) + 2J^{(2)}(z) + 2J^{(4)}(z) + \cdots,$$

$$\tfrac{1}{2} z = J^{(1)}(z) + 3J^{(3)}(z) + 5J^{(5)}(z) + \cdots,$$

$$J^{(0)}(c+z) = J^{(0)}(c)\, J^{(0)}(z) - 2J^{(1)}(c)\, J^{(1)}(z) + \\ + 2J^{(2)}(c)\, J^{(2)}(z) - \cdots.$$

Stellt man die Functionen $\cos(z \sin\omega)$, $\sin(z \sin\omega)$ *durch Fourier'sche Reihen dar, so sind die Coefficienten der Sinus und Cosinus Bessel'sche Functionen.*

Wenn eine Function $f(z)$ *für reelle, zwischen* 0 *und* π *liegende* z *endlich und stetig ist, und stets eine endliche Derivirte hat, so lässt sie sich mittelst der Formel entwickeln:*

$$f(z) = f(0) + \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 J^{(0)}(z) + A_2 J^{(0)}(2z) + \\ + A_3 J^{(0)}(3z) + \cdots,$$

worin

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mu \cos(n\mu)\, d\mu \int_0^1 \frac{f'(\mu t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \quad \textit{ist.}$$

Bezüglich des Inhaltes dieses und der vorigen Paragraphen führen wir ausser den bereits citirten Arbeiten auch das Werk Carl Neumann's an: *Ueber die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunctionen fortschreitende Entw. etc.*, Leipzig 1881.

Kapitel XX.

Theorie der ganzen, rationalen oder complexen Zahlen.

§ 1. Die Theilbarkeit der rationalen ganzen Zahlen. Die Primzahlen.

Eine ganze Zahl ist durch eine andere ganze Zahl *theilbar*, wenn der bei der Division der einen durch die andere bleibende Rest Null ist.

Die Primzahlen sind nur durch sich selbst und durch die Einheit theilbar.

Jede ganze Zahl lässt sich nur auf eine Art in ein Product einer endlichen Anzahl von Primfactoren zerlegen.

Wenn eine in ihre Primfactoren zerlegte Zahl N

$$\alpha^m \cdot \beta^n \cdots$$

ist, so beträgt die Summe aller ihrer Theiler, die prim und nichtprim sind:

$$\frac{\alpha^{m+1}-1}{\alpha-1} \cdot \frac{\beta^{n+1}-1}{\beta-1} \cdots,$$

und die Anzahl dieser Theiler ist:

$$(m+1)(n+1)\cdots.$$

Die Zahl N des vorstehenden Theorems lässt sich auf

$$\tfrac{1}{2}(m+1)(n+1)\cdots$$

oder

$$\tfrac{1}{2}(m+1)(n+1)\cdots+\tfrac{1}{2}$$

verschiedene Arten in zwei Factoren zerlegen, je nachdem wenigstens einer der Exponenten m, n, $\cdots$ ungerade ist, oder keiner.

Zwei Zahlen heissen *prim zu einander*, wenn sie zum gemeinschaftlichen Theiler nur die Einheit haben.

Mit dem Symbol $\varphi(N)$ bezeichnet man die Anzahl der zu N primen Zahlen, welche kleiner als N sind.

Es besteht die Beziehung (Euler)

$$\varphi(N) = N\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)\cdots,$$

worin α, β, $\cdots$ *die von einander verschiedenen Primtheiler von* N *bedeuten.*

Wenn N, N' *prim zu einander sind, so ist:*

$$\varphi(NN') = \varphi(N)\,\varphi(N').$$

Nimmt z *nacheinander alle Werthe der Theiler von* N *an, so ist* $\sum\varphi(z) = N$.

Wenn $N = N_1 + N_2 + \cdots$ *ist, und* N, N_1, N_2, $\cdots$ *ganze Zahlen sind, so wird der Ausdruck*

$$\frac{N!}{N_1!\,N_2!\cdots} \quad \textit{eine ganze Zahl.}$$

Ist p *eine Primzahl, so ist die höchste in* $N!$ *enthaltene Potenz von* p *gleich* $N' + N'' + N''' + \cdots$, *wenn* N' *die ganze Zahl des Bruches* $\frac{N}{p}$, N'' *die des Bruches* $\frac{N'}{p}$ *u. s. w. bedeutet.*

Bemerkenswerth ist das Dirichlet'sche Theorem (*Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte etc., Abh. Berl. Akad.*, 1837):

Jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erster Term und deren Differenz prim zu einander sind, enthält unendlich viele Primzahlen.

Einen Beweis dieses Satzes findet man auch bei Vallée-Poussin, *Démonstration simplifiée du théor. de Dirichlet* etc., Paris, Hermann, 1896.

Andere Theoreme über die Primzahlen und die zusammengesetzten Zahlen sind die folgenden:

Jede Primzahl mit Ausnahme von 2 *und* 3 *hat die Form* $6n \pm 1$.

Soll $2^m + 1$ *eine Primzahl sein, so muss* m *eine Potenz von* 2 *sein.*

Deshalb lässt sich aber nicht behaupten, dass alle Zahlen von der Form $2^{2^n} + 1$, wie Fermat geglaubt hat, Primzahlen seien; für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ erhält man die Primzahlen 3, 5, 17, 257, 65 537, für $n = 5$ dagegen die Zahl

$$2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297,$$

welche sich durch 641 theilen lässt.

Soll $2^{2^n}+1$ *eine Primzahl sein, so ist es nothwendig und ausreichend, dass sie die Zahl*

$$3^{2^{2^n}}+1 \quad \textit{theile} \ \text{(Lucas)}.$$

Damit 2^p-1 *eine Primzahl sei, ist es nothwendig, dass es auch* p *sei. Die Bedingung ist jedoch nicht ausreichend, da z. B.* $2^{11}-1=23\times 89$ *ist.*

Die ungeraden Theiler von $2^{2^n}+1$ *haben die Form*

$$2^{n+1}q+1.$$

Die ungeraden Primfactoren einer Zahl von der Form $a^{2n+1}-1$ *oder* $a^{2n+1}+1$, *worin* $2n+1$ *eine Primzahl bedeutet, haben entweder die Form* $2(2n+1)q+1$ *oder sind Theiler von* $a-1$ *bez.* $a+1$.

Wenn p *eine ungerade Zahl ist, die* a^m+1 *theilt, so lässt sich* p *durch die Form* $2\omega q+1$ *ausdrücken, in welcher* ω *ein Theiler von* m *mit Einschluss von* 1 *ist. Ferner ist die Zahl* $\frac{m}{\omega}$ *ungerade und prim zu* q *und* p *ein Theiler von* $a^\omega+1$.

Die Beweise eines Theils dieser Sätze hängen von der Theorie der Congruenzen ab, die in den folgenden Paragraphen behandelt wird.

Soll eine ungerade Zahl prim sein, so ist es nothwendig und ausreichend, dass sie auf eine einzige Art der Differenz der Quadrate zweier ganzen Zahlen gleich sei.

Keine Zahl (mit Ausnahme von 5) von der Form a^4+4 *ist prim* (Sophie Germain).

Wenn $2a$ *grösser als* 7 *ist, so gibt es wenigstens eine Primzahl, welche zwischen* a *und* $2a-2$ *liegt.* Das Tschebyscheff'sche Theorem, *Liouville's Journ.*, 17, 1852; *Bull. phys. math. Acad. St. Pétersb.*, 1850. Daraus folgt:

Das Product der n *ersten ganzen Zahlen kann einer Potenz einer ganzen Zahl oder dem Product von Potenzen ganzer Zahlen nicht gleich sein,* Liouville, *Liouville's Journ.*, 2. Serie, 2, S. 277.

Vollkommen wird die Zahl genannt, welche der Summe aller ihrer Theiler mit Ausnahme der Zahl selbst gleich ist.

Die bis jetzt bekannten vollkommenen Zahlen ergeben sich aus der Formel (welche einer schon von Euclid gefundenen Methode entspricht): $E_p=2^{p-1}(2^p-1)$, *wenn der zweite Factor prim ist.* Sie werden desshalb auch *die Euclid'schen Zahlen* genannt.

Es existiren keine anderen geraden vollkommenen Zahlen als die in der Euclid'schen Formel enthaltenen.

Bis jetzt kennt man noch keine ungeraden vollkommenen Zahlen.

Die zur Zeit bekannten vollkommenen Zahlen entsprechen den folgenden neun Werthen von p:

$$p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61.$$

Die acht ersten sind

6
28
496
8128
335 50336
85898 69056
13 74386 91328
2305 84300 81399 52128.

Lucas behauptet, bewiesen zu haben, dass die Werthe $p = 67$ und $p = 89$ keine vollkommenen Zahlen liefern, *Théorie des nombres,* 1, S. 376. Ueber diese vollkommenen oder Euclid'schen Zahlen siehe auch Studnička, *Sitz.-Bericht der Bömisch. Gesellsch.,* Prag 1899.

Zwei Zahlen heissen *befreundet,* lateinisch *amicabiles,* wenn jede von ihnen der Summe der Theiler der anderen mit Ausnahme der Zahl selbst gleich ist.

Das erste Paar befreundeter Zahlen hat Michael Stifel gefunden, der zur Zeit Luther's lebte. Es sind die Zahlen

220, 284.

Schooten, *Exercit. mathem.* entdeckte dann zwei andere Paare

17 296, 18 416
9 363 584, 9 437 056.

Später beschäftigte sich Euler mit ihnen und gab Regeln über sie an; *Acta Erudit.,* 1747; *Opuscula varii argum.,* 1750, 2, S. 23. Er stellte eine Tabelle von 61 Paaren befreundeter Zahlen zusammen. Siehe die *Commentationes arithmeticae collectae Leonhardi Euleri,* Petrop. 1849, die von der Petersburger Academie herausgegeben wurden, Bd. 1, S. 102; Bd. 2, S. 627, 637. In diesem Werk ist auch ein sonst nicht erschienener Aufsatz Euler's über die befreundeten Zahlen abgedruckt.

Ein anderes in der Euler'schen Tafel nicht enthaltenes Paar hat Paganini in Genua gefunden

1184, 1210;

vergl. die von Cremona besorgte italienische Uebersetzung der Baltzer'schen Mathematik, Thl. 2.

Ueber die befreundeten Zahlen sehe man auch die in Lucas, *Théor. des nombres,* Paris 1891, 1, S. 380 enthaltenen Angaben nach.

Ein Problem, das zu vielen Untersuchungen Veranlassung gab, besteht in der Ermittelung der Anzahl von Primzahlen, die kleiner als eine gegebene Zahl sind, oder zwischen zwei gegebenen Zahlen liegen.

Euler, *Mém. Berlin,* 1772, S. 36 hatte die Formel $x^2 + x + 41$ gefunden, welche für $x = 0, 1, 2, \cdots$ vierzig auf einander folgende Primzahlen liefert; ähnliche Formeln sind $x^2 + x + 17$, $2x^2 + 29$, für welche die ersten 17 bez. 29 Zahlen prim sind.

Legendre, *Essai sur la théorie des nombres,* Paris 1798, 2. édit., 1808, 3. édit., 1830 suchte eine *Annäherungsformel* für den Werth derjenigen Function zu ermitteln, welche die Anzahl der Primzahlen darstellt, die kleiner als eine gegebene Zahl x sind. Bezeichnet man diese Anzahl mit $\varphi(x)$, so erhält man für sehr grosse x mit hinreichender Genauigkeit

$$\varphi(x) = \frac{x}{\log x - 1{,}08366}.$$

Von Riemann (*Werke,* S. 136) existirt eine specielle Arbeit über dieselbe Frage; er wollte den Werth der Function $\varphi(x)$ *genau* ausfindig machen; seine Formel ist sehr complicirt. Mit dem nämlichen Problem haben sich Gauss, *Werke,* 2, S. 435—447; Dirichlet, *Abh. Berl. Acad.,* 1838; Tschebyscheff, *Liouville's Journ.,* 17 beschäftigt; vergl. auch seine *Theorie der Congruenzen,* Anhang 3.

Andere hierher gehörige Arbeiten sind von Curtze, *Sur la série de Lambert et la loi des nombres premiers, Ann. di mat.,* 1, 1867; Meissel, *Math. Ann.,* 2, 3, 21, 23, 25, welcher die Anzahl der Primzahlen für die ersten tausend Millionen der natürlichen Zahlen berechnet hat; Mertens, *Crelle,* 78, 1874; Jonquières, *Compt. Rend.,* 95, 1882; Lipschitz, ib., 95, 96, 1882, 1883; Piltz, *Diss.,* Jena 1884; Poincaré, *Compt. Rend.,* Bd. 5, S. 113; v. Mangoldt, *Berl. Ak.,* 1894; *Ann. École norm.,* 1896; Cahen, *Compt. Rend.,* 1893; *Ann. Éc. norm.,*

1894; Levi-Civita, *Lincei*, 1895; Vallée-Poussin, *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*, Paris 1896; *Sur la fonction* ζ *de Riemann* etc., *Mém. de l'Ac. de Belgique*, Bd. 59, Bruxelles 1899; Schapira, *Jahresber. der deutsch. math. Vereinigung*, 5, S. 69. Wir verweisen auch auf die *Zahlentheorie* von Bachmann, Leipzig 1894, Bd. 2, Kap. 12.

Einige einfache Sätze über dieses Problem sind:

Die Grenze des Ausdrucks $\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$ *für* $x = \infty$ *ist* -1 (Tschebyscheff).

Der Werth des Integrals

$$\int_2^x \frac{dx}{\log x}$$

drückt den Werth von $\varphi(x)$ *mit um so grösserer Genauigkeit aus, je grösser* x *ist.* Diese Formel liefert bei der angenäherten Berechnung $\varphi(x)$ viel genauer als die oben citirte Legendre'sche. Sie findet sich schon bei Gauss, a. a. O., S. 444.

Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der Primzahlen zwischen 1 und 100, 101 und 200, etc. an.

Zwischen		und		liegen		Primzahlen
	1		100		25	
„	101	„	200	„	21	„
„	201	„	300	„	16	„
„	301	„	400	„	16	„
„	401	„	500	„	17	„
„	501	„	600	„	14	„
„	601	„	700	„	16	„
„	701	„	800	„	14	„
„	801	„	900	„	15	„
„	901	„	1000	„	14	„
„	1	„	1000	„	168	„
„	1001	„	2000	„	135	„
„	2001	„	3000	„	127	„
„	3001	„	4000	„	120	„
„	4001	„	5000	„	119	„
„	5001	„	6000	„	114	„
„	6001	„	7000	„	117	„
„	7001	„	8000	„	107	„
„	8001	„	9000	„	110	„
„	9001	„	10 000	„	112	„
„	1	„	1 000 000	„	78 498	„
„	1	„	100 000 000	„	5 761 455	„

Eine ähnliche bei weitem ausgedehntere Tabelle der *Frequenz der Primzahlen* befindet sich in dem 2. Bd. der Gauss'schen Werke; dort wird die Anzahl der Primzahlen in den verschiedenen Intervallen von Tausend zu Tausend bis zu dem tausendsten Intervall d. h. bis 1 000 000 angegeben. Doch muss man diese Tabelle nach den Angaben von Meissel, *Math. Ann.*, 2, S. 636 corrigiren. Tabellen der Theiler der Zahlen für die erste und die zweite Million mit den dazu gehörigen Primzahlen sind von Chernac, 1811 und Burkhardt, Paris 1814 aufgestellt worden, vergl. Gauss, *Werke*, 2, S. 181—183. Die Burkhardt'sche Zusammenstellung bedarf der Correctur, siehe z. B. Meissel a. a. O. Schliesslich citiren wir noch Vega, *Sammlung math. Tafeln* publ. 1796, umgearb. von Hülsse, Leipzig 1840.

Mit dem vorstehenden Problem hängt ein anderes eng zusammen, das sich auf die Function μ von Mertens bezieht, *Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, Crelle*, 77, 1874.

Unter $\mu(n)$ versteht man die positive oder negative Einheit, je nachdem n das Product einer geraden oder ungeraden Anzahl von *verschiedenen* Primfactoren ist. Dabei wird vorausgesetzt, dass immer $\mu(1) = +1$ und $\mu(n) = 0$ ist, wenn n quadratische Factoren (ausser der Einheit) hat.

Ein erstes einfaches Theorem über die Function μ lautet:

Die Summe

$$\sum \mu(d)$$

ist Null, wenn sie über alle Theiler d einer beliebigen Zahl N mit Einschluss von N selbst und der Einheit erstreckt wird.

Bez. dieser Function verweisen wir auch auf Lipschitz, *Séries rélat. à la théorie d. nombres, Compt. Rend.*, 89, 1879 und auf die Darstellung von Bachmann, a. a. O.

§ 2. Ueber die Zahlenfunction $E(x)$.

Mit dem Symbol $E(x)$ (Legendre) wird die grösste rationale ganze Zahl bezeichnet, die in der reellen positiven Zahl x enthalten ist.

Es ist ferner $E_q(x)$ (Hermite) das Symbol für den Ausdruck

$$E_q(x) = \frac{E(x)\,E(x+1)\cdots E(x+q-1)}{q!}.$$

Die Function E ist offenbar unstetig. Bemerkenswerth ist, *dass dagegen die Function*

$$\varphi(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$$

für reelle positive x stetig ist.

Diese letztere Function wurde von Schwarz dazu benutzt, eine Function zu construiren, die in unendlich vielen Punkten keine Derivirte hat. Vergl. Pascal, *Note critiche di calcolo,* Mailand 1895.

Für die Function E gelten die folgenden Formeln:

$$\sum_{r=1}^{m-1} E\left(x + \frac{r}{m}\right) = E(mx) - E(x), \quad \text{Hermite,}$$

$$\sum_{r=1}^{m-1} (m-r)\left\{E_2\left(x+\frac{r}{m}\right) + E_2\left(x-\frac{r}{m}\right)\right\} = E_2(mx) - mE_2(x), \quad \text{Hermite,}$$

$$\sum_{r=1}^{m-1} E\left(nx - \frac{rn}{m}\right) - \sum_{s=1}^{n-1} E\left(mx - \frac{sm}{n}\right) = m - n, \quad \text{Stern,}$$

$$\sum_{r=1}^{m-1}\left\{E_2\left(x + \frac{r}{m}\right) - E_2\left(x - \frac{r}{m}\right)\right\} = \sum_{r=1}^{m-1} E\left(x + \frac{r}{m}\right), \quad \text{Stern.}$$

Von Arbeiten über die Function $E(x)$ citiren wir Liouville, *Journ. de math.,* (2), 2, S. 280; Hermite, *Acta math.,* 5, S. 315; ib., 8, *correction;* Stern, ib., 8, 10; *Crelle,* 102; Pringsheim, *Math. Ann.,* 26, der den Versuch machte, die Function $E(x)$ in trigonometrische Reihen zu entwickeln, und schliesslich eine neuere Arbeit von Bertolani, *Giorn. di Batt.,* 34, 1895.

§ 3. Allgemeines über die Congruenzen.

Man sagt, zwei Zahlen α, β seien *einander nach dem Modul n congruent,* wenn ihre Differenz durch n theilbar ist.

Um anzugeben, dass α und β einander congruent seien, benutzt man das Symbol

$$\alpha \equiv \beta \pmod{n}$$

und sagt, es stelle *eine Congruenz* vor.

Alle Zahlen lassen sich bez. eines Moduls n in n *Classen* (Gauss) theilen, indem man in jede Klasse alle diejenigen unterbringt, welche einander nach dem Modul n congruent sind.

Die Zahlen $0, 1, 2, \cdots, n-1$ lassen sich als Repräsentanten einer jeden dieser n Classen ansehen.

Jede Zahl einer Classe ist mit jeder Zahl einer anderen Classe nicht congruent (incongruent).

Ein System von n Zahlen, von denen jede aus einer anderen Classe genommen ist, z. B. das System $0, 1, 2, \cdots, n-1$, bildet *ein vollständiges System von nicht congruenten Zahlen, oder ein vollständiges System von Resten in Bezug auf den Modul* n.

Zwei einer dritten nach demselben Modul congruente Zahlen sind einander nach diesem Modul congruent.

Zwei oder mehr Congruenzen mit demselben Modul können gliedweise addirt, subtrahirt und multiplicirt werden; die beiden Seiten einer Congruenz darf man mit derselben Zahl multipliciren.

Die beiden Seiten einer Congruenz kann man durch einen gemeinschaftlichen Factor k *dividiren, wenn er zu dem Modul* n *prim ist; ist dagegen* k *nicht relativ prim zu dem Modul* n, *so kann man aus der Congruenz*

$$\alpha k \equiv \beta k \pmod{n}$$

nur schliessen

$$\alpha \equiv \beta \quad \left(\text{mod.}\ \frac{n}{\delta}\right),$$

wobei δ *der grösste gemeinschaftliche Theiler von* n *und* k *ist.*

Wenn α *prim zu dem Modul* n *ist und man mit* $\varphi(n)$ *die Anzahl der Zahlen bezeichnet, die kleiner als* n *und prim zu* n *sind, so ist*

$$\alpha^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}, \quad \text{(Euler)}.$$

Wenn $n = p^k$ *ist,* p *eine Primzahl bedeutet, und* α *durch die Primzahl* p *nicht theilbar ist, so erhält man:*

$$\alpha^{(p-1)p^{k-1}} \equiv 1 \pmod{p^k}$$

und für $k = 1$ (den Fermat'schen Satz):

Wenn α *durch die Primzahl* p *nicht theilbar ist, so wird*

$$\alpha^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Bezeichnet p *wieder eine Primzahl, so gilt der Wilson'sche Satz*

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Versteht man unter dem Symbol f eine rationale Function mit ganzzahligen Coefficienten und *ist*

$$\alpha \equiv \beta \pmod{n},$$

so ist auch

$$f(\alpha) \equiv f(\beta) \pmod{n}.$$

Es seien $f(x)$, $F(x)$ Polynome in x mit rationalen ganzen Coefficienten. Ist alsdann ein Modul n festgesetzt, so kann man die Frage aufwerfen: *Welche rationalen, ganzen Werthe von x liefern, in f und F substituirt:*

$$f(x) \equiv F(x) \pmod{n}?$$

Bringt man die verschiedenen Terme von F auf die linke Seite und schliesst sie in das Symbol f ein, *so lässt sich der vorstehenden Congruenz immer die Form geben*

$$f(x) \equiv 0 \pmod{n}.$$

Auf diese Art bietet sich das Problem der *Auflösung der Congruenzen*, welches dem der Auflösung der Gleichungen analog ist. Je nach dem Grad von f gibt es Congruenzen 1ten, 2ten, $\cdots$ Grads.

Wenn $x = \alpha$ der Congruenz $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$ genügt, so gilt dies auch für jede mit α nach dem Modul n congruente Zahl.

Aus diesem Theorem folgt, dass eine Congruenz, welche eine Auflösung hat, ihrer immer unendlich viele besitzt; wir betrachten daher zwei einander congruente Auflösungen nicht als verschieden und ziehen den Schluss: *Eine Congruenz kann höchstens nur so viele als verschieden aufzufassende Lösungen haben, als Classen von Zahlen nach dem Modul n vorhanden sind.*

Ist ferner n eine Primzahl, so ist die grösste Anzahl verschiedener Lösungen, welche die Congruenz $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$ haben kann, durch den Grad des Polynoms f gegeben, wenn dieser kleiner als n ist.

Wenn der Modul n eine Primzahl ist, $n = p$, so lässt sich die Auflösung von $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ auf die von $R(x) \equiv 0 \pmod{p}$ zurückführen, worin $R(x)$ ein Polynom vom $(p-1)^{\text{ten}}$ Grad und der Rest ist, welcher bei der Division von $f(x)$ durch $x^p - x$ übrig bleibt.

§ 4. Congruenzen ersten Grads.

Die Congruenz $ax - b \equiv 0 \pmod{n}$ hat immer eine Auflösung, wenn a und n prim zu einander sind.

Ist n eine Primzahl, $n = p$, so ist die Auflösung der Congruenz durch $x \equiv ba^{p-2} \pmod{p}$ gegeben.

Ist n dagegen eine zusammengesetzte Zahl, so ist die Auflösung der obigen Congruenz $x \equiv b a^{\varphi(n)-1} \pmod{n}$, worin $\varphi(n)$ die Anzahl der Zahlen angibt, die kleiner als n und prim zu n sind.

Haben a und n einen gemeinsamen Theiler, so ist, damit die Congruenz $ax - b \equiv 0 \pmod{n}$ eine Auflösung besitze, nothwendig und hinreichend, dass der grösste gemeinsame Theiler von a und n auch ein Theiler von b sei. Ist d der grösste gemeinschaftliche Theiler von a und n und zugleich auch ein Theiler von b, so hat die Congruenz d Auflösungen, nämlich:

$$x \equiv \alpha, \quad x \equiv \alpha + \frac{n}{d},$$

$$x \equiv \alpha + \frac{2n}{d}, \cdots, x \equiv \alpha + \frac{(d-1)n}{d}, \quad \pmod{n},$$

worin α die Wurzel der Congruenz

$$\frac{a}{d} x - \frac{b}{d} \equiv 0 \left(\text{mod.}\ \frac{n}{d}\right) \text{ bedeutet.}$$

Man nennt *lineare binäre Zahlenform* jeden Ausdruck von dem Typus $ax - ny$, worin a und n ganze Zahlen sind. Die Darstellung der ganzen Zahl b durch die Form $ax - ny$ oder die Auflösung der Gleichung (der sogenannten *unbestimmten Gleichung* 1ten *Grads*)

$$ax - ny = b$$

in ganzen Zahlen entspricht offenbar der Auflösung des Problems, von welchem in diesem Paragraphen die Rede ist.

§ 5. Congruenzen zweiten Grads. Quadratische Reste.

Wenn in der Congruenz zweiten Grads

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{n}$$

a durch n theilbar ist, so reducirt sie sich auf eine Congruenz ersten Grads, wenn man von der linken Seite den Term mit x^2 abzieht.

Auch für $n = 2$ lässt sich die Congruenz 2ten Grads

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{n}$$

auf eine ersten Grads zurückführen, deren linke Seite sich ergibt, indem man den Rest berechnet, der bei der Division von $ax^2 + bx + c$ durch $x^2 - x$ übrig bleibt. (Vergl. § 3.)

Die Auflösung der Congruenz

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p},$$

worin p eine Primzahl bedeutet, die kein Theiler von a und verschieden von 2 ist, lässt sich auf diejenige der Congruenz

$$z^2 \equiv (b^2 - 4ac) \pmod{p}$$

reduciren, in welcher z mit x durch die Relation verbunden ist:

$$2ax + b = z.$$

Setzt man $b^2 - 4ac = q$, so gilt der Satz: *Wenn $q \equiv 0 \pmod{p}$ ist, so hat die vorstehende Congruenz die einzige Lösung $z \equiv 0 \pmod{p}$; ist q aber nicht congruent mit Null $(\text{mod. } p)$, so hat die Congruenz $z^2 \equiv q \pmod{p}$ entweder keine Auflösung oder sie hat ihrer zwei, je nachdem $q^{\frac{p-1}{2}}$ mit $a - 1$ oder mit $a + 1$ nach dem Modul p congruent ist.*

Falls $z^2 \equiv q \pmod{p}$ zwei Auflösungen hat, also $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1 \pmod{p}$ ist, heisst die Zahl q ein *quadratischer Rest (quadratisches Residuum) von p.*

Hat die Congruenz $z^2 \equiv q \pmod{p}$ keine Auflösung, so heisst q *quadratischer Nichtrest (Nichtresiduum)* der Primzahl p.

Ist p eine ungerade Primzahl, so beträgt die Anzahl der Reste und Nichtreste je:

$$\tfrac{1}{2}(p - 1).$$

Das Product zweier Reste ist ein Rest; das Product eines Rests und eines Nichtrests ist ein Nichtrest und das zweier Nichtreste ein Rest.

Die Zahl 1 ist immer ein Rest von p und die Zahl -1 ist entweder ein Rest oder nicht, je nachdem $\frac{p-1}{2}$ eine gerade oder ungerade Zahl ist. Anders ausgedrückt: *die Zahl -1 ist quadratischer Rest aller Primzahlen von der Form $4n + 1$ und quadratischer Nichtrest aller Primzahlen der Form $4n + 3$.*

Die Zahl 2 ist ein quadratischer Rest aller Primzahlen von den Formen $8n + 1$ und $8n + 7$ und ist ein Nichtrest der Primzahlen von den Formen $8n + 3$, $8n + 5$, Lagrange.

Zwei nach dem Modul p congruente Zahlen sind gleichzeitig Reste und Nichtreste.

Alle Theoreme über die Reste in Bezug auf einen *primen* Modul lassen sich auf einfache Art ausdrücken, wenn man das sogenannte Legendre'sche Symbol benutzt.

Bezeichnet man nämlich mit $\left(\frac{q}{p}\right)$ die Zahl $+1$ oder -1,

je nachdem q ein Rest von p ist oder nicht, so werden die vorstehenden Theoreme:

$$\textit{Für } Q = q_1 q_2 \cdots \textit{ ist } \left(\frac{Q}{q}\right) = \left(\frac{q_1}{p}\right)\left(\frac{q_2}{p}\right)\cdots.$$

$$\textit{Ferner ist } \left(\frac{1}{p}\right) = +1, \quad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Das wichtigste Theorem in der Theorie der quadratischen Reste ist unter dem Namen des *Reciprocitätsgesetzes zweier Primzahlen* bekannt:

Wenn p sowohl als q Primzahlen sind, so ist

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Dieser Satz war Euler bekannt, *Opuscula analytica,* 1, St. Petersb. 1783 (vergl. Kummer, *Abhandl. Berl. Ak.,* 1859; Kronecker, *Berl. Monatsber..* 1875), wurde aber zuerst von Legendre bewiesen, *Mém. de l'Acad. d. Par.,* 1785; später gab Gauss, *Disquisitiones arithmeticae,* Lipsiae 1807, viele verschiedene Beweise, von denen ein Theil auf der Theorie der Kreistheilungsgleichung beruht. Andere Beweise sind von Eisenstein, *Crelle,* 27; Le Besgue, *Liouville's Journ.,* 12; Kummer, *Abh. Berl. Akad.,* 1861; Zeller, *Berl. Ak. Monatsber.,* 1872; Kronecker, *ges. Werke;* etc.

In den vorstehenden Theoremen handelte es sich um *die quadratischen Reste bez. eines ungeraden Primmoduls.* Was nun den *nicht primen* Modul anlangt, so bemerken wir vorerst, dass die Definition des quadratischen Rests für ihn dieselbe bleibt, wie für den Primmodul.

Ferner gilt:

Eine Zahl q ist oder ist nicht ein quadratischer Rest der Potenz p^ω einer ungeraden Primzahl p, je nachdem sie ein quadratischer Rest von p ist oder nicht.

Die Zahl q ist ein quadratischer Rest der Potenz 2^ω, wenn entweder $\omega = 1$ ist, oder $\omega = 2$ und $q \equiv 1$ (mod. 4) oder $\omega \geqq 3$ und $q \equiv 1$ (mod. 8) ist.

Soll eine Zahl q ein quadratischer Rest einer zusammengesetzten Zahl $P = p_1 p_2 \cdots$ sein, worin $p_1, p_2, \cdots$ Prim-

zahlen bedeuten, so ist es nothwendig und ausreichend, dass sie es in Bezug auf jeden der Primfactoren

$$p_1, p_2, \cdots \text{ sei.}$$

Diesen Sätzen lässt sich auch die Fassung geben:

Die Congruenz $x^2 \equiv q \pmod{p^m}$ *lässt sich auflösen, wenn sich die Congruenz* $x^2 \equiv q \pmod{p}$ *auflösen lässt, und sie hat alsdann zwei Lösungen.*

Die Congruenz $x^2 \equiv q \pmod{2^\omega}$ *ist immer möglich, wenn* $\omega = 1$ *ist, und hat alsdann eine Wurzel; für* $\omega = 2$ *ist sie nur dann möglich, wenn* $q \equiv 1 \pmod{4}$ *ist und besitzt in diesem Fall zwei Wurzeln; für* $\omega \geq 3$ *ist sie nur möglich, wenn* $q \equiv 1 \pmod{8}$ *ist, und hat vier Wurzeln.*

Die Congruenz $x^2 \equiv q \pmod{p_1 p_2 \cdots}$ *ist möglich, wenn es* $x^2 \equiv q \pmod{p_1}$, $x^2 \equiv q \pmod{p_2}, \cdots$ *ist; sind* $p_1, p_2, \cdots$ *sämmtlich ungerade oder ist nur eine dieser Zahlen gleich* 2 *und beträgt ihre Anzahl* μ, *alsdann hat diese Congruenz* 2^μ *Auflösungen; sind zwei Factoren* $p_1, p_2, \cdots$ *gleich* 2, *so muss* $q \equiv 1 \pmod{4}$ *sein und es gibt* $2^{\mu+1}$ *Lösungen; sind schliesslich drei oder mehrere Factoren* $p_1, p_2, \cdots$ *gleich* 2, *so wird* $q \equiv 1 \pmod{8}$ *und es gibt* $2^{\mu+2}$ *Auflösungen.*

Das Legendre'sche Symbol wurde von Jacobi, *Crelle*, 30 verallgemeinert und auch in dem Fall benutzt, in welchem der Modul eine zusammengesetzte Zahl ist. Setzt man *als Definition*

$$\left(\frac{q}{P}\right) = \left(\frac{q}{p_1}\right)\left(\frac{q}{p_2}\right)\cdots,$$

so hat $\left(\frac{q}{P}\right)$ entweder den Werth $+1$ oder -1. Man kann jedoch nicht behaupten, $\left(\frac{q}{P}\right) = 1$ wäre die nothwendige und ausreichende Bedingung, damit q ein quadratischer Rest von P sei, weil nach einem oben erwähnten Theorem dazu nöthig ist, dass jedes der Symbole $\left(\frac{q}{p_1}\right)$, $\left(\frac{q}{p_2}\right)$, $\cdots$ gleich $+1$ sei und es nicht hinreicht, wenn nur ihr Product $+1$ ist.

Das Jacobi'sche Symbol $\left(\frac{q}{P}\right)$ besitzt dieselben Eigenschaften, wie das Legendre'sche bei ungeraden Primmoduln und kann, wenn man die Reciprocitätsformel zu Hülfe nimmt, welcher es ebenfalls genügt, mit Vortheil dazu benutzt werden, die Rechnung des Legendre'schen Symbols in dem Fall eines Primmoduls zu vereinfachen.

Zur Bestimmung der Wurzel der quadratischen Congruenz $x^2 \equiv q \pmod{p}$ hat man die Theorie der Indices nöthig, von welcher in § 7 die Rede sein wird.

Einen Fall gibt es allerdings, in dem man die Auflösung dieser Congruenz leicht finden kann, wenn nämlich p eine Primzahl ist und die Form $4r + 3$ hat.

Alsdann ist (wenn die Congruenz aufgelöst werden kann) eine der Lösungen der Rest α, *welcher bei der Division von* q^{r+1} *durch* p *bleibt, und die andere* $p - \alpha$.

§ 6. Binomische Congruenzen. Reste der dritten und höherer Ordnung.

Eine Congruenz von der Form

$$x^m \equiv A \pmod{p},$$

worin p *eine ungerade Primzahl bedeutet, ist nur möglich, wenn*

$$A^{\frac{p-1}{\omega}} \equiv 1 \pmod{p}$$

ist und unter ω *der grösste gemeinschaftliche Theiler von* m *und* $p - 1$ *verstanden wird.*

Die Congruenz hat dann ω *Auflösungen, die mit den Wurzeln der Congruenz*

$$x^{\omega} \equiv A^s \pmod{p}$$

identisch sind, wenn s *eine Zahl bedeutet, welche die Bedingung*

$$\frac{m}{\omega} s \equiv 1 \left(\text{mod.}\ \frac{p-1}{\omega}\right) \text{ erfüllt.}$$

Die Zahl A heisst alsdann ein *Rest* m^{ter} *Ordnung der Zahl* p.

Die Zahl $+1$ *ist stets ein Rest von der Ordnung* m *einer beliebigen Zahl* p. *Die Zahl* -1 *ist es, wenn man bei der Division von* $p - 1$ *durch* ω *(den grössten gemeinschaftlichen Theiler von* m *und* $p - 1$*) eine gerade Zahl erhält.*

Bez. der Auflösung der binomischen Congruenzen siehe unten § 7.

Analog dem bekannten Legendre'schen Symbol $\left(\frac{q}{p}\right)$ für die quadratischen Reste werden die Symbole $\left[\frac{q}{p}\right]$ bez. $\left(\!\left(\frac{q}{p}\right)\!\right)$ für die cubischen bez. biquadratischen Reste benutzt.

Um die Theorie dieser letzteren vollständig durchführen und einen dem Reciprocitätstheorem analogen Satz aufstellen

zu können, muss man das Gebiet der rationalen Zahlen durch Aufnahme der Zahlen von der Form $a + b\sqrt{-1}$ und der Form $a + b\varepsilon$ erweitern, wobei ε eine Cubikwurzel aus der Einheit bedeutet und in beiden Fällen unter a und b rationale ganze Zahlen verstanden werden. Siehe darüber und über die biquadratischen und cubischen Reste die Paragraphen 9 und 10.

§ 7. Exponentialcongruenzen. Primitive Wurzeln. Indices.

Wenn der Congruenz

$$A^x \equiv q \pmod{p},$$

worin p eine Primzahl ist und weder A noch q theilt, durch $x = \alpha$ genügt wird, so genügt ihr auch jede andere mit α nach dem Modul $p - 1$ congruente Zahl.

Die Anzahl der (einander nach dem Modul $p - 1$ nicht congruenten) Lösungen von

$$A^x \equiv q \pmod{p}$$

ist dieselbe, wie die der Congruenz

$$A^x \equiv 1 \pmod{p}.$$

Die kleinste Zahl α derjenigen Zahlen mit Ausschluss von Null, welche der Congruenz $A^x \equiv 1 \pmod{p}$ genügen, die immer wenigstens eine Lösung hat, ist ein Theiler von $p - 1$, mit Einschluss von $p - 1$; die übrigen Lösungen sind Vielfache von α.

Aus dem Fermat'schen Theorem ist bekannt, dass die Zahl $p - 1$ immer die Congruenz $A^x \equiv 1 \pmod{p}$ erfüllt; wenn nun $p - 1$ die kleinste der Zahlen ist, welche dieser Congruenz genügen, so heisst A *eine primitive Wurzel von p.*

Es gibt $\varphi(p - 1)$ zwischen 0 und $p - 1$ liegende primitive Wurzeln von p, wobei φ das zu Anfang des § 1, Kap. 20 eingeführte Symbol ist.

Wenn A eine primitive Wurzel von p ist, so hat die Congruenz $A^x \equiv q \pmod{p}$ eine einzige Auflösung.

Diese einzige zwischen 0 und $p - 1$ liegende Auflösung heisst *der Index von q* und wird mit $x = \text{ind.}\, q$ bezeichnet.

Die *Theorie der Indices* stellt sich so analog der Lehre von den Logarithmen dar; die Zahl A heisst *die Basis* des Systems der Indices. Die Theoreme über die *Indices* sind denen über die Logarithmen ähnlich.

Zwei einander congruente Zahlen haben denselben Index.

Der Index von 1 *ist Null.*

Der Index eines Products ist der Summe der Indices congruent (mod. $p - 1$).

Der Index einer Potenz ist dem Product aus dem Exponenten und dem Index der Basis der Potenz congruent (mod. $p - 1$).

Mittelst dieser Sätze lassen sich die binomischen Congruenzen (vergl. § 6) auflösen:

$$x^m \equiv q \pmod{p},$$

weil sich aus ihnen ergibt:

$$m \text{ ind. } x \equiv \text{ind. } q \pmod{p - 1}.$$

In den Tafeln für die Indices schlägt man dann ind. q auf; weil nun diese Congruenz 1ten Grads möglich ist, so muss der grösste gemeinschaftliche Theiler ω von m und $p - 1$ es auch von ind. q sein. In diesem Fall hat die Congruenz ω Auflösungen, die man auf die in § 4 angegebene Art findet.

Theoreme über die primitiven Wurzeln sind:

Eine primitive Wurzel einer Primzahl von der Form $2^{2^n} + 1$ *ist* 3.

Ist $4n + 1$ *eine Primzahl, so ist die Zahl* 2 *eine primitive Wurzel der prim vorausgesetzten Zahl* $2(4n + 1) + 1$, *und ist* $4n + 3$ *eine Primzahl, so ist* $2(4n + 3) - 1$ *eine primitive Wurzel von* $2(4n + 3) + 1$.

Eine Primzahl von der Form $4n + 1$ *hat* 2 *zur primitiven Wurzel, wenn* n *prim und* > 2 *ist.*

Jede Primzahl von der Form $4 \cdot 2^m \cdot n + 1$ *hat die Zahl* 3 *zur primitiven Wurzel, wenn* n *prim, grösser als* $\frac{9^{2^m}}{4 \cdot 2^m}$ *und* $m > 0$ *ist.*

Die *primitiven Wurzeln* und die *Indices* wurden von Jacobi in seinem *Canon arithmeticus etc.*, Regiomontani (Königsberg) 1839 berechnet (diese Arbeit befindet sich nicht in seinen gesammelten Werken). Andere Tabellen hat Crelle, *Crelle*, 9 und Kulik, ib., 45 aufgestellt, die bis zum Modul 1009 reichen. Die Kulik'schen Tafeln bis zum Modul 353 findet man auch in der italienischen Uebersetzung (Rom 1895) der *Congruenzentheorie* Tschebyscheff's. Andere bis zum Modul 199 wurden von Houël, *Formules et tables numér.*, Paris 1866 nach den

Angaben Le Besgue's, *Démonstr. de qqs formules de Jacobi et sur le „canon arithmét.“, Journ. de Liouville,* 19, 1854 berechnet. In diesen Tafeln wird überall die *ihrem absoluten Werth nach* kleinste der primitiven Wurzeln in Bezug auf den gegebenen Modul zur *Basis* genommen.

§ 8. Numerische quadratische binäre Formen.

Quadratische numerische binäre (mit zwei Variabelen) Form heisst ein Ausdruck vom Typus

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

worin a, b, c gegebene rationale ganze Zahlen und x, y ganze, aber unbestimmte oder unbekannte Zahlen sind.

Diese Form wird mit dem Symbol

$$(a,\ b,\ c) \text{ bezeichnet.}$$

Wir schliessen den Fall aus, in welchem die *Discriminante* oder *Determinante*

$$D = b^2 - ac$$

ein vollständiges Quadrat ist, weil alsdann die quadratische Form in zwei lineare Formen mit rationalen Coefficienten zerfällt.

Setzt man

$$x = \alpha x' + \beta y',$$
$$y = \gamma x' + \delta y',$$

wobei die α, β, γ, δ im Folgenden ausnahmslos als vier *ganze rationale* Zahlen aufgefasst werden sollen und ferner auch die Substitutionsdeterminante $\alpha\delta - \beta\gamma$ von Null verschieden sei, so wird dadurch die gegebene Form in eine andere mit den Coefficienten

$$a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2,$$
$$b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta,$$
$$c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2 \quad \text{transformirt.}$$

Diese Substitution wird, wie gewöhnlich, mit dem Symbol $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ bezeichnet. Nennt man D' die Determinante der transformirten Form, so ist:

$$D' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 D.$$

Je nachdem $\alpha\delta - \beta\gamma$ (die Determinante der linearen Substitution) positiv oder negativ ist, heisst die Substitution eine

eigentliche oder uneigentliche; zwei Substitutionen sind ***ähnlich,*** wenn beide entweder eigentlich oder uneigentlich sind.

Man sagt, die Form (a', b', c') sei in (a, b, c) ***enthalten,*** weil *jede durch die zweite Form darstellbare Zahl sich auch durch die erste darstellen lässt.*

Man sagt ferner, (a', b', c') sei in (a, b, c) *eigentlich* oder *uneigentlich* enthalten, je nachdem die Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ eine eigentliche oder uneigentliche ist.

Zwei Formen, die gegenseitig in einander enthalten sind, heissen *äquivalent.*

Zwei Formen sind äquivalent, wenn sie gleiche Determinanten haben und eine von ihnen in der anderen enthalten ist.

Zwei Formen heissen *eigentlich* oder *uneigentlich* äquivalent, je nachdem die Determinante der Substitution, welche die eine in die andere überführt, $+1$ oder -1 ist. Zwei Formen können gleichzeitig auf beide Arten äquivalent miteinander sein.

Bei dem Problem der Darstellung einer Zahl m durch eine quadratische Form (a, b, c) *können wir uns auf die sogenannten eigentlichen Darstellungen beschränken, d. h. auf diejenigen, in welchen x und y prim zueinander sind,* weil sich aus den eigentlichen die uneigentlichen Darstellungen leicht ableiten lassen.

Soll m durch (a, b, c) *eigentlich darstellbar sein, so muss* $D = b^2 - ac$ *ein quadratischer Rest von m sein.*

Die Theorie der Darstellbarkeit einer Zahl durch quadratische binäre Formen (welche der Lehre von den unbestimmten Gleichungen 2ten Grads mit zwei Unbekannten entspricht) lässt sich auf die Theorie der Aequivalenz dieser Formen zurückführen, vergl. Dirichlet, § 60.

Die beiden Fundamentalprobleme der Aequivalenztheorie sind:

I. *Ein Kriterium zu finden, um zu entscheiden, ob zwei gegebene Formen äquivalent sind oder nicht.*

II. *Alle Substitutionen zu ermitteln, mittelst welcher eine gegebene Form in eine andere gegebene ihr äquivalente Form transformirt wird.*

Das zweite Problem lässt sich, wenn eine dieser Substitutionen bekannt ist, auf das folgende zurückführen:

IIa. *Alle Substitutionen zu finden, mittelst welcher eine gegebene Form sich in sich selbst transformirt.*

Dieses Problem nun kann mit Hülfe der nachstehenden Sätze in ein anderes umgewandelt werden:

Wenn $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ *eine Substitution ist, durch welche die Form* (a, b, c) *mit der Determinante* D *sich in sich selbst transformirt, so ist immer*

$$\alpha = \frac{t - bu}{\sigma}, \quad \beta = -\frac{cu}{\sigma},$$

$$\gamma = \frac{au}{\sigma}, \quad \delta = \frac{t + bu}{\sigma},$$

worin σ *den grössten gemeinschaftlichen Theiler der drei Coefficienten* a, $2b$, c *bezeichnet und* t, u *zwei ganze Zahlen darstellen, die der unbestimmten (Pell'schen) Gleichung*

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2$$

genügen. Darin ist

$$D \equiv 0 \pmod{\sigma^2}$$

oder

$$4D \equiv \sigma^2 \pmod{4\sigma^2}.$$

Und umgekehrt, wenn t, u *zwei ganze Zahlen sind, welche der vorstehenden Gleichung genügen, so sind die durch die obigen Formeln gegebenen Zahlen* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *die Coefficienten einer Substitution, welche* (a, b, c) *in sich selbst transformirt.*

Dadurch wird das Problem IIa auf das folgende zurückgeführt:

IIb. *Alle Auflösungen der unbestimmten Gleichung*

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2$$

in ganzen Zahlen zu finden, wenn in ihr

$$D \equiv 0 \pmod{\sigma^2}$$

oder

$$4D \equiv \sigma^2 \pmod{4\sigma^2} \text{ ist.}$$

Um das Problem I auflösen zu können, führen wir den Begriff der *reducirten* Form ein; *die Definition der reducirten Form ist verschieden, je nachdem* D *negativ oder positiv ist.*

Ist D *negativ,* so heisst eine Form, deren Coefficienten a und c positiv sind, *reducirt,* wenn

$$c \geq a \geq 2|b|$$

ist, worin unter $|b|$ der absolute Werth von b verstanden wird.

Man hat dann die Sätze:

Jede Form mit negativer Determinante ist einer reducirten Form äquivalent.

Die einzigen Typen zweier reducirten, nicht identischen, äquivalenten Formen mit negativer Determinante sind:

$$(a,\ \tfrac{1}{2}a,\ c) \quad \text{und} \quad (a,\ -\tfrac{1}{2}a,\ c),$$
$$(a,\ b,\ a) \quad \text{und} \quad (a,\ -b,\ a).$$

Die Substitutionen, mittelst welcher man von der einen zur anderen übergeht, lauten bez.

$$\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn daher zwei Formen mit gleichen negativen Determinanten gegeben sind, so transformire man sie in die entsprechenden reducirten Formen (zu diesem Zweck vergleiche man den § 64 bei Dirichlet-Dedekind) und prüfe dann, ob die reducirten Formen einem dieser Fälle angehören.

Ist D *positiv*, so nennen wir eine Form *reducirt*, deren Wurzeln entgegengesetztes Vorzeichen haben und derart sind, dass dem absoluten Werth nach

$$\left|\frac{-b-\sqrt{D}}{c}\right| > 1,$$
$$\left|\frac{-b+\sqrt{D}}{c}\right| < 1$$

ist, worin $\sqrt{D}$ immer positiv zu nehmen ist.

Man erhält dann die Sätze:

Für jede positive Determinante existirt eine endliche Anzahl reducirter Formen.

Jede Form mit positiver Determinante ist immer einer reducirten äquivalent.

Die Form (a, b, c) heisst der Form (a', b', c') *nach rechts benachbart, contigua,* wenn die beiden Formen dieselbe Determinante haben und überdies $c' = a$ und die Summe $b + b'$ durch a theilbar ist. Von der zweiten Form sagt man, sie sei der ersten *nach links benachbart.*

Jede reducirte Form mit positiver Determinante hat eine einzige nach rechts benachbarte Form, die ebenfalls reducirt ist und hat gleicherweise eine einzige benachbarte nach links, die reducirt ist.

Man nehme also eine reducirte Form mit der gegebenen Determinante, construire die reducirten benachbarten nach rechts und nach links und fahre so fort. Man kommt dann zu einer unbegrenzten Reihe reducirter Formen; da aber ihre Zahl endlich ist, so muss man nach einer bestimmten Anzahl von

Operationen wieder auf die ursprüngliche reducirte Form zurückkommen.

Die Gesammtheit aller so erhaltenen reducirten Formen hat Gauss eine *Periode* genannt.

Existiren noch andere in dieser Periode nicht enthaltene reducirte Formen mit derselben Determinante, so kann man von einer anderen von ihnen ausgehen und *eine zweite Periode* bilden u. s. w.

Nachdem dieses vorausgeschickt ist, lässt sich der wichtige Gauss'sche Fundamentalsatz beweisen:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung, damit zwei reducirte Formen mit derselben positiven Determinante äquivalent seien, besteht darin, dass sie derselben Periode angehören. Mit diesem Satz ist offenbar das Problem I für positive Determinanten gelöst.

Wichtig ist die folgende Betrachtung, die eine bemerkenswerthe Beziehung zwischen den Perioden der im obigen Sinn reducirten Formen und den Kettenbrüchen liefert.

Es sei eine reducirte Form mit positiver Determinante D gegeben und ihr erster Coefficient sei positiv; ihre erste Wurzel ist alsdann positiv, wenn unter der ersten Wurzel diejenige verstanden wird, in welcher das Radical $\sqrt{D}$ mit negativem Zeichen genommen wird. Entwickelt man nun diese erste Wurzel ω in einen Kettenbruch, so *ergibt sich ein periodischer Kettenbruch, dessen Periode ebensoviele Glieder hat, wie die Periode der Reihe der benachbarten reducirten Formen.*

Mit Hülfe der Glieder dieses Kettenbruchs lassen sich die Zahlen α, β, γ, δ der Substitution construiren, mittelst welcher die Form mit der Determinante D in sich selbst transformirt wird. Dies geschieht auf die folgende Art:

Es sei

$$\omega = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots}}$$

oder kürzer geschrieben:

$$\omega = (k_0, k_1, k_2, \cdots)$$

der Kettenbruch, in welchen die erste positive Wurzel ω sich entwickeln lässt; *die Elemente k des Kettenbruchs wiederholen sich in einer aus einer geraden Anzahl $2i$ von Elementen gebildeten Periode so, dass*

$$k_r = k_s \text{ wird, wenn } r \equiv s \pmod{2i} \text{ ist.}$$

Wir wollen einen Parameter $h = 1, 2, \cdots$ einführen und

$$\frac{\gamma}{\alpha} = [k_0, k_1, \cdots, k_{2hi-2}], \quad \frac{\delta}{\beta} = [k_0, k_1, \cdots, k_{2hi-2}, k_{2hi-1}]$$

setzen und zu Zahlen α, β, γ, δ bez. die Zähler und Nenner dieser *endlichen* Kettenbrüche nehmen.

Die so berechneten Zahlen α, β, γ, δ sind sämmtlich positiv und sind die Coefficienten eine Substitution, welche die gegebene Form mit der Wurzel ω in sich selbst transformirt. Ueberdies erhält man alle derartigen Substitutionen, wenn man h die verschiedenen ganzzahligen Werthe 1, 2, 3, $\cdots$ *beilegt.*

Hat man alsdann die vier Coefficienten α, β, γ, δ mittelst der Formeln

$$\alpha = \frac{t - bu}{\sigma}, \quad \beta = -\frac{cu}{\sigma},$$

$$\gamma = \frac{au}{\sigma}, \quad \delta = \frac{t + bu}{\sigma}$$

ermittelt, so sucht man die positiven Werthe von t und u, welche der *Pell'schen Gleichung* genügen. *Die unendlich vielen Lösungen dieser Gleichung (für $D > 1$) ergeben sich, wenn h alle möglichen ganzen positiven Werthe ertheilt werden; erhält h den Werth* 1, *so ergibt sich die Minimallösung, d. h. diejenige, in welcher t und u die kleinsten Werthe haben.*

Um also die Lösungen der Pell'schen Gleichung

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2 \text{ für } D > 0$$

zu erhalten, verfährt man auf die folgende Art:

Man ermittelt eine reducirte Form mit der Determinante D und dem Theiler σ, deren erster Coefficient positiv ist; entwickelt ihre positive Wurzel in einen Kettenbruch und sucht die Theilnenner k_0, k_1, $\cdots$ auf. Schliesslich verfährt man wie bei den oben angegebenen Formeln.

Man beachte, dass bei diesen Erörterungen vorausgesetzt wird, *D sei unter keinen Umständen ein vollständiges Quadrat.*

Auf die vorstehende Art lassen sich alle Lösungen der Pell'schen Gleichung ermitteln; man kann aber auch so vorgehen, *dass man Formeln aufstellt, mit deren Hülfe alle Lösungen durch ihre Minimalösung ausgedrückt werden.*

Solche Formeln sind:

$$t_n = \frac{1}{\sigma^n}\{T^n + (n)_2 T^{n-2} U^2 D + (n)_4 T^{n-4} U^4 D^2 + \cdots\},$$

$$u_n = \frac{1}{\sigma^n}\{(n)_1 T^{n-1} U + (n)_3 T^{n-3} U^3 D + \cdots\},$$

worin mit T und U die Minimallösung bezeichnet wird und den n die Werthe 1, 2, 3, $\cdots$ *beizulegen sind.*

Um die Theorie der Pell'schen Gleichung zu vervollständigen, haben wir noch hinzuzufügen, wie die Gleichung sich verhält, wenn D negativ ist.

In diesem Fall hat die Pell'sche Gleichung eine endliche (und nicht, wie früher, eine unendlich grosse) Anzahl von Lösungen.

Ist speciell $D \equiv 0 \pmod{\sigma^2}$, *so erhält man zwei Lösungen, wenn der absolute Werth von D grösser als σ^2 ist; dagegen vier, wenn* $-D = \sigma^2$ *ist; diese Lösungen sind bez.*

$$\left.\begin{matrix} t = \pm\sigma \\ u = 0 \end{matrix}\right\} \text{ in dem ersten Fall}$$

$$\text{und } \begin{cases} t = \pm\sigma, \\ u = 0, \end{cases} \begin{cases} t = 0 \\ u = \pm 1 \end{cases} \text{ in dem zweiten Fall.}$$

Ist ferner

$$4D \equiv \sigma^2 \pmod{\sigma^2},$$

so ergeben sich die zwei Lösungen

$$\begin{cases} t = \pm\sigma \\ u = 0 \end{cases},$$

wenn

$$-4D > 3\sigma^2$$

ist, und die sechs Lösungen

$$\begin{cases} t = \pm\sigma, \\ u = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} t = \pm\tfrac{1}{2}\sigma, \\ u = \pm 1, \end{cases} \quad \begin{cases} t = \pm\tfrac{1}{2}\sigma, \\ u = \mp 1, \end{cases}$$

wenn $-4D = 3\sigma^2$ *ist.*

Die sogenannte Pell'sche Gleichung hat Fermat in Vorschlag gebracht, Pell dagegen gelöst. Später beschäftigten sich mit ihr Euler, Lagrange, *Werke,* I, II und Dirichlet, *Berliner Monatsberichte,* 1841, 42, 46; *S. la théorie des nombres, Compt. Rend.*, 10, 1840.

Die vorstehende Uebersicht über die Theorie der quadratischen Formen haben wir dem Werke Dirichlet-Dedekind's entnommen; sie wird dort so dargestellt, wie sie zuerst Gauss in seinen *Disquisit. arithm.* begründet hat.

Eng verbunden mit der in diesem Paragraphen entwickelten Theorie ist das Problem der Darstellbarkeit der Zahlen durch *binäre* quadratische Formen oder die Auflösung der unbestimmten Gleichungen 2ten Grads mit *zwei* Variabelen.

Einige sich darauf beziehende Resultate findet man in § 11, wo auch andere ähnliche Sätze in Bezug auf die Darstellbarkeit durch specielle nicht mehr *binäre*, sondern *ternäre*, *quaternäre* etc. Formen zusammengestellt sind.

§ 9. Die ganzen complexen Zahlen von Gauss. Die biquadratischen Reste.

Die Zahlen von der Form

$$\alpha = a + bi, \quad \left(i = \sqrt{-1}\right),$$

worin a und b reelle ganze Zahlen sind, heissen Gauss'sche ganze complexe Zahlen. Vergl. Kap. 1, § 2. Die Zahl $+\sqrt{a^2 + b^2}$ wird der *Modul* oder besser, wegen der Vieldeutigkeit dieses Worts, nach Weierstrass der *absolute Betrag* von α und das Quadrat dieser reellen Grösse, also die Summe $a^2 + b^2$, nach Gauss die *Norm* von α genannt.

Sind a, b gerade, so ist die Zahl eine *gerade ganze complexe Zahl;* ist die eine der Grössen a oder b gerade, die andere ungerade, so erhält man eine *ungerade complexe Zahl;* sind beide ungerade, eine *halbgerade complexe Zahl.*

Man sagt, die ganze Zahl α sei durch β theilbar, wenn $\alpha = \beta \cdot \gamma$ ist und γ ebenfalls eine *ganze complexe Zahl* ist.

Einheit heisst jede ganze complexe Zahl vom Modul 1.

Es gibt vier Einheiten: $+1, \; -1, \; +i, \; -i.$

Die vier Zahlen, welche man durch Multiplication einer beliebigen ganzen complexen Zahl mit jeder dieser vier Einheiten erhält, heissen *associirt.*

Eine Zahl $a + bi$ wird *primär* genannt, wenn $a - 1$ und b, durch 4 getheilt, gleichzeitig den Rest 0 oder gleichzeitig den Rest 2 ergeben.

In jeder Gruppe von vier associirten ungeraden Zahlen existirt immer eine primäre.

Die Zahl $a + bi$ heisst *prim*, wenn es nicht möglich ist, sie in ein Product zweier ganzen complexen Zahlen zu zerlegen, die beide von der Einheit verschieden sind.

Die sogenannten Euclid'schen Fundamentalgesetze über die Theilbarkeit der rationalen Zahlen bleiben unverändert für die complexen Zahlen bestehen, nur darf man die associirten Zahlen nicht als wesentlich von einander verschieden ansehen.

Jede ganze complexe Zahl lässt sich immer und auf eine einzige Art als ein Product einer endlichen Anzahl von Primzahlen darstellen.

Wenn α durch β theilbar ist, so lässt sich die Norm von α durch die Norm von β theilen.

Die Norm einer Zahl ist durch die Zahl selbst theilbar.

Die kleinste von allen reellen ganzen durch eine complexe Primzahl theilbaren Zahlen ist eine reelle Primzahl; jede complexe Primzahl ist daher Theiler einer reellen Primzahl und zwar einer einzigen.

Die Norm einer complexen Primzahl ist entweder einer Primzahl oder dem Quadrat einer Primzahl gleich. In dem ersten Fall erhält man *die complexe Primzahl ersten Grads*, im 2ten *die complexe Primzahl zweiten Grads. In beiden Fällen hat die Norm immer die Form* $4n + 1$.

Die Zahl 2 *ist dem Quadrat der Primzahl* 1ten *Grads* $1 - i$ *associirt.*

Jede reelle positive Primzahl von der Form $4n + 3$ *ist eine complexe Primzahl* 2ten *Grads.*

Jede reelle positive Primzahl von der Form $4n + 1$ *ist das Product zweier complexer Primzahlen* 1ten *Grads, welche conjugirt imaginär sind.* Dieses Resultat lässt sich auch so aussprechen: *Eine Primzahl p von der Form $4n + 1$ kann nur auf eine Weise in die Summe zweier Quadratzahlen zerlegt werden.*

Man sagt, zwei ganze complexe Zahlen α, β seien einander bez. eines ganzen complexen Moduls ω *congruent*, wenn $\alpha - \beta$ durch ω theilbar ist.

Die Sätze über die Congruenzen der reellen Zahlen, vergl. §§ 3, 4, etc., sind leicht auszudehnen. So gilt z. B.:

Die Congruenz

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \equiv 0 \pmod{m},$$

worin die Coefficienten ganze complexe Zahlen sind und auch m eine ganze complexe Zahl bedeutet, kann nicht mehr als n einander nicht congruente Wurzeln haben.

Jede Zahl $a + bi$ ist einer einzigen Zahl $x + yi$ congruent (mod. m), wobei x und y bez. aus den beiden Reihen

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \left(\frac{|m|}{d} - 1\right) \text{ und}$$

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ (d - 1)$$

auszuwählen sind und man unter $|m|$ die Norm von m und unter d den grössten gemeinschaftlichen Theiler der beiden Coordinaten von m zu verstehen hat.

Combinirt man alle Werthe x mit allen Werthen y, so erhält man im Ganzen $|m|$ complexe zu je zweien einander nicht congruente Zahlen; sie bilden ein *vollständiges System von Resten* (mod. m).

Wenn m eine complexe ungerade Primzahl ist, μ ihre Norm und n nicht durch m theilbar ist, so erhält man (die Erweiterung des Fermat'schen Theorems)

$$n^{\mu-1} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Es ist auch $n^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv i^{\varrho} \pmod{m}$, *wobei ϱ eine der Zahlen* 0, 1, 2, 3 *bedeutet.*

Biquadratische Reste. Eine Zahl n heisst *biquadratischer Rest* bez. einer complexen Zahl m, wenn die Congruenz

$$x^4 \equiv n \pmod{m}$$

möglich ist.

Die complexe Zahl n ist der biquadratische Rest der ungeraden complexen Primzahl m, wenn

$$n^{\frac{\mu-1}{4}} \equiv 1 \pmod{m}$$

ist und μ die Norm von m bedeutet.

Um den biquadratischen Charakter von n bez. m darzustellen, wendet man das Jacobi'sche Symbol

$$\left(\left(\frac{n}{m}\right)\right)$$

an, indem man unter diesem Symbol die Zahl i^{ϱ} versteht; ist es gleich $+1$, so ist n der biquadratische Rest von m.

Zwei congruente Zahlen (mod. m) haben denselben biquadratischen Charakter.

Der biquadratische Charakter eines Products zweier Zahlen ist dem Product der biquadratischen Charaktere der Factoren gleich.

Das Symbol $\left(\left(\frac{i}{m}\right)\right)$ *ist gleich* $i^{\frac{\mu-1}{4}}$.

Ist $m = a + bi$ eine primäre complexe Primzahl, so ist $\left(\left(\frac{1+i}{m}\right)\right) = i^{\frac{1}{4}(a-b-b^2-1)}$.

Wenn m, n zwei complexe zu einander prime Zahlen (ohne gemeinschaftliche Theiler mit Ausnahme der Einheit) sind und wenn m ungerade ist, so gilt immer $\left(\left(\frac{n}{m}\right)\right) = +1$.

Das Reciprocitätstheorem für die biquadratischen Reste lautet:

Die biquadratischen Charaktere zweier primärer complexer Primzahlen sind einander gleich, wenn wenigstens eine der beiden Zahlen $\equiv 1 \pmod{4}$ *ist; sie sind gleich und haben entgegengesetztes Vorzeichen, wenn beide Zahlen*

$$\equiv 3 + 2i \pmod{4} \quad \textit{sind.}$$

Die Theorie der biquadratischen Reste hat Gauss behandelt, *Werke*, 2, *Theoria residuorum biquadraticorum;* spätere Untersuchungen sind von Eisenstein, *Einfacher Beweis und Verallg. des Fundamentaltheor. für d. biquadrat. Reste, Crelle*, 28, 1844; Le Besgue, *Liouville's Journ.*, 4, etc. Eine einfache Darstellung findet man in dem Buch Bachmann's, *Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie*, Leipzig, 1872.

§ 10. Die ganzen complexen aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Zahlen. Die cubischen Reste.

Eine *complexe aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzte Zahl* hat die Form $a + b\varepsilon$, worin ε eine Cubikwurzel aus der Einheit, $\varepsilon = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ ist, und a, b reelle ganze Zahlen bedeuten. Die Zahl $a + b\varepsilon^2$ heisst der ersteren *conjugirt* und das Product beider die *Norm*.

Wir brauchen hier nicht die Grunddefinitionen zu wiederholen, da sie den in den vorhergehenden Paragraphen gegebenen analog sind.

Eine Zahl, deren Norm $+1$ ist, heisst eine *complexe Einheit.* Es gibt sechs complexe Einheiten

$$+1, \; -1, \; +\varepsilon, \; -\varepsilon, \; 1 + \varepsilon = -\varepsilon^2, \; -1 - \varepsilon = +\varepsilon^2.$$

Die Zahl 3 *ist in dieser Theorie nicht eine Primzahl, sondern das Product aus* $(1 - \varepsilon)$ *und* $(1 - \varepsilon^2)$.

Je nachdem die Norm von $a + b\varepsilon$ *durch* 3 *theilbar ist oder nicht, hat die Zahl* $a + b\varepsilon$

$$1 - \varepsilon$$

zum Factor oder nicht.

Multiplicirt man eine gegebene Zahl mit den sechs Einheiten, so ergeben sich sechs *associirte* Zahlen.

Eine Zahl heisst *primär*, wenn der Coefficient von $\varepsilon \equiv 0$ (mod. 3) ist und der andere Theil $\equiv -1$ (mod. 3) ist.

In jeder Gruppe von 6 associirten Zahlen existirt immer eine primäre.

In dem Gebiet der ganzen complexen Zahlen, die aus drei Einheitswurzeln zusammengesetzt sind, gibt es drei Arten von Primzahlen, nämlich:

1. *die Zahl* $1 - \varepsilon$, *den Theiler von* 3;
2. *die reellen Primzahlen von der Form* $6n + 5$; *diese Zahlen sind auch primär;*
3. *die complexen Primzahlen, deren Norm die Form* $6n + 1$ *hat.*

Bedeutet m *eine (von* $1 - \varepsilon$ *verschiedene) complexe Primzahl und ist* n *durch* m *nicht theilbar, so ist (das verallgemeinerte* Fermat'*sche Theorem)*

$$n^{\mu-1} \equiv 1 \pmod{m},$$

worin μ *die Norm von* m *bezeichnet, oder auch*

$$n^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv \varepsilon^{\varrho} \pmod{m},$$

worin ϱ *eine der Zahlen* 0, 1, 2 *bedeutet.*

Cubische Reste. Ist $n^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv 1 \pmod{m}$, *so ist* n *ein cubischer Rest von* m, *wenn* n *sich durch* m *nicht theilen lässt.*

Unter dem cubischen Charakter einer durch m nicht theilbaren Zahl n in Bezug auf m soll die Zahl ε^{ϱ}, welche in der Congruenz $n^{\frac{\mu-1}{3}} \equiv \varepsilon^{\varrho} \pmod{m}$ auftritt, verstanden werden. Dieser cubische Charakter von n in Bezug auf m wird durch das Symbol $\left[\frac{n}{m}\right]$ (Eisenstein) dargestellt.

Der cubische Charakter von $1 - \varepsilon$ *ist durch die Formel*

$$\left[\frac{1-\varepsilon}{a+b\varepsilon}\right] = \varepsilon^{\frac{2}{3}(a+1)} \text{ bestimmt.}$$

Das Reciprocitätstheorem für die cubischen Reste lautet:

Wenn n, m *zwei primäre Primzahlen der Form* $a + b\varepsilon$ *sind, so ist der cubische Charakter von* n *in Bezug auf* m *demjenigen von* m *in Bezug auf* n *gleich.*

Mit den cubischen Resten haben sich Jacobi, *Crelle*, 2, später Eisenstein, *Crelle*, 27, 28; Le Besgue, *Liouville*, 4, etc. beschäftigt. Siehe auch die 14[te] und 15[te] Vorlesung in dem oben citirten Werk von Bachmann.

§ 11. Zerfällung der Zahlen. Das allgemeine Problem der unbestimmten Gleichungen. Darstellung der Zahlen durch quadratische Formen.

Einigen von den Problemen, die in den vorstehenden Paragraphen behandelt wurden, kann man eine andere gleichwerthige Form geben; wir meinen die Form, unter welcher sie von den ersten Autoren, welche die Zahlentheorie entwickelten, von Euler, Legendre etc. untersucht worden sind. Die sogenannte *unbestimmte Analysis*, welche den Hauptheil der Zahlentheorie ausmachte, bestand in der ganzzahligen Auflösung einer *unbestimmten Gleichung* d. h. einer Gleichung mit mehreren Unbekannten und *ganzzahligen* Coefficienten. Auf dieses Problem reducirt sich aber offenbar das Problem der Darstellbarkeit einer gegebenen Zahl mittelst eines reellen ganzzahligen Ausdrucks mit ganzen Coefficienten und einer bestimmten Anzahl von Variabelen, welche auch ihrerseits ganzzahlige Werthe haben sollen, oder mittelst binärer, quadratischer etc. Formen mit einer bestimmten Anzahl von Variabelen.

Der § 4 löst das Problem der unbestimmten Analysis 1ten Grads mit *zwei* Unbekannten auf, und die in den Paragraphen 5 und 8 behandelten Probleme entsprechen ihrerseits den Problemen der unbestimmten Analysis 2ten Grads, jedoch immer mit *zwei* Unbekannten. Es können aber auch analoge und allgemeinere Probleme untersucht werden, bei welchen es sich um unbestimmte Gleichungen mit einer *beliebigen* Anzahl von Unbekannten anstatt mit nur *zweien* handelt.

Wir wollen uns nicht in die Einzelheiten dieser allgemeineren Betrachtungen einlassen und nur einige Angaben machen, damit sich der Leser auf diesem Gebiet einigermassen orientiren kann.

Wir setzen zunächst an erster Stelle voraus, die unbestimmte Gleichung sei vom 1ten Grad, und habe daher die Form

$$ax + by + \cdots = n,$$

worin $a, b, \cdots, n$ ganze Zahlen bedeuten.

Wenn $a, b, \cdots$ *positive* ganze Zahlen sind, und wenn man diese Gleichung nach $x, y, \cdots$ aufzulösen sucht, die *positive ganze Zahlen* sein sollen, so ergibt sich das sogenannte *Zerfällungsproblem*, welches von Euler den Namen erhalten hat *(partitio numerorum)*, weil es sich um die *Zerfällung einer Zahl n in positive Summanden* handelt.

Eine wichtige Untersuchung in dieser Beziehung ist die Aufsuchung der *Anzahl* der verschiedenen Lösungen dieser Gleichung und *diese Zahl, welche die Zerfällungszahl heisst, ist dem Coefficienten von x^n in der Entwickelung von*

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)\cdots}$$

nach aufsteigenden ganzen positiven Potenzen von x gleich.

In Bezug auf das Problem der Zerfällung der Zahlen citiren wir Euler, *Introd. in Anal. infinit.*, 1, Kap. 16; *Comm. Petrop.*, 3, 1750, 1751; *Comment. Arithmeticae collectae*, 1, S. 73; Jacobi, *Crelle*, 21; Sylvester, *Quart. Journ.*, 1; *Ann. di scienze fis. e mat. di Tort.*, 8, 1857, welcher einen expliciten Ausdruck für die Anzahl der Zerfällungen fand. An diese letztere Arbeit schliessen sich an: Brioschi, ib., 8, 1857; Battaglini, *Mem. Acc. Napoli*, 1858—1860; Trudi, *Atti Acc. Napoli*, 2, 1867.

Wir führen ferner noch an: Faà di Bruno, *Crelle*, 85 und die in dem 2. Abschnitt des 2. Theils der *Zahlentheorie* von Bachmann, Leipzig 1894 enthaltene Darstellung.

Man kann dann zweitens das Problem der Auflösung *eines Systems* von unbestimmten Gleichungen 1[ten] Grads untersuchen. Dieses Problem steht in Verbindung mit der Theorie der *Elementartheiler*, von denen in Kap. 12, § 15 die Rede war. Siehe darüber Smith, *Phil. Trans.* 151, S. 293; Frobenius, *Crelle*, 86, 88; Heger, *Abh. der Wiener Acad.*, 14, 2. Thl.; Stieltjes, *Théorie des nombres*, Kap. 3; *Ann. de la faculté des sciences de Toulouse*, Bd. 4. Man vergleiche auch den 4. Bd. des citirten Werkes von Bachmann.

Geht man nun von linearen Formen zu Formen höheren Grads über, so handelt das erste Problem, welches sich bietet, natürlich von der Darstellbarkeit einer Zahl durch quadratische, binäre, ternäre, quaternäre etc. Formen. Mit ihm steht dann offenbar auch das Problem der *Darstellbarkeit einer Zahl durch Summen von Quadraten* in Verbindung. Für *binäre* Formen ist die Theorie dieser Darstellbarkeit eng mit der Gauss'schen oben in § 8 entwickelten Theorie verbunden.

Mit solchen Aufgaben haben sich viele Autoren beschäftigt: Gauss, Cauchy, Dirichlet, Eisenstein, Hermite, Liouville, Minkowski, Smith etc. Wir verweisen darüber auf den 4. Bd. der *Zahlentheorie* von Bachmann, der fast ausschliesslich den quadratischen Formen gewidmet ist.

In der 2. Serie des *Journ. de math.* von Liouville Bd. 1—15 sind sehr viele Mittheilungen (ohne Beweis) von Liouville über die Darstellbarkeit einer Zahl durch specielle bestimmte Typen quadratischer Formen enthalten. Einen Theil dieser von Liouville mitgetheilten Formeln hat Pepin, *Journ. de math.*, 4. Ser., 6 bewiesen.

Wir geben hier einige Resultate über die Darstellbarkeit einer Zahl durch quadratische binäre Formen oder auch durch Summen von Quadraten an:

Jede positive Primzahl von der Form $4n+1$ *lässt sich immer und auf eine einzige Art als die Summe zweier Quadratzahlen darstellen* (*das Fermat'sche Theorem*, zuerst von Euler bewiesen, *Demonstratio theorematis Fermatiani* etc., *Novi Comm. Petrop.*, 5; siehe auch Henry Smith, *De compositione numerorum primorum formae* $4\lambda+1$ etc., *Crelle*, 50, 1855).

Die Bestimmung der Basen dieser Quadrate verdankt man Gauss, *Theoria resid. biquadr.*, *Werke*, 2.

Die nach ihrem absoluten Werth kleinsten Zahlen a *und* b, *welche den Congruenzen*

$$a \equiv (-1)^{\frac{p+3}{4}} \frac{1}{2} \frac{\frac{p-1}{2}!}{\left[\frac{p-1}{4}!\right]^2} \quad (\text{mod. } p),$$

$$\pm 2b\left[\frac{p-1}{4}!\right]^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \quad (\text{mod. } p)$$

genügen, erhält man für $p = a^2 + b^2$.

Jede Primzahl von der Form $3n+1$ *lässt sich immer und auf eine einzige Art in ein Quadrat und ein dreifaches Quadrat zerlegen.*

Jede Primzahl von einer der beiden Formen

$$20n+1, \quad 20n+9$$

lässt sich auf eine einzige Art als Summe eines Quadrats und eines fünffachen Quadrats darstellen und jede Primzahl von einer der beiden Formen $20n+3$, $20n+7$ *kann auf* 4 *verschiedene Arten mittelst der Form* (2, 1, 3) *dargestellt werden.*

Jede Primzahl von der Form $6n+1$ *lässt sich durch die Form* $x^2 - xy + y^2$ *darstellen.*

Das Vierfache einer Primzahl von der Form $6n+1$ *kann als die Summe eines Quadrats und eines dreifachen Quadrats ausgedrückt werden:*

$$4p = A^2 + 3B^2.$$

Die Zahl A *ist ein cubischer Rest von* p.

Die Zahlen A und B sind als die ihrem absoluten Werth nach kleinsten definirt, welche den Congruenzen

$$\left.\begin{array}{l} A\left[\frac{p-1}{3}!\right]^3 \equiv 1, \\ A + B\left\{g^{\frac{p-1}{3}} - g^{2\frac{p-1}{3}}\right\} \equiv 0 \end{array}\right| \pmod{p}$$

genügen, worin g eine primitive Wurzel von p ist.

Dieses Theorem findet sich zuerst bei Jacobi, *Crelle,* 2, 1827, *De residuis cubicis* etc.; dann bei Cauchy, *Sur la th. des nombres, Mém. de l'Acad. de Paris,* 17, 1838, 1839; Le Besgue, *Recherches sur les nombres, Liouville's Journ. de math.,* 2, 1837; Stern, *Crelle,* 7, 9; Clausen, *ib.,* 8, 1832.

Jede Primzahl von einer der beiden Formen

$$8n + 1, \quad 8n + 3$$

lässt sich immer und auf eine einzige Art als Summe einer Quadratzahl und einer doppelten Quadratzahl darstellen. Jacobi, *Crelle,* 30; Stern, *ib.,* 32.

Zahlreiche andere Theoreme dieser Art über die Primzahlen von speciellen Formen hat Liouville gefunden, *Journ. de math.,* (2), Bd. 1 bis Bd. 15.

Jede ganze Zahl ist immer die Summe entweder von vier oder von einer geringeren Anzahl von Quadraten.

Dieser schöne Satz ist Lagrange, *Mém. de Berlin,* 1770 zu verdanken; später beschäftigte sich Euler, *Acta Petrop.,* 1777 mit ihm; siehe auch Legendre, *Th. des nombres.* Er ist ein specieller Fall des Fermat'schen Theorems (vergl. S. 26) über die Darstellung einer ganzen Zahl durch Polygonalzahlen.

Die Anzahl aller (eigentlichen und uneigentlichen) Darstellungen einer ungeraden Zahl als Summe von vier Quadraten ist gleich der 8-fachen Summe aller ihrer Theiler.

Die Anzahl aller (eigentlichen und uneigentlichen) Darstellungen einer geraden Zahl als Summe von vier Quadraten ist gleich der 24-fachen Summe aller ihrer ungeraden Theiler.

Diese Theoreme sind von Eisenstein, *Crelle,* 35. Doch hatte schon Jacobi in den *Fundamenta nova* etc. einen speciellen Fall als Anwendung der Theorie der elliptischen Functionen gefunden. Später gab Jacobi von diesem speciellen Fall einen elementaren Beweis, *Crelle,* 12, S. 167; mit demselben Theorem beschäftigte sich auch Dirichlet, *Journ. de Liouville,* 2. Ser., 1, S. 210.

Ueber die Darstellung einer Zahl als Summe von 5 Quadraten siehe Dirichlet, *Crelle,* 18; Eisenstein, *Crelle,* 35; Smith, *Mém. prés. par divers Sav. Étr.,* Bd. 29 und Bachmann, l. c., 4, S. 621, 664.

Die Anzahl aller Darstellungen einer ungeraden Zahl b *als Summe von sechs Quadraten ist, wenn* $b \equiv 1$ (mod. 4), *gleich dem* 12-*fachen, und wenn* $b \equiv 3$ (mod. 4) *ist, gleich dem* 20-*fachen Unterschied zwischen der Summe der Quadrate derjenigen ihrer Factoren, welche die Form* $4k+1$, *und der Summe der Quadrate derjenigen, welche die Form* $4k+3$ *haben* (Eisenstein).

Die Anzahl aller Darstellungen einer ungeraden Zahl als Summe von acht Quadraten ist gleich der 16-*fachen Summe der Cuben ihrer Factoren* (idem).

Ueber den Ausdruck einer Zahl als Summe von 10 Quadraten gibt es ein specielles Theorem von Eisenstein l. c. und in Bezug auf 11 oder 12 Quadrate sind noch nicht bewiesene Mittheilungen von Liouville vorhanden, *Journ. de math.,* 2. Ser., 5, 9, 11.

Wir wollen schliesslich noch das ungemein interessante Werk von H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen,* 1. Lieferung, Leipzig 1896 anführen; in demselben werden sehr verschiedenartige, tiefliegende zahlentheoretische Sätze durch die Anschauung gewonnen.

Es war Fermat, der zuerst die Aufmerksamkeit der Analytiker auf diese Art von Zahlenproblemen lenkte, die dann später, in eine Doctrin vereinigt, die sogenannte *Zahlentheorie oder die höhere oder transcendente Arithmetik* bildeten. Die ersten umfassenden wichtigen Entdeckungen verdankt man jedoch Euler, der z. B. die Theorie der *Indices* (*Comm. Petr.,* 1773) und der quadratischen Reste begründete. Auf Euler folgte Lagrange, welcher sich eingehend mit der Zahlentheorie beschäftigte und zuerst die Grundlage zu einer allgemeinen Theorie der quadratischen Formen legte. Dann kamen die beiden denkwürdigen Werke: *Théorie des nombres* von Legendre, Paris, l'an 6, von welcher noch zu des Autors Lebzeiten drei Auflagen, die letzte 1830, erschienen, und welcher man den ersten Beweis des Reciprocitätssatzes für die quadratischen Reste verdankt, und ferner die *Disquisitiones arithmeticae* von Gauss, Leipzig 1801, die unter Anderem die vollständige Theorie der quadratischen Formen enthalten, wie wir sie oben auseinandergesetzt haben.

Das Buch Legendre's ist wohl als ein Repertorium aller bis dahin bekannt gewordenen Untersuchungen über den Gegenstand anzusehen. Gauss verdankt man dann auch das erste systematische Studium der complexen Zahlen, und den Gedanken, sie zur Erweiterung, Vervollständigung und auch zum Beweis der Sätze aus der Theorie der reellen Zahlen zu verwenden.

Wir wollen der Kürze wegen davon absehen, die Arbeiten aller übrigen Autoren, Cauchy, Dirichlet, Kummer, Jacobi, Eisenstein, Kronecker, Liouville, etc. zu citiren und nur die neueren wichtigsten Werke über die Zahlentheorie angeben. Da ist Dirichlet-Dedekind, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4. Aufl., Braunschweig 1894, zu nennen, von dem eine Uebersetzung in das Italienische von Faifofer, Venedig 1881 existirt und worin man auch viele von jenen Autoren selbst angestellte specielle Untersuchungen findet, ferner Tschebyscheff, *Theorie der Congruenzen (Elemente der Zahlentheorie)*, deutsch von Schapira, Berlin 1889, dann die *Théorie des nombres* von Lucas, Paris 1891, und die ausgezeichnete *Zahlentheorie* von Bachmann, Leipzig 1894, 1898 in 4 Bdn.

In einer neueren Reihe von Vorlesungen hat Klein, *Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie*, Göttingen 1896, lithogr. die Theorie der quadratischen Formen auch von geometrischem Standpunkt behandelt.

Eine historische Uebersicht über die ganze Zahlentheorie findet man in dem berühmten Werk von Smith, *Report on the theory of numbers, Werke*, Oxford, 1894.

Kapitel XXI.

Die Lehre von den algebraischen und transcendenten Zahlen.

§ 1. Allgemeines über die algebraischen Zahlen.

Jede Zahl, welche die Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Coefficienten ist, heisst *eine algebraische Zahl;* sie kann natürlich reell oder complex sein. Wenn der erste Coefficient der Gleichung die Einheit ist und die übrigen Coefficienten *ganze* Zahlen sind, so erhält man *eine ganze algebraische Zahl,* in den übrigen Fällen *eine nicht ganze oder gebrochene algebraische Zahl.*

Die complexe Zahl $\alpha + \beta i$, worin α, β rationale Zahlen sind, ist ein specieller Fall der algebraischen Zahl und enthält ihrerseits als speciellen Fall die rationalen Zahlen.

Von einer Gesammtheit von Zahlen sagt man, sie bilde einen *Körper* oder *Rationalitätsbereich,* wenn sie durch die vier ersten Grundoperationen, die wir die *rationalen Operationen* nennen können, reproducirt wird.

Der Begriff des Rationalitätsbereichs lässt sich schon in den Schriften von Abel und Galois nachweisen; er ist dann in markanter Weise von Kronecker (vorzüglich *Crelle,* 92) zur Geltung gebracht worden; von ihm stammt auch das Wort *Rationalitätsbereich.* Die Bezeichnung *Körper* rührt von Dedekind her.

Die Gesammtheit aller rationalen Zahlen bildet einen Zahlkörper.

Die Gesammtheit aller algebraischen Zahlen bildet einen Körper.

Die rationalen ganzen Zahlen werden nur durch die drei ersten rationalen Operationen reproducirt; die *ganzen* rationalen Zahlen bilden also keinen Körper.

Der kleinste Körper, der in jedem Körper enthalten sein muss, ist der Körper der rationalen Zahlen. Dieser Körper wird auch als *absoluter Rationalitätsbereich* bezeichnet.

Jede Wurzel einer Gleichung, in welcher der erste Coefficient 1 *ist und die übrigen algebraische ganze Zahlen sind, ist ebenfalls eine algebraische ganze Zahl.*

Von allen unendlich vielen Gleichungen mit rationalen Coefficienten, als deren Wurzel eine algebraische Zahl gelten kann, ist diejenige vom niedrigsten Grad irreducibel, d. h. ihre linke Seite lässt sich nicht in Factoren mit rationalen Zahlen zerlegen.

Wenn eine *algebraische* Zahl θ als Wurzel einer irreducibelen Gleichung von der n^{ten} Ordnung gegeben ist und alle Zahlen vom Typus

$$\varphi(\theta) = x_0 + x_1\theta + x_2\theta^2 + \cdots + x_{n-1}\theta^{n-1}$$

gebildet werden, worin $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ beliebige rationale Zahlen bedeuten, *so setzen die sich so ergebenden Zahlen einen Körper* Ω *zusammen; dieser Zahlkörper* Ω *wird durch die Wurzel* θ *erzeugt.*

Er heisst ein *endlicher Körper vom* n^{ten} *Grad.*

Man kann n Zahlen des Körpers Ω *so wählen, dass jede beliebige andere Zahl desselben Körpers sich immer linear und mit rationalen Coefficienten durch die ersten n Zahlen bilden lässt.* Man sagt, ein solches System von Zahlen bilde *eine Basis von* Ω. Eine solche Basis bilden auch die Potenzen von θ:

$$1,\ \theta,\ \theta^2,\ \cdots,\ \theta^{n-1}.$$

Die n Zahlen, aus welchen eine Basis besteht, werden auch die *Elemente* der Basis genannt.

Die Körper Ω, Ω', Ω'', $\cdots$, welche durch alle Wurzeln θ, θ', θ'', $\cdots$ einer einzigen irreducibelen Gleichung der n^{ten} Ordnung erzeugt werden, heissen *conjugirte Körper.*

Wenn $\omega = \varphi(\theta)$ eine Zahl von Ω ist, so gehört $\omega' = \varphi(\theta')$ zu Ω' und ω, ω' heissen *conjugirt.* Wenn alle zu Ω conjugirten Körper mit Ω selbst identisch sind, *wie es z. B. vorkommt, wenn* θ *die Wurzel einer binomischen Gleichung ist,* so heisst Ω ein *Normalkörper* oder ein Galois'scher Körper. Diese von Dedekind herrührende Benennung soll zur Erinnerung an die Galois-sche Theorie der algebraischen Gleichungen dienen. Aus der Galois'schen Resolvente einer jeden gegebenen Gleichung (vergl. S. 104) geht ein Galois'scher oder Normalkörper hervor; denn alle Wurzeln der Galois'schen Resolvente sind rationale Functionen einer von ihnen.

Ist $\omega = \varphi(\theta)$ eine Zahl von Ω, so heisst das Product

$$\omega\omega' \cdots \omega^{(n-1)} = \varphi(\theta)\,\varphi(\theta') \cdots \varphi(\theta^{(n-1)}),$$

in welchem θ, θ', $\cdots$ die sämmtlichen Wurzeln der gegebenen irreducibelen Gleichung sind, die *Norm* von ω und wird mit $N(\omega)$ bezeichnet.

Die Norm von ω ist immer eine rationale Zahl.

Wenn ω eine rationale in Ω enthaltene Zahl ist, so sind die Conjugirten von ω mit ω identisch und ist $N(\omega) = \omega^n$.

Sind ω_1, ω_2 zwei Zahlen von Ω, so ist

$$N(\omega_1 \omega_2) = N(\omega_1) N(\omega_2).$$

Man nennt *Discriminante von n Zahlen von Ω* das Quadrat der aus den n Zahlen und allen ihren conjugirten in jedem der Körper Ω', Ω'', $\cdots$, $\Omega^{(n-1)}$ gebildeten Determinante.

Die Discriminante ist eine rationale Zahl.

Wenn n Zahlen von Ω gegeben sind, so bilden sie eine Basis von Ω oder nicht, je nachdem ihre Discriminante von Null verschieden oder Null ist.

Jede algebraische Zahl lässt sich durch Multiplication mit einer ganzen rationalen von Null verschiedenen Zahl in eine ganze algebraische Zahl verwandeln.

Man kann auf unendlich viele Arten eine Basis des Körpers Ω finden, deren Elemente nur aus ganzen Zahlen bestehen, und man kann auch eine solche Basis derart wählen, dass die Discriminante der in ihr enthaltenen Zahlen ein Minimum wird; eine solche *Minimaldiscriminante* heisst dann *die Grundzahl des Körpers Ω* oder auch *die Discriminante des Körpers Ω.*

Wenn $n = 2$ ist, d. h. wenn die Fundamentalgleichung vom 2ten Grad ist, erhält man einen *quadratischen Körper*. Die complexen Zahlen $a + bi$, worin $i = \sqrt{-1}$ ist, und a, b rationale Zahlen bedeuten, sind ein specieller Fall eines solchen Körpers.

Die *Norm* von $a + bi$ entspricht dem Product $(a + bi)(a - bi)$ und daher der gewöhnlichen *Norm* oder dem Quadrat des *Moduls* der complexen Zahl. *Die Grundzahl des quadratischen aus den rationalen complexen Zahlen gebildeten Körpers ist* -4.

§ 2. Theilbarkeit der algebraischen ganzen Zahlen. Die idealen Zahlen Kummer's.

Eine ganze Zahl α heisst durch eine ganze Zahl β *theilbar*, wenn $\alpha = \beta\gamma$ ist, und unter γ ebenfalls eine ganze Zahl verstanden wird.

Wenn α und β algebraische ganze durch μ theilbare Zahlen bezeichnen, so sind auch $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ durch μ theilbar,

Ist α durch λ und λ durch μ theilbar, so lässt sich auch α durch μ theilen.

Einheit heisst jede algebraische ganze Zahl, die in 1 *und mithin in jeder algebraischen ganzen Zahl enthalten ist.*

Jede Wurzel einer Gleichung, deren erster und letzter Coefficient gleich 1 *ist, und deren übrige Coefficienten reelle ganze Zahlen sind, ist eine Einheit; es gibt unendlich viele Einheiten.*

Die Einheiten reproduciren sich durch Multiplication, Division und Wurzelausziehen.

Wenn von zwei Zahlen die eine durch die andere theilbar ist, so sind ihre Quotienten Einheiten; die beiden Zahlen heissen dann *associirt.*

Zwei einer dritten associirte Zahlen sind einander associirt.

Ist α durch β theilbar, so ist jede zu α associirte Zahl durch jede zu β associirte theilbar.

Zwei algebraische ganze Zahlen α, β heissen prim zu einander, wenn zwei andere algebraische ganze Zahlen ξ, η derart existiren, dass

$$\alpha\xi + \beta\eta = 1 \text{ ist.}$$

Ist α prim zu β und zu γ, so ist es prim zu dem Product $\beta\gamma$.

Wenn jede der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ zu jeder der Zahlen $\beta_1, \beta_2, \cdots$ prim ist, so sind die beiden Producte $\alpha_1\alpha_2\cdots$, $\beta_1\beta_2\cdots$ prim zu einander.

Jeder gemeinschaftliche Theiler zweier zu einander primen Zahlen ist eine Einheit.

Zwei ganze Zahlen α, β haben immer einen gemeinschaftlichen Theiler δ, der sich durch die Form

$$\delta = \alpha\xi + \beta\eta$$

darstellen lässt, worin ξ, η zwei ganze Zahlen sind; überdies ist δ durch jeden gemeinschaftlichen Theiler von α, β theilbar.

Wenn zwei Zahlen ausser einer Einheit keinen anderen gemeinschaftlichen Theiler haben, so sind sie in dem obigen Sinn prim zu einander.

Die Norm einer Zahl α, welche dem im vorigen Paragraphen definirten Körper Ω angehört, ist durch α theilbar, und der Quotient ist eine ganze Zahl, die ebenfalls dem Körper Ω angehört.

Wenn α und β zu dem Körper Ω gehören und α durch β theilbar ist, so lässt sich auch $N(\alpha)$ durch $N(\beta)$ theilen.

Zwei Zahlen α, β heissen *congruent bez. des Moduls μ,* wenn ihre Differenz durch μ theilbar ist und im anderen Fall *nicht congruent.*

Die Anzahl der einander zu je zweien bez. des Moduls μ *nicht congruenten Zahlen des Körpers* Ω *ist dem absoluten Werth der Norm von* μ, $N(\mu)$ *gleich. Wenn* μ *eine Einheit ist, so sind die Zahlen des Körpers* Ω *sämmtlich congruent Null* (mod. μ) *und ist* $N(\mu) = \pm 1$.

Eine algebraische Zahl μ heisst *zerlegbar*, wenn sie Theiler zulässt, die von einer *Einheit* und den zu μ *associirten* Zahlen verschieden sind; im anderen Fall wird sie *unzerlegbar* genannt. Man verwechsele diese beiden Definitionen nicht mit den beiden folgenden:

Eine von Null verschiedene ganze Zahl μ heisst *prim*, wenn zwei beliebige Zahlen von Ω, die durch μ nicht theilbar sind, ein Product liefern, welches sich ebenfalls durch μ nicht theilen lässt; im anderen Fall heisst die Zahl μ *zusammengesetzt*.

Nur für specielle Körper Ω sind die beiden Definitionen *äquivalent*, d. h. ist jede *Prim*zahl auch *unzerlegbar* und umgekehrt; *dieser Fall tritt z. B. bei dem Körper der rationalen Zahlen ein und bei dem quadratischen Körper der rationalen complexen Zahlen.*

Im Allgemeinen indessen ist jede zerlegbare Zahl auch zusammengesetzt, jede zusammengesetzte Zahl aber nicht nothwendigerweise auch zerlegbar.

Wenn bei einem Körper Ω die beiden Begriffe äquivalent sind, *so lässt sich jede zerlegbare Zahl auf eine einzige Art als Product einer endlichen Anzahl unzerlegbarer Factoren darstellen (vorausgesetzt, dass zwei associirte Zahlen nicht als voneinander verschieden angesehen werden); anderenfalls lässt sich eine solche Zerlegung einer zerlegbaren Zahl in unzerlegbare Factoren auf mehrere Arten ausführen.*

Um diese Singularität zu beseitigen, durch welche die Euclid'schen Gesetze über die Theilbarkeit ihre Geltung für die Zahlen des Körpers Ω vollständig verlieren würden, hat Kummer den Begriff der *idealen* Zahlen eingeführt, der alle diese alten Gesetze der Theilbarkeit wieder herstellt. Wir wollen an einem speciellen Beispiel diesen wichtigen Begriff erklären.

Es liege der quadratische Körper Ω vor, der aus einer Wurzel der Gleichung $\theta^2 + 5 = 0$ entstanden ist. Dedekind a. a. O.

Die vier ganzen Zahlen

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3, \quad \mu = 1 - \theta, \quad \nu = 1 + \theta$$

sind unzerlegbar, sind aber durch die Relation $\alpha\beta = \mu\nu$ mit

einander verbunden; mithin ist z. B. α nicht prim, weil das Product der beiden Zahlen μ, ν durch α theilbar ist.

Wären α, β, μ, ν reelle ganze Zahlen, so würde sich aus der vorstehenden Relation ableiten lassen

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2, \quad \beta = \beta_1 \beta_2, \quad \mu = \alpha_1 \beta_2, \quad \nu = \alpha_2 \beta_1,$$

worin die Zahlen α_1 und β_1 wie auch α_2 und β_2 prim zueinander sind; jede durch α_1 theilbare Zahl ω würde den beiden Congruenzen genügen:

$$\beta\omega \equiv 0 \pmod{\mu}, \quad \nu\omega \equiv 0 \pmod{\alpha}.$$

Falls die vorstehende Zerlegung sich nicht wirklich ausführen lässt, denken wir sie uns *ideal,* d. h. nur in der Vorstellung, gemacht und führen die *idealen* Zahlen α_1, α_2, β_1, β_2 ein, die also dadurch definirt sind, *dass jede durch α_1 theilbare Zahl ω einer der beiden obigen Congruenzen genügen muss.* In dem vorliegenden Fall sind die *idealen* Zahlen α_1, α_2, β_1, β_2, die sich nicht wirklich bilden lassen, doch in dem angegebenen Sinn durch die Congruenzen

$$\begin{aligned} (1+\theta)\,\omega &\equiv 0 \pmod{2} \quad (\alpha_1), \\ (1-\theta)\,\omega &\equiv 0 \pmod{2} \quad (\alpha_2), \\ (1-\theta)\,\omega &\equiv 0 \pmod{3} \quad (\beta_1), \\ (1+\theta)\,\omega &\equiv 0 \pmod{2} \quad (\beta_2) \end{aligned}$$

definirt.

Durch die Einführung dieser Zahlen wird erreicht, dass sich die Zahlen α, β, μ, ν, die unzerlegbar schienen, in

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 = \alpha_1^{\,2}, & \beta &= 3 = \beta_1 \beta_2, \\ \mu &= 1 - \theta = \alpha_1 \beta_2, & \nu &= 1 + \theta = \alpha_1 \beta_1 \end{aligned}$$

zerlegen lassen; es ergibt sich ferner, dass α_1, β_1, β_2 keine *idealen Primzahlen* sind.

Ehe wir das Kapitel der *idealen Zahlen* verlassen, wollen wir die Betrachtung hier wiedergeben, die Kummer angestellt hat, um zu zeigen, auf welche Art man sich die Einführung dieser neuen Dinge zu denken hat.

Wenn in der Ebene zwei sich schneidende Kreise gegeben sind, so heisst die Gerade, welche durch die zwei den beiden Kreisen gemeinschaftlichen Punkte geht, *Radicalaxe* oder *Potenzlinie;* sie besitzt die Eigenschaft, der Ort der Punkte zu sein, welche die Beschaffenheit haben, dass die von ihnen nach den beiden Kreisen gezogenen und von den Berührungspunkten begrenzten Tangenten einander gleich sind. Wenn die beiden

Kreise sich nicht schneiden, so versagt die erstere Definition der Radicalaxe, sie lässt sich aber alsdann als Ort der Punkte definiren, für welche die zweite Eigenschaft gilt.

Auf ähnliche Weise gehen wir von dem Fall aus, in welchem die Zahlen α_1, β_1, α_2, β_2 wirklich existiren, finden eine Eigenschaft dieser Zahlen, die durch die obigen Congruenzen ausgedrückt wird, und lassen diese Eigenschaft alsdann auch in dem Fall gelten, in welchem die Zahlen nicht mehr, wie früher, existiren; es gelingt uns so, Grössen zu individualisiren, welche man als eine Erweiterung jener Zahlen ansehen kann, welche in dem ersten Fall wirklich existirten.

Der Begriff der *idealen Zahlen* wurde von Kummer für den speciellen Fall eingeführt, in welchem die Fundamentalgleichung eine *Kreistheilungsgleichung* (siehe Kap. 5, § 7, S. 95) ist, *Crelle*, 35, 40, 53; *Journ. de Liouville*, Bd. 16, 1851; *Berl. Akad.*, 1856.

Mit der Einführung der *Ideale* lässt sich für jeden Körper Ω die volle Geltung aller gewöhnlichen Gesetze über die Theilbarkeit der Zahlen wieder herstellen; diese Ideale eignen sich daher ganz besonders dazu, eine für alle Fälle gültige Theorie der Theilbarkeit aufzustellen.

Die Ideale, welche eine ausnahmslose eindeutige Zerlegung für die Zahlen eines jeden Körpers, nicht nur des Kreistheilungskörpers gestatten, sind von Dedekind eingeführt worden. Siehe Dirichlet, *Berl. Acad.*, 1840, 1841, 1846; Dedekind, *Ueber die Anzahl der Idealklassen etc.*, Braunschweig 1877; *Ueber den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale etc., Gött. Abhandl.*, Bd. 23, 1878; *Sur la théorie des nombres alg., Bull. de Darboux*, 1[te] Ser., Bd. 11, 1876 und 2[te] Ser., Bd. 1, 1877. Die ganze Theorie findet man in dem letzten Theil der 4. Auflage des Dirichlet-Dedekind'schen Werks: *Die Zahlentheorie*, auch ital. von Faifofer, Venedig 1881, dargestellt; ebenso in Kapitel 18 des Buchs: *Die Lehre von der Kreistheilung* von Bachmann, Leipzig 1872.

Einen anderen Weg zur Lösung dieser Frage hat L. Kronecker eingeschlagen. Die Kronecker'schen Untersuchungen sind niedergelegt in der Festschrift zu Kummer's Doctorjubiläum: *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, Crelle*, 92.

Der Zusammenhang zwischen diesen zwei Theorien ist in vorzüglicher Weise von H. Weber im 2. Bd. seiner *Algebra* auseinandergesetzt worden.

Von anderen hierher gehörigen Arbeiten sind zu nennen: Hilbert, *Ueber die Zerlegung der Ideale, Math. Ann.*, 44; *Grundzüge einer Theorie der Galois'schen Zahlkörper, Gött. Nachr.*, 1894; Hurwitz, *Zur Theorie der Ideale, Gött. Nachr.*, 1894 sowie *Gött. Nachr.*, 1895; ferner einige neuere Schriften von Hensel. Die Hensel'sche Arbeit wurde der Naturforscherversammlung in Braunschweig 1897 überreicht, siehe auch *Gött. Nachr.*, 1897, S. 247 und 254. Hensel hat die Theorie der algebraischen Zahlen durch eine Art Reihenentwickelungen zu begründen gesucht. Weitere Untersuchungen über die algebraischen Zahlen und die Ideale sind angestellt worden von: Fuchs, *Crelle*, 65; Selling, *Zeitschr. f. Math. u. Phys.*, 1865; Zolotareff, *Liouville's Journ.*, 1880.

Schliesslich bemerken wir noch, dass eine bemerkenswerthe und umfassende Uebersicht, die auch einen hervorragenden Ausbau der Theorie bedeutet, neuerdings in den *Jahresberichten der Mathem.-Vereinigung*, Bd. 4, 1894, 1895 (Hilbert, *Theorie der algebraischen Zahlkörper*, Berlin 1897) erschienen ist. In dieser Arbeit findet man auch eingehende historische und literarische Angaben.

§ 3. Die transcendenten Zahlen.

Wenn man von den algebraischen Zahlen nur die *reellen* berücksichtigt, so kann man sich die Frage vorlegen, ob es möglich ist, jede reelle, im Allgemeinen irrationale Zahl als eine algebraische Zahl d. h. also als die Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Coefficienten anzusehen.

Die Antwort auf diese Frage fällt verneinend aus; es existiren also *nicht-algebraische* oder *transcendente* Zahlen. Den Nachweis der Existenz der transcendenten Zahlen hat zuerst Liouville geliefert, *Compt. Rend.*, 1844 und *Journ. de Liouville*, 16, 1851; später hat den Gegenstand Georg Cantor, *Crelle*, 77, 1873 wieder aufgenommen. Eine Darstellung des Cantor'schen Beweises findet man auch bei F. Klein, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie*, ausgearbeitet von Taegert, Leipzig 1895, auch ital. von Giudice, Turin 1896.

In Verbindung mit der Theorie der transcendenten Zahlen steht das Problem, die Zahlen π, *das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser*, und e, *die Basis des natürlichen*

Logarithmensystems, auf elementar-geometrischem Weg zu construiren; d. h. mit Zirkel und Lineal allein. Mit der ersten dieser beiden Fragen hängt das viel berufene *Problem der Quadratur des Kreises* zusammen.

Es ist bewiesen worden, dass π und e nicht nur irrational, sondern transcendent sind, d. h. *nicht die Wurzeln algebraischer Gleichungen mit rationalen Coefficienten sein können;* daraus folgt die Unmöglichkeit, sie geometrisch, auf die oben angegebene Art, zu construiren.

Dass die Zahl π *irrational* sei, hat Lambert, *Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur des Zirkels suchen*, 1770 nachgewiesen; dann hat Legendre, *Élém. de géom.*, Paris 1794 gezeigt, dass auch π^2 irrational ist. Im Jahre 1873 wurde von Hermite in der berühmten Abhandlung: *Sur la fonction exponentielle, Compt. Rend.*, 77, 1873 bewiesen, dass e transcendent ist, und auf den Betrachtungen Hermite's fussend, wies dann Lindemann im Jahr 1882, *Math. Ann.*, 20 auch die Transcendenz von π nach. Vereinfacht wurden die Untersuchungen dieser Autoren von Weierstrass, *Berl. Berichte*, 1885; Bachmann, *Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen*, Leipzig 1892; Hilbert, Hurwitz und Gordan, *Gött. Nachr.*, 1893; *Compt. Rend.*, 1893; *Math. Ann.*, 43.

§ 4. **Die Zahl π.**

Diese als *das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser* definirte Zahl ist nicht nur irrational sondern transcendent; vergl. § 3. Man pflegt sie die Ludolf'sche Zahl nach einem Mathematiker zu nennen, der am Ende des 16ten und Anfang des 17ten Jahrhunderts lebte, und sie zuerst bis auf 36 Decimalstellen berechnete. Machin führte 1706 die Berechnung bis auf 100 Stellen durch; er benutzte dabei die Formel

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} =$$

$$= 4\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7 + \cdots\right\} -$$

$$- \left\{\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{239}\right)^7 + \cdots\right\}.$$

De Lagny rechnete dann 127, Richter 500 und Shanks nach einander 440, 607 und 707 Stellen aus, *Proc. of the Roy. Soc.*, Bd. 21, 1873.

Wir geben die 35 ersten Decimalstellen des Werthes von π hier an:

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288 \cdots.$$

In dem *Papyrus Rhind*, 2000 Jahre vor Christi Geburt, wird als Werth von π die Zahl $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16 \cdots$ angeführt.

Die folgenden Brüche sind Annäherungswerthe von π:

$$\frac{22}{7},\quad \frac{333}{106},\quad \frac{355}{113},\quad \frac{103993}{33102},\quad \frac{104348}{33215},\quad \frac{208341}{66317},\quad \frac{312689}{99532},\ \cdots.$$

Die Hauptformeln bez. des Zahlenwerthes von π sind:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \text{ (die Wallis'sche Formel)},$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots, \text{ (die Leibnitz'sche Formel)},$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,\frac{1}{7 \cdot 2^7} + \cdots,$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots,$$

$$\frac{5\pi}{12} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots,$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots,$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \cdots.$$

Andere aus den Quadraten, Cuben oder höheren Potenzen der reciproken natürlichen Zahlen gebildete Reihen, welche die Potenzen von π darstellen, findet man in Kap. 4, § 2.

Ueber die Zahl e, die Euler'sche Zahl, etc. siehe Kap. 18.

Kapitel XXII.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

§ 1. Allgemeines. Wahrscheinlichkeit der Wirkungen und Wahrscheinlichkeit der Ursachen.

Wenn nicht *alle* Ursachen für das Eintreffen eines Ereignisses feststehen, sondern einige von ihnen unbekannt oder aus irgend welchen Gründen nicht zu ermitteln sind, alsdann kann das Ereigniss auf die eine Art eher eintreten als auf die andere. Jede der Arten, auf welche das Phänomen sich ereignen kann, heisst einer der *möglichen Fälle* des Ereignisses; die Anzahl aller dieser Fälle kann *endlich und klein, endlich und sehr gross* oder *unendlich gross* sein.

Diese sämmtlichen möglichen Fälle lassen sich in Gruppen vereinigen, indem man jeder Gruppe alle diejenigen Fälle zuweist, die wir aus irgend einer Ursache als *äquivalent* betrachten wollen oder können.

Die Gesammtheit aller in einer Gruppe enthaltenen Fälle sehen wir als *ein einziges Ereigniss* an.

So charakterisirt jede Gruppe ein Ereigniss. Wenn wir z. B. aus einer Urne, welche weisse und schwarze Kugeln enthält, eine Kugel herausnehmen, so ist es natürlich, die beiden Begebenheiten des Herausnehmens je einer weissen Kugel, auch wenn die Kugeln verschieden sind, als äquivalent zu betrachten. Wir sagen, in beiden Fällen sei dasselbe Ereigniss eingetreten.

Die Anzahl aller in einer Gruppe enthaltenen Fälle bildet die Zahl der für das Eintreten des Ereignisses, welches durch diese Gruppe charakterisirt wird, *günstigen Fälle.* Wenn in der obigen Urne 4 weisse und 10 schwarze Kugeln sind, so beträgt die Anzahl der für die weissen Kugeln günstigen Fälle 4.

Man nennt *mathematische Wahrscheinlichkeit* des Eintretens eines Ereignisses *das Verhältniss der Anzahl der günstigen Fälle zu der Anzahl der möglichen Fälle,* vorausgesetzt, dass man alle möglichen Fälle als *gleich möglich* anzusehen hat.

Unter diesem letzten Vorbehalt verstehen wir, dass nicht andere störende Ursachen das Eintreten des Ereignisses beeinflussen dürfen, d. h. also, dass die Ursachen, die in Wirkung sind, so beschaffen sein müssen, dass sich kein vernünftiger Grund finden lässt, warum das Phänomen sich eher auf die eine der möglichen Arten als auf die andere ereignen solle. So würde in dem obigen Beispiel, wenn eine der Kugeln andere Dimensionen als die übrigen hätte, dies natürlich eine nicht geringe störende Ursache bilden und wir würden die Formeln der mathematischen Wahrscheinlichkeit nicht mehr für anwendbar halten können.

Aus der gegebenen Definition folgt, *dass die Wahrscheinlichkeit immer durch einen echten zwischen* 0 *und* 1, *mit Einschluss der Enden, liegenden Bruch dargestellt wird. Wenn die Wahrscheinlichkeit Null ist, so bedeutet dies die Unmöglichkeit des Ereignisses; ist die Wahrscheinlichkeit gleich* 1, *so besteht die Gewissheit für das Eintreten des Ereignisses.*

Theilen wir die Gruppe aller günstigen Fälle in eine gewisse Anzahl von Untergruppen A, B, $\cdots$, so vollzieht sich selbstverständlich dasselbe Ereigniss, mag nun einer der günstigen Fälle der Untergruppe A oder einer der Fälle der Untergruppe B etc. eintreten.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss sich in der Untergruppe A oder B etc. zuträgt, heisst *partielle Wahrscheinlichkeit* und die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses wird alsdann die *totale Wahrscheinlichkeit* genannt.

Die totale Wahrscheinlichkeit ist die Summe aller partiellen Wahrscheinlichkeiten.

Man habe zwei oder mehrere Ereignisse, die gleichzeitig vorkommen sollen; es handele sich z. B. um zwei Urnen, die eine mit weissen und schwarzen, die andere mit rothen und grünen Kugeln und man solle aus der ersten eine Kugel herausnehmen und ebenso aus der zweiten.

Das aus dem Zusammentreffen des ersten und zweiten Ereignisses resultirende Ereigniss heisst *zusammengesetzt* und seine Wahrscheinlichkeit *zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.*

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit ist dem Product aus den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse, aus denen sie besteht, gleich.

Die Probleme über die Wahrscheinlichkeiten kann man in zwei Kategorien unterscheiden, die der *Wahrscheinlichkeit der Wirkungen* und die der *Wahrscheinlichkeit der Ursachen,* welche

man auch die Probleme der *Wahrscheinlichkeit a posteriori bez. a priori* nennt.

Bei den ersteren wird nur die Wahrscheinlichkeit betrachtet, ob gewisse gegebene Wirkungen feststehender Ursachen eintreten oder nicht eintreten.

Bei den zweiten dagegen weiss man, dass eine Begebenheit oder mehrere Begebenheiten, die man als die Folge derselben Ursache zu betrachten hat, auf eine gewisse Art vor sich gegangen sind, und sucht die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass die Ursache dieser Begebenheiten eher die eine als die andere von allen als möglich festgestellten Ursachen sei, d. h. man sucht zu eruiren, welche von allen diesen Ursachen die wahrscheinlichste ist.

Ein sehr einfaches Beispiel ist das folgende: Man habe n Urnen, die weisse und schwarze Kugeln enthalten; die erste enthalte a_1 weisse und b_1 schwarze, die zweite a_2 weisse und b_2 schwarze u. s. w. Es wird eine weisse Kugel gezogen und man weiss nicht, aus welcher Urne sie entnommen ist. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie aus der ersten, wie gross, dass sie aus der zweiten etc. Urne genommen ist?

Zu den Problemen der Wahrscheinlichkeit der Ursachen gehört die sogenannte *Fehlertheorie.* Eine Grösse ist wiederholt mit der grössten Genauigkeit gemessen worden und man hat verschiedene Masse gefunden. Welcher Werth ist der *wahrscheinlichste*, d. h. derjenige, der die grösste Wahrscheinlichkeit für sich hat?

Bevor wir diesen Paragraphen schliessen, müssen wir noch erklären, was man unter *mathematischer Hoffnung* und *wahrscheinlichem Werth* zu verstehen hat.

Wenn ein Spieler, falls er gewinnt, die Summe A einziehen würde, und wenn die Wahrscheinlichkeit, dass er gewinnt, p ist, so heisst das Product pA seine *mathematische Hoffnung.* Wenn er die Summe A' gewinnen würde, wenn das Ereigniss von der Wahrscheinlichkeit p' eintritt, die Summe A'' bei einem Ereigniss von der Wahrscheinlichkeit p'' u. s. w., *so ist seine mathematische Hoffnung:*

$$p'A' + p''A'' + \cdots.$$

Damit ein Spiel gleich sei, ist es nöthig, dass die mathematischen Hoffnungen aller Spieler einander gleich seien.

Die mathematische Hoffnung eines Spielers ist dabei seinem Einsatz gleich, d. h. der Summe, die er in dem Spiel zu verlieren in Gefahr ist.

Der *wahrscheinliche Werth* einer Grösse A ist die *mathematische Hoffnung* eines Spielers, dass, wenn er die Wahrscheinlichkeit p hat zu gewinnen, er eine Summe gleich A erhalten wird; wenn die Grösse A die Werthe $A', A'', \cdots$ annehmen kann, so ist der wahrscheinliche Werth von A, $p'A' + p''A'' + \cdots$.

In Bezug auf die mathematische Hoffnung ist das sogenannte *Petersburger Paradoxon*, das Daniel Bernoulli behandelt hat, berühmt geworden. Zwei Spieler A und B verabreden die folgenden Bedingungen: A wirft ein Geldstück in die Luft; wenn eine vorher bestimmte Seite, sagen wir die Kopfseite, fällt, bezahlt er an B die Summe 1, gewinnt dessen Einsatz und das Spiel ist zu Ende; kommt dagegen die andere Seite, sagen wir die Schriftseite, nach oben zu liegen, so geht die Partie weiter; fällt beim zweiten Wurf die Kopfseite, so bezahlt er die Summe 2 an B, erscheint dagegen wieder die Schriftseite, so wirft er zum drittenmal, bezahlt dann 4 an B, wenn die Kopfseite fällt; so fortfahrend hat A die Summen 8, 16, $\cdots$ zu bezahlen. Das Spiel ist zu Ende, wenn die vorher bestimmte Kopfseite erscheint und A hat dann nicht nur die betreffende Summe an B zu bezahlen, sondern auch den Einsatz von B gewonnen. Die Frage ist, welche Summe hat B einzusetzen, damit das Spiel gleich sei? oder welches ist die mathematische Hoffnung von B?

Man findet, dass die mathematische Hoffnung von B unendlich gross ist.

§ 2. Die Wahrscheinlichkeit der Wirkungen. Das Jacob Bernoulli'sche Theorem. Das Gesetz der grossen Zahlen.

Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereigniss eintritt, p ist, die für das Eintreffen des entgegengesetzten Ereignisses q, und μ Versuche unter denselben Bedingungen angestellt werden, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass das erste Ereigniss (unabhängig von der Reihenfolge, in welcher es eintritt) n mal erscheint,

$$\frac{\mu!}{n!\,(\mu-n)!}\,p^n q^{\mu-n}.$$

Bestimmt man n derart, dass diese Wahrscheinlichkeit ein *Maximum* wird, so erhält man den Satz:

Der wahrscheinlichste Werth der Zahl n ist die zwischen $\mu p - q$ und $\mu p + q$ liegende ganze Zahl oder kurz die Zahl μp, wenn man davon absieht, dass diese Zahl manchmal ein Bruch sein kann.

Der wahrscheinlichste Werth der Zahl $\mu - n$ ist

$$\mu - n = \mu q.$$

Das heisst:

Diejenige Combination hat die grösste Wahrscheinlichkeit für sich, bei welcher die Ereignisse in einer Anzahl auftreten, die ihrer Wahrscheinlichkeit proportional ist.

Das Bernoulli'sche Theorem sagt nun aus, dass bei fortgesetzter Vermehrung der Anzahl der Versuche die jedesmal erhaltene Combination sich immer mehr derjenigen nähern muss, welche die grösste Wahrscheinlichkeit für sich hat.

Wendet man die Stirling'sche Formel, vergl. S. 17, an

$$\lim_{r=\infty} \frac{r!}{e^{-r} r^r \sqrt{2\pi r}} = 1,$$

so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss mit der Wahrscheinlichkeit p bei μ Versuchen gerade μp mal vorkomme (die grösste Wahrscheinlichkeit) aus der Formel

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu p q}}.$$

Diese grösste Wahrscheinlichkeit convergirt daher gegen Null, wenn die Anzahl μ der Versuche vermehrt wird.

Um so mehr muss daher bei wachsendem μ die Wahrscheinlichkeit, dass die Zahl n, welche angibt, wie oft das Ereigniss sich wiederholt, eine beliebige andere von μp verschiedene bestimmte Zahl sei, gegen Null convergiren.

Wir wollen die Differenz zwischen dem Werth von n und dem wahrscheinlichsten Werth von n, d. h. μp, *die absolute Abweichung* nennen und $h = \mu p - n$ setzen; alsdann ist das Verhältniss $\frac{h}{\mu}$ *die relative Abweichung.*

Die Wahrscheinlichkeit, dass das günstige Ereigniss n mal vorkomme, d. h. dass die Abweichung gleich h sei, wird annähernd durch

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu p q}}\, e^{-\frac{h^2}{2\mu p q}}$$

gegeben, wenn man $\frac{h}{\mu}$ und $\frac{h}{\sqrt{\mu}}$ hinreichend klein voraussetzt.

Die Zahl h ist ihrem Wesen nach eine *ganze* positive oder negative Zahl. Es ist jedoch für die Rechnungen von Vortheil, sie durch eine stetige Variabele zu ersetzen, welche alle möglichen Werthe annehmen kann.

Man erhält alsdann: *Die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung zwischen* $-\alpha$ *und* $+\alpha$ *liege, wird durch die Formel ausgedrückt:*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu p q}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-\frac{h^2}{2\mu p q}} dh,$$

welche, wenn man $\frac{h}{\sqrt{2\mu p q}} = t$ *setzt, die Form annimmt:*

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2\mu p q}}} e^{-t^2} dt.$$

Vermehrt man die Anzahl μ *der Versuche und lässt der oberen Grenze* α *der Abweichung ihren bestimmten Werth, so convergirt die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung kleiner als* α *sei, gegen Null; dies bedeutet aber: es ist die Tendenz vorhanden, dass die Abweichung jede beliebige Zahl* α *übertreffe. Mit anderen Worten: durch Vermehrung von* μ *wird die absolute Abweichung über jede Grenze hinaus vermehrt.*

Wenn die absolute Abweichung aber wächst, so wächst sie doch immer so, dass ihr Verhältniss zu μ, $\frac{h}{\mu}$, *d. h. also die relative Abweichung, der Null zustrebt.* Dieses Theorem hat in der folgenden einfacheren Form Bernoulli aufgestellt.

Wenn μ *in das Unendliche wächst, d. h., wenn man die Anzahl der Versuche unbegrenzt vermehrt, so hat das Verhältniss* $\frac{n}{\mu}$, *worin die Zahl* n *angibt, wie oft das Ereigniss, welches die Wahrscheinlichkeit* p *besitzt, eingetreten ist, die Tendenz, der Wahrscheinlichkeit* p *selbst gleich zu werden;* $\lim \frac{n}{\mu} = p$.

Nimmt man z. B. aus einer Urne, welche eine schwarze und zwei weisse Kugeln enthält, eine Kugel heraus, legt dann die herausgenommene Kugel wieder in die Urne zurück und wiederholt dieses Verfahren sehr oft, so muss sich schliesslich ergeben, dass die Zahl der Fälle, in welchen eine weisse Kugel gezogen wurde, *annähernd* doppelt so gross ist, als die Zahl der Fälle, in denen die Kugel schwarz war.

Ein Theorem, das als Verallgemeinerung des Bernoulli'schen angesehen werden kann, und aus dem das letztere sich als Zusatz ableiten lässt, ist das sogenannte Theorem des *arithmetischen Mittels*.

Eine Grösse möge die Werthe $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ annehmen können und die bezügl. Wahrscheinlichkeiten für diese möglichen Werthe seien $p_1, p_2, \cdots, p_r$. Nach der Definition in § 1 ist der wahrscheinliche Werth der Grösse

$$p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2 + \cdots + p_r\lambda_r = V.$$

Es mögen μ Versuche angestellt werden und man erhalte für die Grösse einmal den Werth z_1 (welcher einer der Werthe λ sein wird), ein anderes Mal z_2 (ebenfalls einen Werth λ) und so weiter.

Das arithmetische Mittel

$$\frac{z_1 + z_2 + \cdots z_\mu}{\mu} = M$$

der erhaltenen μ Werthe strebt mit dem Wachsen von μ dem wahrscheinlichen Werth V zu, d. h. $\lim_{\mu=\infty} (M - V)^2 = 0$.

Nehmen wir insbesondere an, es sei $r = 2$; um einen speciellen Fall herauszugreifen, wollen wir voraussetzen, wir befänden uns in demselben Fall, wie bei dem Bernoulli'schen Theorem, d. h. es handele sich um ein Ereigniss von der Wahrscheinlichkeit p und das ihm entgegengesetzte von der Wahrscheinlichkeit q, so dass

$$p + q = 1$$

ist. (Man kann dabei wieder an eine Urne mit a weissen und b schwarzen Kugeln denken, wobei

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$$

sein würde.) Hier sind es *zwei* Werthe, welche die Grösse haben kann: *entweder tritt das Ereigniss ein oder es tritt nicht ein und dann liegt das entgegengesetzte Ereigniss vor.* Um das Problem auf Zahlen zurückzuführen, müssen wir die Werthe λ_1, λ_2 festsetzen, d. h. wir müssen bestimmen, welche Zahl sich auf das Eintreffen des Ereignisses von der Wahrscheinlichkeit p und welche sich auf das andere beziehen soll. Handelte es sich um ein Spiel, so würde die Zahl λ_1 dem Einsatz des Spielers entsprechen, welcher bei dem Eintreffen des Ereignisses von der Wahrscheinlichkeit q gewinnt und umgekehrt.

Nun ist der wahrscheinliche Werth $p\lambda_1 + q\lambda_2$. Der Einfachheit wegen setzen wir ihn gleich Null und bestimmen also $\lambda_1 = q$, $\lambda_2 = -p$. Die Formel des Theorems erhält dann die einfache Gestalt

$$\lim_{\mu=\infty} M^2 = 0\,.$$

Es bleibt nur noch M zu bestimmen. Nach μ Versuchen sei das Ereigniss von der Wahrscheinlichkeit p, n mal, das andere also $\mu - n$ mal eingetreten. Da wir jedem Ereigniss der ersteren Art den Zahlenwerth q und jedem der 2ten Art den Zahlenwerth $-p$ beilegen müssen, so wird das Mittel aus den erhaltenen Werthen

$$M = \frac{nq - (\mu - n)p}{\mu} = \frac{n - \mu p}{\mu} = \frac{h}{\mu}\,;$$

der mittlere Werth M ist daher das, was wir *die relative Abweichung* genannt haben; daraus ergibt sich offenbar das Bernoulli'sche Theorem.

Diese Betrachtung ist wichtig, weil sie einen Zusammenhang zwischen dem Bernoulli'schen Theorem und der *Fehlerrechnung* herstellt, die in dem folgenden Paragraphen entwickelt werden soll.

Die Summe der Producte des absoluten Werths jeder möglichen Abweichung oder ihres Quadrats mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit (siehe den vorigen Paragraphen) wird *der wahrscheinliche Werth* der Abweichung oder des Quadrats der Abweichung genannt.

Diese wahrscheinlichen Werthe stellt man bezüglich durch die Integrale dar:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\int_0^{\infty} h\, e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}}\, dh\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\int_{-\infty}^{+\infty} h^2 e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}}\, dh\,.$$

Der wahrscheinliche Werth des Quadrats der Abweichung nach μ Versuchen ist durch μpq gegeben;

der wahrscheinliche Werth des absoluten Werths der Abweichung dagegen durch

$$\frac{\sqrt{2\mu pq}}{\sqrt{\pi}} = 0{,}79789\sqrt{\mu pq}\,.$$

Er heisst auch *mittlere Abweichung.*

Daraus folgt:

Der wahrscheinliche Werth des Quadrats der Abweichung steht zu dem Quadrat des wahrscheinlichen Werths des absoluten Werths dieser Abweichung in dem Verhältniss von

$$\pi : 2.$$

Es gibt eine Abweichung, deren Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ beträgt; *die Wahrscheinlichkeit ist alsdann gleichgross, dass diese Abweichung überschritten wird oder nicht.*

Setzt man den Werth des oben angegebenen Integrals gleich $\frac{1}{2}$, so ergibt sich der Werth der Abweichung gleich

$$0{,}4760363 \sqrt{2\mu p q},$$

welche *wahrscheinliche Abweichung* heisst.

Das Verhältniss zwischen der wahrscheinlichen und der mittleren Abweichung ist constant und gleich 0,8463.

Die wahrscheinlichen und mittleren Abweichungen sind beide der Quadratwurzel aus der Anzahl der Versuche proportional.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei μ Versuchen die Abweichung kleiner als α sei, wird durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt, dessen untere Grenze Null ist, während die obere von $\frac{\alpha}{\sqrt{\mu}}$ abhängt (siehe oben).

Dieses Integral hat Gauss mit dem Symbol $\theta(t)$ bezeichnet und dabei unter t die obere Grenze verstanden.

Es hat sich als nothwendig herausgestellt, Tabellen der Werthe dieses bestimmten Integrals zu entwerfen, aus denen man jedesmal, wenn die Werthe von α und μ gegeben sind, die Wahrscheinlichkeit entnehmen kann. *Wenn* $\frac{\alpha}{\sqrt{\mu}}$ *wächst, so strebt der Werth des Integrals schnell der Einheit zu.*

An dem Ende des Kapitels bringen wir einen Theil einer solchen Tafel.

Das Gesetz der grossen Zahlen Poisson's, Compt. Rend., 1835 ist ein Versuch, das Bernoulli'sche Gesetz auf den Fall auszudehnen, in welchem sich die Wahrscheinlichkeit p bei jedem Versuch ändert.

§ 3. Die Wahrscheinlichkeit der Ursachen. Die Fehlertheorie.

Das wichtigste Problem der Wahrscheinlichkeit der Ursachen bezieht sich auf die sogenannte *Fehlertheorie oder Methode der kleinsten Quadrate*, welche von Gauss 1809, *Theoria motus* etc. begründet wurde, wenn sich freilich auch schon bei Legendre, *Nouv. méthode pour la détern. des orbites des comètes*, Paris 1805 Andeutungen davon finden.

Hat man mehrere Messungen derselben Grösse unter denselben Bedingungen ausgeführt, so ist jedenfalls der plausibelste Werth der Grösse durch ein sogenanntes *Mittel* gegeben, d. h. eine symmetrische Function der durch die Messungen gefundenen Werthe, welche die Eigenschaft besitzt, sich auf k zu reduciren, wenn diese Werthe sämmtlich gleich k werden. *Mittel* gibt es nun unendlich viele; das einfachste ist *das sogenannte arithmetische Mittel*, d. h. das Verhältniss zwischen der Summe jener Werthe und ihrer Anzahl.

Gauss hat den folgenden Satz als Postulat aufgestellt:

Führt man mehrere Messungen derselben Grösse unter denselben Bedingungen aus, so ist der wahrscheinlichste Werth der gemessenen Grösse das arithmetische Mittel aller durch die Messungen erhaltenen Werthe.

Man hat verschiedentlich versucht, dieses Gauss'sche Postulat zu beweisen, indem man gewisse andere Postulate, die unmittelbarer einleuchten, zuliess; es scheint aber nicht, dass die verschiedenen Beweise (von Encke, Schiaparelli etc.) einwandfrei sind; im Uebrigen steht es nicht fest, dass dieses Postulat überhaupt als mathematisch richtig anzunehmen ist; man sehe z. B. die Discussionen in den neueren Arbeiten von Bertrand und Poincaré nach. Später hat man auch versucht, wie es zuerst Bessel gethan hat, auf experimentellem Weg das Gauss'sche Princip zu beweisen.

Beachtenswerth ist, *dass jedes beliebige Mittel, wenn man die bei den verschiedenen Beobachtungen begangenen Fehler hinreichend klein voraussetzt, immer einen zwischen den Grenzen der Beobachtungen liegenden Werth liefert und dass die Werthe aller Mittel nur wenig von einander verschieden sind.*

Das arithmetische Mittel hat eine besondere Eigenschaft. Wenn $x_1, x_2, \cdots, x_\mu$ die μ ausgeführten Messungen bezeichnen und man Abweichungen oder Fehler die Differenzen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_\mu$ zwischen diesen Werthen und dem Mittel

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_\mu}{\mu}$$

nennt, so erhält man den Satz:

Die Summe der Quadrate der Abweichungen ist ein Minimum; d. h., wählt man an Stelle von x eine beliebige andere Zahl, so hat diese Summe immer einen grösseren Werth. *Diese Eigenschaft charakterisirt das arithmetische Mittel.*

Lässt man das Princip des arithmetischen Mittels gelten, d. h. gibt man zu, dass dasselbe den *wahrscheinlichsten* Werth des wirklichen Werths der Grösse darstellt, *so findet man die Wahrscheinlichkeit, dass die Differenz zwischen diesem Mittel und dem wahren Werth der Grösse zwischen h_0 und h_1 enthalten sei, als Werth des Integrals*

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{h_0}^{h_1} e^{-k^2 h^2} dh,$$

worin k eine gewisse constante Grösse bedeutet.

Und ähnlich gibt der Werth von

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-k^2 h^2} dh = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{k\alpha} e^{-t^2} dt = \theta(k\alpha) \quad \text{(vergl. § 2)}$$

die Wahrscheinlichkeit an, dass diese Differenz, welche der Fehler ist, der durch die Annahme des arithmetischen Mittels als Werth der Grösse begangen wird, ihrem absoluten Werth nach kleiner als α sei.

Das durch diese Formel dargestellte Gesetz heisst das *Fehlergesetz;* lässt man als *wahrscheinlichsten* Werth einen von dem arithmetischen Mittel verschiedenen Werth gelten, so erhält man ein anderes Fehlergesetz.

Wie man sieht, tritt auch in der Fehlertheorie dieselbe Gauss'sche θ-Function auf, wie in dem vorigen Paragraphen.

Der wahrscheinliche Fehler hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.

Die Constante k ist dem wahrscheinlichen Fehler λ umgekehrt proportional; es ist

$$k\lambda = 0{,}476936 \cdots.$$

Die Constante k heisst die *Genauigkeitszahl. Sie verhält sich direct wie die Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen.*

Nachdem das Fehlergesetz aufgestellt ist, wird, wie in den

§§ 1 und 2, der *wahrscheinliche Werth des Fehlers* als Summe der Producte seiner sämmtlichen möglichen Werthe mit den bezüglichen Wahrscheinlichkeiten definirt; es ergibt sich, dass *der wahrscheinliche Werth des Fehlers, der nicht mit dem wahrscheinlichen Fehler* λ *zu verwechseln ist, durch das Integral*

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty h e^{-k^2h^2}dh = \frac{1}{k\sqrt{\pi}}$$

gegeben ist, und dass die wahrscheinlichen Werthe des Quadrats. Cubus etc. des Fehlers bezüglich durch die Integrale

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty h^2 e^{-k^2h^2}dh = \frac{1}{2k^2},$$

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty h^3 e^{-k^2h^2}dh = \frac{1}{k^3\sqrt{\pi}},$$

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty h^4 e^{-k^2h^2}dh = \frac{3}{4k^4},$$

. . . .

ausgedrückt werden.

Diese Formeln sind sehr wichtig, weil man mit ihrer Hülfe und mittelst des Theorems über das Mittel im vorigen Paragraphen im Stand ist, k zu berechnen und zu gleicher Zeit sich von der Genauigkeit der angestellten Beobachtungen zu überzeugen. Denn, beachtet man, dass bei einer grossen Anzahl μ von Versuchen das Mittel aus den erhaltenen Werthen gegen den wahrscheinlichen Werth convergirt, und nennt s_1 die Summe der Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_\mu$ ihrem absoluten Werth nach, s_2 die Summe ihrer Quadrate, s_3 ihrer dritten, s_4 ihrer vierten Potenzen, *so ergeben sich die Annäherungsformeln*

$$\frac{s_1}{\mu} = \frac{1}{k\sqrt{\pi}},$$

$$\frac{s_2}{\mu} = \frac{1}{2k^2},$$

$$\frac{s_3}{\mu} = \frac{1}{k^3\sqrt{\pi}},$$

$$\frac{s_4}{\mu} = \frac{3}{4k^4},$$

welche zur Bestimmung von k und zur gegenseitigen Controle benutzt werden können.

Aus diesen Formeln lassen sich die folgenden ableiten:

$$\frac{\frac{s_2}{\mu}}{\left(\frac{s_1}{\mu}\right)^2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{\frac{s_3}{\mu}}{\left(\frac{s_1}{\mu}\right)^3} = \pi,$$

$$\frac{\frac{s_4}{\mu}}{\left(\frac{s_1}{\mu}\right)^4} = \frac{3\pi^2}{4},$$

welche sich bei den Versuchen als so genau ergeben haben, dass man, falls sie sich nicht bestätigen sollten, berechtigten Zweifel hegen darf, ob die Beobachtungen überhaupt angestellt, oder ob nicht ihre Resultate geändert worden sind. Die erste dieser Formeln lässt sich als Theorem auf die folgende Art ausdrücken:

Das Verhältniss zwischen dem Mittel der Quadrate der Fehler und dem Quadrat des Mittels dieser Fehler convergirt bei einer hinreichend grossen Anzahl von Beobachtungen gegen die Hälfte der Zahl π.

Es ist höchst auffallend, dass ein ähnliches Gesetz auch für das Eintreffen von Vorkommnissen zu gelten scheint, die nicht mehr für zufällig gehalten werden können. So hat man z. B. gefunden, dass bei 10000 Logarithmen in einer zehnstelligen Logarithmentafel die siebente Decimalstelle

990	mal	gleich	0,
997	„	„	1,
993	„	„	2,
1012	„	„	4,
. . .	. . .	. . .	. . . ist.

Wendet man auf diese Zahlen in einer gewissen Art die erste der vorstehenden Formeln an, so ergibt sich 1,561 ⋯, d. h. eine Zahl, die der Hälfte von π

$$\frac{\pi}{2} = 1,570 \cdots$$

sehr nahe kommt. Dieses Beispiel führt Bertrand an, *Calcul des probabilités,* Paris 1889, Introduction.

Wir wollen schliesslich noch ein anderes wichtiges Theorem mittheilen.

Man habe eine Messung vorzunehmen, zerlege sie in r Theile und messe mit den bezüglichen Correctionen einen jeden der r Theile; schliesslich bilde man die Summe. Selbstverständlich wird die Genauigkeit der ganzen Messung um so geringer sein, je grösser r ist; es gilt darüber der Satz, den schon Fourier vorausgesehen hat:

Die Genauigkeit der totalen Messung, die eine Summe von Theilmessungen ist, verhält sich umgekehrt, wie die Quadratwurzel aus r.

Und nun wollen wir die Tabelle der Werthe des Gauss'schen Integrals $\theta(t)$ für von zehntel zu zehntel Einheiten steigende Werthe von t bringen.

t	$\theta(t)$	t	$\theta(t)$
0,0	0,000 0000	2,0	0,995 3223
0,1	0,112 4630	2,1	0,997 0205
0,2	0,222 7025	2,2	0,998 1372
0,3	0,328 6267	2,3	0,998 8568
0,4	0,428 3922	2,4	0,999 3115
0,5	0,520 4999	2,5	0,999 5930
0,6	0,603 8561	2,6	0,999 7640
0,7	0,677 8010	2,7	0,999 8657
0,8	0,742 1010	2,8	0,999 9250
0,9	0,796 9082	2,9	0,999 9589
1,0	0,842 7008	3,0	0,999 9779
1,1	0,880 2050	3,1	0,999 9884
1,2	0,910 3140	3,2	0,999 9940
1,3	0,934 0080	3,3	0,999 9969
1,4	0,952 2851	3,4	0,999 9985
1,5	0,966 1052	3,5	0,999 9992 5691
1,6	0,976 3484	3,6	0,999 9996 4414
1,7	0,983 7904	3,7	0,999 9998 3285
1,8	0,989 0905	3,8	0,999 9999 2200
1,9	0,992 7904	3,9	0,999 9999 6522
		4,0	0,999 9999 8459

Zuerst haben sich wohl mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt: Blaise Pascal, Fermat, Huyghens, Moivre, die Brüder Daniel, Johann, Nicolaus und Jacob Bernoulli, Euler und Lagrange. Die *Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ars conjectandi,* von Jacob Bernoulli ist von R. Haussner

in Ostwald's Klassikern der exacten Wissenschaften in Uebersetzung herausgegeben worden. Die wichtigste systematische Arbeit über die analytische Wahrscheinlichkeitstheorie war die Laplace'sche: *Théorie analytique des probabilités,* Paris 1812, 1814, 1820, 4me édit., 1847, in welcher der Verfasser alle früheren Untersuchungen, seine eigenen sowohl, wie die anderer Schriftsteller, zusammenstellte.

Fortschritte in anderer Richtung machte die Wahrscheinlichkeitsrechnung durch die fast gleichzeitig mit der Laplace'schen Arbeit erschienenen Werke von Gauss, *Th. motus,* 1809; *Theoria combinationis observationum* etc., *Göttinger Acad.,* 5, 1821—1826 etc., welche den Grund zur Methode der kleinsten Quadrate legten, die sofort auf das Gebiet der Praxis übertragen, sich dort schnell weiter entwickelte.

Zahlreich sind die späteren Arbeiten von Laplace, Cauchy, Fourier, Encke, Bessel, Bienaymé, Poisson, Puissant, Tschebyscheff und Anderen über die Wahrscheinlichkeitstheorie und die Methode der kleinsten Quadrate. Nähere Angaben über diese Arbeiten findet man bei Todhunter, *History of the math. theory of probability, from the time of Pascal to that of Lagrange,* Cambridge 1865, oder auch am Schluss des Werks von Laurent, *Traité du calcul des probabilités,* Paris 1873.

Von Lehrbüchern über die Wahrscheinlichkeitsrechnung oder die Methode der kleinsten Quadrate citiren wir ausser dem oben erwähnten classischen Werk von Laplace, die Arbeiten von Lacroix, *Traité élément. du calcul des probabilités,* Paris 1806; Poisson, *Recherches sur la probabilité des jugements* etc., Paris 1837; Galloway, Edinburg 1838; Jahn, *Die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung,* Leipzig 1839; Quetelet, *Instructions populaires sur le calcul des probabilités,* Bruxelles 1828; *Théorie des probabilités,* ib., 1853 und schliesslich die Bücher von Laurent, *Traité du calcul des probabilités,* Paris 1873; Ferrero, *Esposizione del metodo dei minimi quadrati,* Firenze 1876; das wichtige und umfassende Werk Bertrand's, Paris 1889 und schliesslich den neueren *Calcul des probabilités* von Poincaré, Paris 1896, welcher in vielen Punkten an das Bertrand'sche Buch erinnert.

Kapitel XXIII.

Analytische Instrumente und Apparate.

Wir wollen in diesem Kapitel einige Angaben über die verschiedenen Instrumente machen, die zu dem Zweck erfunden wurden, die einzelnen analytischen Operationen auf mechanischem Weg auszuführen. Wir können uns nicht damit abgeben, sie eingehend zu beschreiben, sondern beschränken uns darauf, eine Uebersicht zu geben und in aller Kürze ihren Zweck zu besprechen. Ueber die Construction und den Gebrauch des Integraphen werden wir dagegen genauere Mittheilungen machen.

Wir wollen unsere Besprechung in drei Theile zerlegen; in dem ersten handeln wir von den Instrumenten, die bei den elementaren Rechnungen benutzt werden und daher *arithmetische* Apparate heissen; in dem zweiten ist von solchen die Rede, die zu den speciell sogenannten *algebraischen* Rechnungen dienen, d. h. zur Ermittelung der reellen Wurzeln einer Gleichung und eines Systems von Gleichungen; und in dem dritten Theil schliesslich kommen die Instrumente für die *Integral*rechnung zur Sprache, welche die Berechnung der bestimmten Integrale oder die Aufzeichnung der Integralcurve (des unbestimmten Integrals) vermitteln.

§ 1. Arithmetische Apparate. Die elementaren Operationen. Der Abacus.

Es gibt zwei Arten von arithmetischen Apparaten, erstens solche, welche die Resultate der arithmetischen Grundoperationen *genau* angeben und dann diejenigen mit sogenannter logarithmischer Scala, welche die Resultate nur mit einer für die Anwendung ausreichenden *Annäherung* liefern.

Die ersteren theilt man dann wieder in solche, bei welchen die Ergebnisse gefunden werden, indem man mit Eintheilungen versehene Lineale auf verschiedene Art mit einander combinirt, deren Bewegungen unabhängig von einander sind, und ferner



in solche, deren verschiedene Theile derart miteinander verbunden sind, dass sie eine Maschine in der eigentlichen Bedeutung dieses Worts bilden, bei welcher einzelne Theile, wenn sie in Bewegung gesetzt werden, auf eine einzige Art die Bewegung gewisser anderer Theile bestimmen.

Napier hat zuerst im Jahr 1617 einen Apparat der ersteren Art construirt und ihn in seiner *Rhabdologiae sive numerationis per virgulas libri* etc. beschrieben. Er bestand aus zehn Stäbchen, welche die Gestalt vierseitiger Parallelepipeda besassen und Ziffern trugen; diese Stäbchen konnten nebeneinander gelegt werden. Vergl. Moritz Cantor, *Geschichte der Math.*, Bd. 2, S. 723, 2. Aufl., Leipzig 1900. Seiner Gestalt wegen hat der Apparat den Namen der *Neperischen Rechenstäbe* erhalten. Er hat den Zweck, mittelst Addition und Subtraction allein die Berechnung der Producte und Quotienten mehrstelliger Zahlen zu ermöglichen.

Eine erste Verbesserung hat Caspar Schott mit ihm vorgenommen, der dieselben Lineale mit denselben Zahlen auf Cylinder brachte, die sich um ihre Axe drehen liessen.

Andere Vervollkommnungen verdankt man Petit, 1678; Poetius, 1728; Méan, 1731; Roussain, 1738, *Hist. de l'Acad.*; Prahl, 1789 und Roth, 1841. Die neueste und wichtigste Verbesserung des Napier'schen Instrumentes, die auch seine Verwendung in der Praxis erlaubt hat, rührt aber von Genaille und Lucas, 1885 her.

Was die eigentlichen sogenannten arithmetischen Rechenmaschinen angeht, bei welchen man durch Bewegungen, die auf mechanischem Weg von einander abhängig gemacht worden sind, die ersten vier Operationen der Arithmetik ausführen kann, so hat zuerst eine solche Blaise Pascal nach vielen mühsamen Versuchen im Jahr 1642 erfunden und später 1673 Leibnitz eine andere der Royal Society of London und kurz darauf der Pariser Academie vorgelegt. Vergl. wegen der Leibnitz'schen Rechenmaschine die *Zeitschr. für Vermessungswesen* von Jordan, Bd. 16, 1887. Zu erwähnen sind ferner die Roth'sche Maschine und das *Arithmometer* von Thomas, 1820, ein praktisches und sehr vollkommenes Instrument.

Von complicirteren sinnreichen Rechenmaschinen führen wir die Scheutz'sche[1]) an, der die Ideen von Babbage ausführte;

1) Scheutz construirte mit seinem Vater eine Rechenmaschine, die in England eingeführt und zur Ausrechnung der *„Engl. Life Table“* benutzt wurde.

sie war auf der Pariser Ausstellung im Jahr 1855 zu sehen. Schliesslich ist die Tschebyscheff'sche mit stetiger Bewegung zu erwähnen. (In der Assoc. franç. 1882 demonstrirt.) Eine eingehende Beschreibung aller dieser Maschinen findet man in dem neueren Werke von D'Ocagne. *Le calcul simplifié*, Paris 1894.

Ueber andere Rechenmaschinen, die vor einigen Jahren auf der Ausstellung in Nürnberg gezeigt wurden, siehe Dyck, *Katalog moderner mathematischer Apparate und Instrumente*, München 1892.

Wir gehen nun zu den Instrumenten der zweiten Art über, deren Typus der sogenannte *Rechenstab mit logarithmischer Scala* ist, welcher zuerst von Edmund Gunter[1]) 1624 kurz nach der Einführung der Logarithmen erdacht wurde. Mit dem Instrument wurden später verschiedene Veränderungen vorgenommen, die z. B. darin bestanden, die Scala, welche auf dem gewöhnlichen Lineal geradlinig ist, auf einem Kreis (Boucher) oder einer Schraubenlinie (Fuller) anzubringen oder die Zusammenlegbarkeit der Scala zu ermöglichen, um den Umfang des Instrumentes zu verringern (Mannheim). Die Genauigkeit der Rechnungen hängt bei diesen Linealen hauptsächlich von der Genauigkeit ihrer Construction ab, weil sie sich auf das Princip gründen, ein bewegliches Lineal in einem festen zu verschieben, auf welchen beiden die sogenannten *logarithmischen Scalen*, d. h. den Logarithmen der Zahlen entsprechende Theilungen eingerissen sind.

So bringt die Einführung der Logarithmen bei der Rechnung mit dem Rechenstab dieselben Vereinfachungen mit sich, wie bei der gewöhnlichen Rechnung; wir haben es also mit einem Instrument zu thun, welches sich in einer gewissen Art mit dem oben erwähnten Neperischen vergleichen lässt, nur mit dem Unterschied, dass den Zahlen ihre Logarithmen substituirt sind.

Mit dem *Rechenstab* lassen sich nicht nur gewöhnliche Rechnungen ausführen, sondern auch Gleichungen 2ten und 3ten Grads auflösen.

Eine genaue Beschreibung des Rechenschiebers findet man

---

1) Edmund Gunter erfand den logarithmischen Rechenstab (Gunter's Scala) 1624; siehe darüber: *The works of Edmund Gunter, containing the description and use of the sector, cross-staff, quadrant and other instruments*, published by Will. Leybourne, 5th ed., London 1673.

in den bezüglichen Werken von Lalanne[1]), Paris 1851; Benoit, *Règle à calcul*, Paris 1853; Elliot, *A treatise on the slide rule*, London; Guy, Paris 1855 und schliesslich von Q. Sella, *Regolo calcolatore*, Torino, Ditta Paravia, 2. Aufl., 1886; in das Französische übersetzt von Montefiore Levi, Paris 1863. Ueber die Geschichte und Classification der verschiedenen Arten von Rechenschiebern mit logarithmischer Theilung kann man auch einen Aufsatz von Favaro nachsehen, *Ist. Veneto*, 5, 5. Serie, 1879.

Ehe wir die Hinweise auf die Instrumente für elementare Rechnungen abschliessen, müssen wir noch die *Abacus oder graphischen Tabellen* erwähnen. Mit diesem Namen wird eigentlich nicht ein einziger Apparat, sondern eine ganze Kategorie von Instrumenten bezeichnet, die zur Ausführung verschiedener Rechnungen dienen; man kann einen Abacus für elementare Operationen, zur Lösung auch der transcendenten Gleichungen und zu trigonometrischen Rechnungen etc. construiren.

Im Wesentlichen besteht dieser Apparat aus einer Tabelle, auf welcher Punkte, Gerade oder Curven aufgezeichnet sind, von denen jede eine Nummer trägt; sind die Werthe gewisser Variabelen gegeben, so werden die Punkte, die diesen Werthen auf der Tabelle entsprechen, durch Gerade verbunden und die Schnittpunkte dieser Geraden miteinander oder mit auf der Tabelle verzeichneten Curven liefern den gesuchten Werth der unbekannten Variabelen; die gewöhnliche Multiplicationstabelle ist z. B. einer der einfachsten Abacus. Die Theorie, welche der Construction dieser Apparate zu Grunde liegt, heisst *Nomographie*. D'Ocagne hat auch einen Abacus zur Auflösung der allgemeinen Gleichung 3ten Grades construirt. Siehe D'Ocagne, *Nomographie* etc., Paris 1891, 2. stark vermehrte Ausg., 1899; *Le calcul simplifié*, Paris 1894.

§ 2. Algebraische Apparate. Auflösung der Gleichungen.

Von den Apparaten zur Auflösung der Gleichungen erwähnen wir zuerst diejenigen, die auf dem Princip der *Abacus*

1) Lalanne (*Description et usage de l'abaque ou compteur universel*, Paris 1845; *Instruction sur les règles à calcul*, ib. 1851) erfand ein Arithmoplanimeter, *Compt. Rend.*, 9, 10, 11, eine balance arithmétique oder Rechenmaschine, ib., 9, 1839 und eine balance algébrique, ib., 11, 1849, welche Gleichungen bis zum 7ten Grade auflöste.

beruhen (vergl. § 1). Es sind ihrer sehr viele construirt worden, speciell von D'Ocagne und Mehmke, vergl. Dyck, *Katalog* etc. *und Nachtrag,* München 1893. Alsdann sind die *Rechenschieber* anzuführen, welche die Auflösung der Gleichungen 2ten und 3ten Grads und auch derjenigen 5ten Grads mit drei Termen gestatten; siehe Sella a. a. O.

Ueberdies werden wir in dem folgenden Paragraphen bei der Besprechung der *Integraphen* eine Methode zur graphischen Auflösung der Gleichungen mittelst der Integraphen kennen lernen.

Schliesslich ist noch anzugeben, dass man auch mechanische Apparate in dem eigentlichen Sinn des Worts zur Auflösung eines Systems linearer Gleichungen construirt hat. Einer von ihnen rührt von Professor Veltmann her; seine Beschreibung findet man in dem citirten Werk von Dyck, ein anderer ist von Sir William Thomson (später Lord Kelvin), *Treatise on Natural philosophy*, Bd. 1, Cambridge 1886, S. 482; *Machine for the solution of simultan. lin. equat.*, London, *Roy. Soc. Proc.*, 28, 1878.

Der erste gründet sich auf Principien der Hydrostatik, wie z. B. auf das Princip der communicirenden Röhren; er enthält Hebel, an welche cylindrische Gefässe befestigt sind, die mit einer Flüssigkeit gefüllt werden; das Ganze steht seinerseits in einem mit Wasser gefüllten Gefäss; jeder Hebel entspricht einer linearen Gleichung und jeder Cylinder an jedem Hebel einer unbekannten Grösse. Aus den Höhen der Flüssigkeitssäulen werden die Annäherungswerthe der Unbekannten entnommen; wiederholt man das Verfahren, so lassen sich auch die anzubringenden Correcturen berechnen.

Der zweite Apparat dagegen enthält keine Flüssigkeiten, sondern Hebel, kleine Räder und Fäden, die sich um die Rädchen herumlegen.

Wir citiren dann noch Meslin, *Sur une machine à resoudre les équations, Compt. Rend.*, 1900.

§ 3. Apparate der Integralrechnung. Integraphen. Analysatoren.

Es gibt folgende Apparate für die Integralrechnung:

1. Solche, die zum Messen des Flächeninhalts ebener Figuren dienen, also den Werth des bestimmten Integrals einer graphisch dargestellten Function liefern. Man nennt sie im Allgemeinen

Planimeter; es gibt verschiedene Systeme derselben; am bekanntesten ist das sogenannte *Polarplanimeter* *Amsler's*[1]). Vergl. die *Encykl. der math. Wiss nsch.*, 2, S. 130.

2. Solche, die zum Aufzeichnen der Integralcurve bestimmt sind; sie sollen dazu dienen, das unbestimmte Integral einer graphisch dargestellten Function zu berechnen. Sie heissen *Integraphen* oder *Integratoren* und versehen nicht allein denselben Dienst, wie die unter 1 genannten, sondern überdies viele andere, wie wir später sehen werden.

3. Instrumente zur Integration einiger Typen von Differentialgleichungen. Siehe z. B. ein von Thomson, *Treat. on Nat. Phil.*, Bd. 1, Cambridge 1886 beschriebenes Instrument.

4. *Curvenmesser* zur Bestimmung der Länge eines Curvenbogens. Wir machen auf die Constructionen von Coradi in Zürich aufmerksam.

5. *Harmonische Analysatoren (Harmonic analysers)* schliesslich, welche Integratoren zur Berechnung jener bestimmten Integrale sind, die als Coefficienten einer Fourier'schen Reihe (siehe Kap. 19, § 2) auftreten:

$$\int_0^{2\pi} \cos nt \cdot f(t)\,dt, \quad \int_0^{2\pi} \sin nt \cdot f(t)\,dt.$$

Von den harmonischen Analysatoren sind zu erwähnen der Thomson'sche (Lord Kelvin) a. a. O., der von Henrici, von Sharp etc. Man sehe darüber eine Anmerkung von O. Henrici in dem oben citirten Buch von Dyck und andere auf den Seiten 212—222 dieses Buches enthaltene Angaben nach. Besonders leistungsfähig scheint ein neuerdings von Michelson und Stratton, *Phil. Mag.*, 1898 mit Benutzung von Spiralfedern construirtes Instrument.

Von allen diesen Instrumenten soll nur der von Coradi modificirte *Integraph* von Abdank-Abakanowicz etwas genauer beschrieben werden, dessen Anwendungen sehr verschiedenartig sind und von welchem ein Exemplar dem Verfasser an dem mathematischen Institut der Universität Pavia zur Verfügung stand.

---

1) Amsler, *Anwendung des Integrators (Momentanplanimeters) zur Berechnung des Auf- und Abtrags von Eisenbahnen,* Zürich 1875 erfand 1854 das Polarplanimeter, 1855 den Integrator, ein Planimeter ohne gleitende Bewegung der Laufrolle und verschiedene andere Instrumente zur Inhaltsbestimmung von sphärischen Flächen etc.

Eingehendere Angaben über die Integraphen im Allgemeinen findet man in dem bekannten Werk von Abdank-Abakanowicz, *Die Integraphen*, deutsch von Bitterli, Leipzig 1889, von welchem auch eine französische Uebersetzung existirt.

Das Princip, welches dem Instrument zu Grunde liegt, ist sehr einfach. Denken wir uns eine Curve $y = f(x)$ aufgezeichnet und betrachten wir einen ihrer Punkte P mit den rechtwinkligen Coordinaten x_1, y_1. Auf der Abscissenaxe tragen wir die Länge 1 von dem Fusspunkt der Ordinate y_1 aus ab und bilden das rechtwinklige Dreieck, dessen Eckpunkte P, der Fusspunkt der Ordinate von P und der Endpunkt der abgetragenen Strecke 1 sind. *Die Hypotenuse dieses Dreiecks ist der Tangente an die Curve, deren Gleichung*

$$y = \int f(x)\,dx$$

lautet, stets parallel.

Das Instrument soll daher so construirt sein, dass, während eine Spitze f die gegebene Curve durchläuft, ein verticaler Bleistift z eine Curve beschreibt, deren Tangente dieser Hypotenuse stets parallel ist.

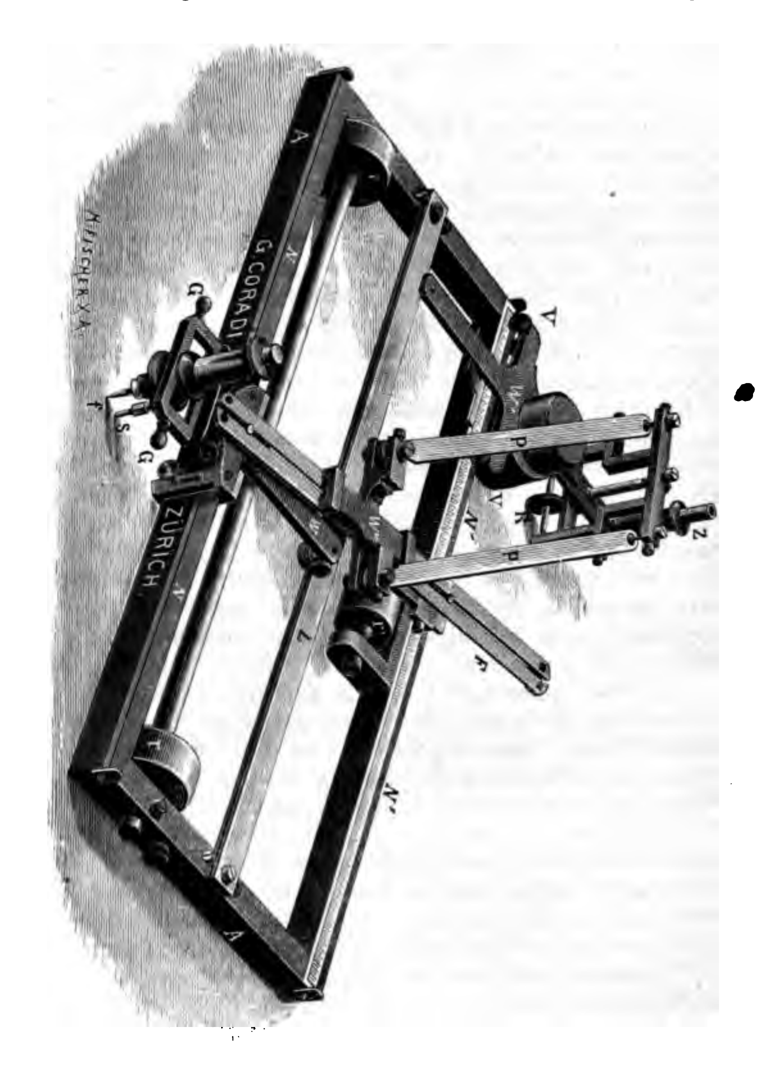
Coradi in Zürich fertigt zwei Modelle von Integraphen an, ein kleines und ein grösseres, welche auf diesem Princip beruhen; wir beschreiben nur das kleine Modell, auf welches sich auch die nebenstehende Figur bezieht.

Es besteht aus einem festen metallenen rechteckigen Gestell von etwa 30×14 cm, das von drei Laufrollen r, r' getragen wird, die dazu dienen, ihm auf dem Zeichenbogen eine geradlinige Bewegung zu geben.

Auf diesem Bogen werden die beiden zu einander senkrechten Axen aufgezeichnet; die eine, die y-Axe, parallel zur Richtung des Balkens NN, die andere lothrecht zu ihr und so, dass sie durch die Lage geht, welche die Spitze f hat, wenn das bewegliche Gleitstück GG sich in seiner Anfangsstellung befindet. Das letztere tritt dann ein, wenn man die Spitze einer Schraube auf ein in dem Riegel A angebrachtes Loch einstellt.

Das Gleitstück GG lässt sich längs des Balkens NN bewegen und diese Bewegung, mit der des ganzen Instruments in dazu senkrechter Richtung combinirt, macht es möglich, dass die Spitze (der Fahrstift) f den Umfang einer beliebigen aufgezeichneten Curve (der Differentialcurve) beschreiben kann. Die

Spitze f und das Gleitstück GG, dem sie angehört, wollen wir der Kürze wegen die *Differentialspitze* und das *Differentialgleit-*



stück nennen. Mit Hülfe eines mit Gelenken versehenen Systems wird das Lineal F in jeder Lage stets der Ebene der scharf-

randigen Rolle R sowohl, wie andererseits auch der Hypotenuse jenes rechtwinkligen Dreiecks, von dem oben die Rede war, parallel erhalten. Daraus folgt, dass die verticale Ebene von R, welche Lage sie auch haben mag, immer dieser Hypotenuse parallel ist. Auf der anderen Seite wird die Rolle R durch ein hinreichend schweres mit dem Gleitstück $V V$ (dem *Integralgleitstück*) verbundenes Gewicht stark wider das Zeichenpapier gedrückt. Diese Rolle sucht sich daher in ihrer eigenen Ebene zu bewegen und schiebt dabei das Integralgleitstück auf dem Balken $N'N'$ vorwärts und rückwärts und mithin auch den Bleistift Z; sie ändert die Richtung ihrer Bewegung nur, wenn auch das Lineal F sie ändert; das letztere kann aber nur dann geschehen, wenn das Differentialgleitstück sich auf dem Balken NN verschiebt. Mit dem Integralgleitstück ist ein Nonius verbunden, der sich auf einer in Centimeter und Millimeter getheilten Scala $N'N'$ so bewegt, dass man, nachdem in der Anfangslage der Nullpunkt des Nonius auf den Nullpunkt der Theilung eingestellt worden ist und nachdem man mit der Spitze f einen Bogen der Differentialcurve durchfahren hat, den Werth des Inhalts der zwischen diesem Bogen, der x-Axe und den beiden Endordinaten enthaltenen Fläche ablesen kann.

Auf diese Weise beschreibt der Bleistift Z die Integralcurve der gegebenen Curve; die Aufzeichnung dieser Curve ist aber von grosser Wichtigkeit, weil man mit ihrer Hülfe die werthvollsten Anwendungen von dem Instrument machen kann.

Mit dem Querriegel L ist ein Zapfen fest verbunden, um welchen sich das bewegliche Lineal F dreht; die Entfernung zwischen diesem festen Zapfen und dem Mittelpunkt des Riegels A stellt die *Masseinheit des Instruments* dar und die Gerade, welche diese beiden festen Punkte verbindet, ist in jeder Lage die Basis jenes rechtwinkligen Dreiecks, von dem wir oben gesprochen haben. Das Instrument ist so construirt, dass man diesem festen Zapfen, wenn man will, eine andere Stellung geben und dadurch die Masseinheit des Instruments von einem Minimum von 7 cm auf ein Maximum von $12\frac{1}{2}$ cm bringen kann.

Die Masse, welche man auf der Scala $N'N'$ erhält, sind mit der Masseinheit des Instruments zu multipliciren; auf der Scala werden Centimeter, Millimeter und Zehntelmillimeter abgelesen; wenn die Masseinheit des Instruments mithin 10 cm beträgt, so erhält man die Masse nur in Quadratcentimetern und Quadratmillimetern; die Ablesung auf der Scala $N'N'$ sei z. B. 7,26 cm;

mit 10 multiplicirt erhält man 72,6 und die ausgeführte Messung ergibt 72 Quadratcentimeter und 60 Quadratmillimeter.

Ehe wir fortfahren, wollen wir noch bemerken, dass das grosse Modell, von welchem oben die Rede war, unter Anderem auch die sehr wichtige Abweichung aufweist, dass die Differential- und die Integralspitze sich an denselben Balken und nicht an die zwei verschiedenen sich gegenüberliegenden Balken anlehnen.

Es wird sich vor allem empfehlen, die Beziehungen der möglichen Singularitäten der Integralcurven zu denjenigen der Differentialcurven festzustellen; sie sind kurz die folgenden:

wo die Differentialcurve ein *Maximum oder Minimum* hat, besitzt die Integralcurve eine *Inflexion;*

wenn die Differentialcurve die x-Axe schneidet, so hat die Integralcurve ein *Maximum oder Minimum;*

wenn die Differentialcurve plötzlich die Richtung wechselt, so erhält die Integralcurve eine *Spitze;*

um in einem Punkt die Tangente an die Integralcurve zu erhalten, braucht man die Differentialspitze nur eine der x-Axe parallele Gerade beschreiben zu lassen; d. h. also, man braucht nur die Hand von dem Gleitstück wegzunehmen und das Instrument auf seinen Rollen laufen zu lassen;

wenn das Differentialgleitstück eine auf der x-Axe senkrechte Gerade beschreibt, also auf dem Instrument läuft, ohne dass dieses sich bewegt, so bleibt die Integralspitze unbeweglich.

Das Instrument lässt sich auf die folgenden verschiedenen Arten benutzen:

1. dient es zum *Messen der Flächeninhalte* auf die oben angegebene Weise; es leistet dabei den Dienst eines beliebigen Planimeters. Der Umfang der Flächen muss in der Richtung der Bewegung des Uhrzeigers durchfahren werden;

2. lassen sich mit ihm bei stetiger Bewegung *Parabeln beschreiben;* man braucht dazu nur die Differentialspitze auf einer beliebigen Geraden gleiten zu lassen; je nach der Neigung dieser Geraden ergeben sich Parabeln von verschiedenem Parameter;

3. kann man *eine gegebene überall begrenzte Ebene mittelst einer Geraden von gegebener Richtung in Theile zerlegen, welche gegebenen Grössen proportional sind.* Man wähle zu diesem Zweck als gegebene Richtung die y-Axe und construire die dem ganzen Umfang der gegebenen Fläche entsprechende Integralcurve; dann zerlege man den Abstand zwischen dem Anfangs- und Endpunkt dieser Integralcurve (welche Punkte dieselbe

Ordinate haben) in die proportionalen Theile und wiederhole die Operation in der Art, dass der Anfangspunkt der Integralcurve dabei einer der bezeichneten Theilungspunkte wird; *die neue Integralcurve wird alsdann die frühere in einem Punkt treffen, dessen Abscisse zugleich auch die Abscisse der Parallelen zur y-Axe ist, welche die gegebene Fläche auf die gewünschte Art schneidet;*

4. lassen sich die *statischen Momente* einer begrenzten Ebene in Bezug auf eine gegebene Gerade berechnen.

Dazu genügt es, die y-Axe parallel dieser Geraden zu wählen, von einem der Durchschnittspunkte der Geraden mit dem Umfang der Fläche aus die Differentialcurve zu durchfahren, mit der Differentialspitze zu demselben Punkt zurückzukehren und die Integralcurve zu entnehmen. Alsdann beschreibe man mit der Differentialspitze diese letztere, so erhaltene Curve und entnehme wieder die Integralcurve. *Der Abstand zwischen dem Anfangs- und Endpunkt dieser letzteren, welcher in Millimetern und Zehntelmillimetern auf der eingetheilten Scala abgelesen wird und mit der Masseinheit des Instruments zu multipliciren ist, stellt das gesuchte statische Moment dar.*

Wenn die gegebene Gerade die begrenzte Ebene nicht schneiden sollte, so verbinde man einen Punkt der Geraden durch einen beliebigen Strich mit einem Punkt des Umfangs der Fläche, durchfahre mit der Differentialspitze zuerst den hinzugefügten Strich, dann den Umfang der Fläche in der Richtung des Uhrzeigers und schliesslich noch einmal den Strich in umgekehrter Richtung.

5. Wiederholt man die oben angegebene Operation auch mit der zuletzt erhaltenen Integralcurve, so erhält man auf dieselbe Art als Resultat den Werth *des Moments zweiter Ordnung* der Fläche in Bezug auf die Gerade; *durch Fortsetzung dieses Verfahrens lassen sich Momente beliebiger Ordnung berechnen.*

6. Man denke sich die Integralcurve des Umfangs einer gegebenen begrenzten Ebene construirt, indem man dabei von dem am weitesten links gelegenen Punkt dieses Umfangs ausgeht und zu ihm zurückkehrt, und nehme an, es sei dies so geschehen, dass der Anfangspunkt der Integralcurve auf der x-Axe liegt. Man integrire alsdann diese Integralcurve noch einmal und richte es wieder so ein, dass der Anfangspunkt der neuen Curve ebenfalls auf der x-Axe liegt.

Ist die letztere Integralcurve fertig beschrieben, so nehme man die Hand von dem Differentialgleitstück weg und lasse das

Instrument auf den Rädern rollen; die Integralspitze durchläuft die in dem Endpunkt an die Curve gelegte Tangente; *diese Tangente wird dann die x-Axe in einem Punkt schneiden, dessen Abscisse der Abscisse der Geraden gleich ist, welche parallel zu y ist und durch den Schwerpunkt der gegebenen begrenzten Fläche geht.* Man kann auf diese Weise, wenn man das Verfahren bei anderer Richtung der Axen wiederholt, *den Schwerpunkt einer begrenzten Ebene* graphisch ermitteln.

7. *Die Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x) = 0$ lassen sich graphisch construiren.* Man setzt zu diesem Zweck $y = f(x)$ und bildet die aufeinander folgenden Derivirten $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$, $\cdots$, bis man zu einer Constanten kommt. Man ziehe dann eine Parallele zur x-Axe, welche diese Constante zur Ordinate hat; darauf integrire man und wird so eine Gerade erhalten, die bei passender Wahl der Axen die vorletzte Derivirte darstellen kann; integrirt man auch diese, so ergibt sich die vorhergehende Derivirte u. s. f., bis man schliesslich die graphische Curve $y = f(x)$ construirt hat; die Wurzeln entsprechen dann den Schnittpunkten der Curve mit der x-Axe, d. h. also: die Abstände des Coordinatenanfangs von diesen Schnittpunkten, durch die Masseinheit des Instruments dividirt, ergeben die Wurzeln. Die Einheit, welche man zum Aufzeichnen der Parallelen zur x-Axe und der übrigen successiven Integrationsconstanten wählen muss, ist von der Masseinheit des Instruments durchaus unabhängig und kann beliebig angenommen werden. Diese Bemerkung ist wichtig, weil es vorkommen kann, dass man beim Beibehalten derselben Masseinheit die Zeichnungen nicht in das von dem Instrument beherrschte Gebiet bringen würde.

8. *Mit diesem Instrument kann man auch die bekannten Probleme der Quadratur des Kreises und der Verdoppelung des Cubus (das Delische Problem) graphisch ausführen:* man braucht, um das erstere aufzulösen, d. h. um eine Länge gleich π graphisch herzustellen, nur die Integralcurve eines Kreises vom Radius 1 (der Masseinheit des Instrumentes) zu construiren. Man erhält eine im Zickzack verlaufende Curve und der Abstand zwischen zwei sich folgenden Spitzen auf derselben Ordinate stellt die Grösse π dar.

Was das zweite Problem angeht, so integrire man zweimal die Gerade, deren Gleichung $y = 6x$ lautet. Man erhält die Curve $y = x^3$, bei welcher die der Ordinate 2 (in der gewählten Masseinheit, die unabhängig von derjenigen des Instru-



ments ist) entsprechende Abscisse $\sqrt[3]{2}$ (in der Masseinheit des Instruments) darstellt.

Man kann mit dem Instrument auch das Problem der Theilung eines Winkels in drei gleiche Theile lösen, doch können wir uns hier auf weitere Einzelheiten nicht einlassen.

9. Der Anwendungen dieses Instrumentes gibt es noch sehr viele; sie beziehen sich auf die Theorie der Gewölbe, die Mechanik, die elastische Linie, die Elektricität etc. Eine vollständige Besprechung dieser sämmtlichen Anwendungen findet man in dem oben citirten Werk von Abdank-Abakanowicz.

Namenregister.

(In den Registern geben die Zahlen, vor denen ein S. steht, die Seiten des Textes an.)



Sachregister.







Nach Autoren benannte Theoreme, Formeln, Functionen, Reihen, Determinanten etc.





Zusätze und Verbesserungen.

Seite 14 Z. 15, 16, 21, 22, 23 v. o. setze $i_1, i_2, i_3, \cdots$ an die Stelle von $r_1, r_2, r_3, \cdots$.

„ 38. Füge das Citat hinzu: Burnside, *Theory of groups of finite order,* Cambridge 1897.

„ 50 Z. 17 v. u. schalte man zwischen die Worte die Determinanten ein: „(von Wronski schon untersuchten und benutzten)".

„ 54 vergl. auch die Literaturangaben in der *Enc. d. math. W.*, Bd. 1, S. 46.

„ 80 Z. 4 v. u. Es ist die französische Uebersetzung des Salmon'schen Werkes *Modern higher Algebra* gemeint, das in deutscher Bearbeitung von Fiedler, Leipzig 1877 unter dem Titel *„Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen"* erschienen ist. Vergl. das Literaturverzeichniss S. 607.

„ 81. Am Schluss des § 1 füge hinzu: Bemerkenswerth ist das folgende Theorem: *Die S lassen sich rational durch die S mit ungeradem Index* $S_1, S_3, \cdots, S_{2n-1}$ *ausdrücken.* Das Borchardt'sche Theorem, *Monatsber. d. Berl. Ak.*, 1857; Brioschi, *Ann. di mat.*, 1. Ser., 1, S. 43. Neuere Untersuchungen über diesen Gegenstand sind von Vahlen, *Acta math.*, 23.

„ 85 füge man noch hinzu: Vogt, H., *Leçons sur la résolution algébrique des équations,* Paris 1895 und ebenso zu Kap. 5, § 12.

„ 88, Z. 13 v. u. füge hinzu: Diese Function wird *Geminante* genannt, vergl. Matthiessen.

„ 89 Z. 16 v. o. Statt der Bezeichnung *Charakteristik* ist nach Frobenius, *Crelle,* 86 das Wort *Rang* gebräuchlich.

„ 94 Z. 9 v. o. füge hinter den Worten: „drei Gliedern" hinzu: nämlich den Gliedern mit der 5ten, 1ten und 0ten Potenz der Variabelen.

„ 95 Z. 5 v. o. Siehe auch Klein-Burkhardt, *Math. Ann.,* 35, S. 277.

„ 95 Z. 12 v. o. setze vor das Wort „Lindemann": Jordan, *Traité des substitutions,* S. 380.

„ 95 Z. 15 v. o. vergl. auch Burkhardt, *Math. Ann.,* 35, S. 279 Anm.

„ 97 Z. 10 v. o. setze $z^m + 1$ statt z^{m+1}.

„ 135 füge man zu § 2 hinzu: In den Formeln für die unbestimmten Integrale sind die Integrationsconstanten weggelassen worden.



Seite 139, Z. 1 u. 14 v. u. setze Kapteyn statt Kapteiyn.
" 155 Z. 10 v. o. lies $\Pi(u, k, \chi)$ statt $\Pi(n, k, \chi)$.
" 203 Z. 30, 33 v. o. füge hinter dem Wort Differentialgleichung hinzu: „mit $2n$ Variabelen".
" 261 Z. 14 v. o. Das Salmon'sche Werk ist in deutscher Bearbeitung von Fiedler, *Algebra d. lin. Transf.*, Leipzig 1877 erschienen.
" 269 Z. 22 v. o lies § 11 nicht § 10.
" 275 Z. 1 v. o. statt „so müssen die etc." lies: „so müssen für den dieser gemeinschaftlichen Wurzel entsprechenden Werth von x die Coefficienten etc."
" 279 Z. 6 v. o. lies § 11 statt § 10.
" 558. Papyrus Rhind ist das älteste mathematische Handbuch, stammt aus Aegypten und befindet sich im Britischen Museum.
" 591. Zu Cauchy's *Cours d'analyse* sind deutsche Uebersetzungen von B. Huzler, Königsberg 1828 und Itzigsohn, Berlin 1885 vorhanden.



Koenigsberger, L., zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826—1829. 1879. n. ℳ 2.40.

— — — allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen. 1882. n. ℳ 8.—

— — — Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. 1889. n. ℳ 8.—

Krause, M., die Transformation der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung. Nebst Anwendungen. 1886. n. ℳ 10.—

— — — Theorie der doppeltperiodischen Funktionen einer veränderlichen Gröfse. 2 Bände. I. Band. 1895. n. ℳ 12.—; II. Band. 1897. n. ℳ 12.—

Krazer, A., Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemannschen Thetaformel. 1882. n. ℳ 3.60.

— — — und **F. Prym**, neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunktionen. 1892. n. ℳ 7.20.

Kronecker's, L., Vorlesungen über Mathematik. Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preufsischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Kommission. In 4 Bänden.

I. Band: Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale, herausgegeben von E. Netto. 1894. n. ℳ 12.—

II. — Vorlesungen über die Theorie der Determinanten, herausgegeben von K. Hensel. [In Vorbereitung.]

III. — Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von K. Hensel. [Erscheint im Oktober 1900.]

IV. — Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen, herausgegeben von K. Hensel. [In Vorbereitung.]

Lagrange, J. L., mathematische Elementar-Vorlesungen. Deutsch von Niedermüller. 1880. n. ℳ 2.40.

Legendre, Adrien-Marie, Zahlentheorie. Nach der dritten Ausgabe ins Deutsche übertragen von H. Maser. 2 Bände. 2., wohlfeile Ausgabe. 1893. n. ℳ 12.—

Lie, S., Theorie der Transformationsgruppen. Unter Mitwirkung von F. Engel bearbeitet. In 3 Abschnitten. I. Abschnitt. 1888. n. ℳ 18.—; II. Abschnitt. 1890. n. ℳ 16.—; III. Abschnitt. 1893. n. ℳ 26.—

— Vorlesungen über gewöhnliche Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Bearbeitet und herausgegeben von G. Scheffers. 1891. n. ℳ 16.—

— — Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen. Bearbeitet und herausgegeben von G. Scheffers. 1893. n. ℳ 24.—

Mansion, P., Einleitung in die Theorie der Determinanten. 1899. n. ℳ 1.—

— — — Elemente der Theorie der Determinanten mit vielen Übungsaufgaben. 3. verm. Aufl. 1900. n. ℳ 2.60.

Markoff, A. A., Differenzenrechnung. Autorisierte deutsche Übersetzung von Th. Friesendorff und E. Prümm. Mit einem Vorwort von R. Mehmke. 1896. n. ℳ 7.—

Matthiefsen, L., Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. 2., wohlfeile Ausgabe. 1896. n. ℳ 8.—

Meyer, A., Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Deutsch bearbeitet von E. Czuber. 1879. n. ℳ 12.—

Minkowski, H., Geometrie der Zahlen. In 2 Lieferungen. I. Lieferung. 1896. n. ℳ 8.—. [Die II. Lieferung folgt Ende 1900.]

Muth, P., Theorie und Anwendung der Elementarteiler. 1899. n. ℳ 8.—

Netto, E., Vorlesungen über Algebra. 2 Bände. I. Band. 1896. n. ℳ 12.—; II. Band. 1900. n. ℳ 16.—

——— Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra. 1882. n. ℳ 6.80.

Neumann, C., das Dirichletsche Prinzip in seiner Anwendung auf die Riemannschen Flächen. 1865. n. ℳ 1.80.

——— Theorie der Besselschen Funktionen. Ein Analogon zur Theorie der Kugelfunktionen. 1867. n. ℳ 2.—

——— Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential. 1877. n. ℳ 10.—

——— über die peripolaren Koordinaten. 1880. n. ℳ 1.60.

——— über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunktionen fortschreitenden Entwicklungen, unter durchgängiger Anwendung des Du Bois-Reymondschen Mittelwertsatzes. 1881. n. ℳ 7.20.

——— Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale. 2. Aufl. 1884. n. ℳ 12.—

——— über die Kugelfunktionen P_n und Q_n, insbesondere über die Entwicklung der Ausdrücke $P_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$ und $Q_n(zz_1 + \sqrt{1-z^2}\sqrt{1-z_1^2}\cos\Phi)$ nach den Cosinus der Vielfachen von Φ. 1886. n. ℳ 2.40.

Neumann, F., Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen. 1878. n. ℳ 8.—

——— Vorlesungen über mathematische Physik, gehalten an der Universität Königsberg. Herausgegeben von seinen Schülern in zwanglosen Heften.

I. Heft: Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus, namentlich über die Theorie der magnetischen Induktion. 1881. n. ℳ 3.60.
II. — Einleitung in die theoretische Physik. Herausgegeben von C. Pape. 1883. n. ℳ 8.—
III. — Vorlesungen über elektrische Ströme. Herausgegeben von K. Von der Mühll. 1884. n. ℳ 9.60.
IV. — Vorlesungen über theoretische Optik. Herausgegeben von E. Dorn. Mit einem Bildnis Neumanns in Lichtdruck. 1885. n. ℳ 9.60.
V. — Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers. Herausgegeben von O. E. Meyer. 1885. n. ℳ 11.60.
VI. — Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Herausgegeben von C. Neumann. 1887. n. ℳ 12.—
VII. — Vorlesungen über die Theorie der Kapillarität. Herausgegeben von A. Wangerin. 1894. n. ℳ 8.—
VIII. — Vorlesungen über die Wärme. Herausgegeben von F. Pockels. [In Vorbereitung.]

Pascal, E., die Variationsrechnung. Autorisierte deutsche Ausgabe von A. Schepp. 1899. In Leinw. geb. n. ℳ 3.60.

——— die Determinanten. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die Gesamtheit der neueren Forschungen. Berechtigte deutsche Ausgabe von H. Leitzmann. 1900. In Leinw. geb. n. ℳ 10.—

Pasch, M., Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung. 1882. n. ℳ 5.20.

Planck, M., das Prinzip der Erhaltung der Energie. 1887. n. ℳ 6.—

Prym, F., Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel und die Riemannsche Charakteristikentheorie. 1882. n. ℳ 6.—

Rausenberger, O., Lehrbuch der Theorie der periodischen Funktionen einer Variabeln mit einer endlichen Anzahl wesentlicher Diskontinuitätspunkte nebst einer Einleitung in die allgemeine Funktionentheorie. 1884. n. ℳ 10.80.

—— die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene, systematisch und kritisch behandelt. 1887. n. ℳ 5.—

—— Lehrbuch der analytischen Mechanik. 2., wohlfeile Ausgabe. 2 Bände in einem Bande. I. Bd.: Mechanik der materiellen Punkte; II. Bd.: Mechanik der zusammenhängenden Körper. 1893. n. ℳ 8.—

Repertorium der litterarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik. „Originalberichte der Verfasser" gesammelt und herausgeg. von L. Koenigsberger und G. Zeuner. I. Bd. 5 Hefte. 1877. n. ℳ 7.20; II. Bd. 6 Hefte. 1879. n. ℳ 10.—

Riemann's, B., gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß. Herausgegeben unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber. 2. Auflage bearbeitet von H. Weber. Mit einem Bildnis Riemanns. 1892. n. ℳ 18.—

Routh, E. J., die Dynamik der Systeme starrer Körper. In 2 Bänden mit zahlreichen Beispielen. Autor. deutsche Ausgabe von A. Schepp. Mit einem Vorwort von F. Klein. 1898. In Leinw. geb. n. ℳ 24.—

Rudio, F., Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage. Mit vier Abhandlungen (in deutscher Übersetzung) über die Kreismessung von Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. 1892. n. ℳ 4.—

Salmon, G., Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen. Deutsch bearbeitet von W. Fiedler. 2. Aufl. 1877. n. ℳ 10.—

Scheibner, W., zur Reduktion elliptischer Integrale in reeller Form. 1879. n. ℳ 5.—

Schlesinger, L., Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. 2 Bände. 1895–98. n. ℳ 50.—

Schlömilch, O., Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Zwei Teile. I. Teil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. 4. Aufl. 1887. n. ℳ 6.—; II. Teil: Aufgaben aus der Integralrechnung. 4. Aufl. von R. Henke. 1900. n. ℳ 8.—

Schotten, H., Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. In 3 Bänden. I. Bd. 1890. n. ℳ 6.—; II. Bd. 1893. n. ℳ 8.—; III. Bd. [unter der Presse].

Schottky, F., Abriß einer Theorie der Abelschen Funktionen von drei Variabeln. 1880. n. ℳ 4.—

Schröder, E., Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte Logik). 3 Bände. I. Bd. 1890. n. ℳ 16.—; II. Bd., 1. Abt. 1891. n. ℳ 12.—. [Die 2. (Schluß-)Abteilung folgt 1901]; III. Bd. (A. u. d. T.: Algebra und Logik der Relative.) 1. Abt. 1895. n. ℳ 16.—. [Die 2. (Schluß-)Abteilung folgt 1901.]

Schubert, H., Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen. 1897. In Leinw. geb. n. ℳ 4.—

Schupmann, L., die Medialfernrohre. Eine neue Konstruktion für große astronomische Instrumente. 1899. n. ℳ 4.80

Serret, J.-A., Handbuch der höheren Algebra. Deutsche Übersetzung von G. Wertheim. 2 Bände. 2. Aufl. 1878—79. n. ℳ 19.—

——— Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von A. Harnack. 2. Aufl., von G. Bohlmann. 3 Bände. I. Bd.: Differentialrechnung. 1897. n. ℳ 10.—; II. Bd.: Integralrechnung. 1899. n. ℳ 8.—; III. Bd.: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. [Unter der Presse.]

Somoff, J., theoretische Mechanik. Aus dem Russischen übersetzt von A. Ziwet. 2 Teile. I. Teil: Kinematik. 1878. n. ℳ 6.80; II. Teil: Einleitung in die Statik und Dynamik. Statik. 1879. n. ℳ 6.80.

Stäckel, P., und **F. Engel**, die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie. 1895. n. ℳ 9.—

Stahl, H., Theorie der Abelschen Funktionen. 1896. n. ℳ 12.—

Steiner's, J., Vorlesungen üb. synthetische Geometrie. 2 Teile. I. Teil: Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, bearb. von C. F. Geiser. 3. Aufl. 1887. n. ℳ 6.—; II. Teil: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften, bearbeitet von H. Schröter. 3. Aufl., durchgesehen von R. Sturm. 1898. n. ℳ 14.—

Steinhauser, A., die Lehre von der Aufstellung empirischer Formeln, mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate für Mathematiker, Physiker, Techniker bearbeitet. 1889. n. ℳ 8.—

Stolz, O., Vorlesungen üb. allgemeine Arithmetik. Nach den neueren Ansichten bearbeitet. 2 Teile. I. Teil: Allgemeines u. Arithmetik der reellen Zahlen. 1885. n. ℳ 8.—; II. Teil: Arithmetik der komplexen Zahlen mit geometr. Anwendungen. 1886. n. ℳ 8.—

——— Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. 3 Teile. I. Teil: Reelle Veränderliche und Funktionen. 1893. n. ℳ 8.—; II. Teil: Komplexe Veränderliche und Funktionen. 1896. n. ℳ 8.—; III. Teil: Die Lehre von den Doppelintegralen. Eine Ergänzung zum I. Teile des Werkes. 1899. n. ℳ 9.—

Study, E., Methoden zur Theorie der ternären Formen. 1889. n. ℳ 6.—

——— sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Funktionen. 1893. n. ℳ 5.—

Tait, P. G., elementares Handbuch der Quaternionen. Autorisierte Übersetzung von G. v. Scherff. 1880. n. ℳ 10.—

Volkmann, P., Vorlesungen über die Theorie des Lichtes. Unter Rücksicht auf die elastische und die elektromagnetische Anschauung. 1891. n. ℳ 11.20.

——— erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. Allgemein wissenschaftliche Vorträge. 1896. n. ℳ 6.—

Wertheim, G., Elemente der Zahlentheorie. 1887. n. ℳ 8.40.

Wirtinger, W., Untersuchungen über Thetafunktionen. 1895. n. ℳ 9.—

